МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

Распишем (2) как

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25 \Leftrightarrow (x-2)^2+9(y-1)^2=25$

(1) $\Leftrightarrow (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)}$] $a=x-2$, $b=y-1$

Тогда сис-ма $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$.

$a-2b=\sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a-2b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a-2b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(a-4b)=0 \\ a-2b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ a,b<0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=4b \\ a,b>0 \end{cases} \end{array}\right.$

Разберём случай $a=b \Rightarrow a^2+9b^2=10b^2 \Rightarrow b^2=2{,}5$

$\Rightarrow b=-\sqrt{2{,}5} \Rightarrow y-1=-2\sqrt{5} \Rightarrow y=-2\sqrt{5}+1$, $x=-2\sqrt{5}+2$

Если $a=4b \Rightarrow a^2+9b^2=25b^2 \Rightarrow b=1$, т.к. $a,b>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y-1=1 \Rightarrow y=2$, $a=4b \Rightarrow a=4 \Rightarrow x=6$

Ответ: $(-2\sqrt{5}+2; -2\sqrt{5}+1)$; $(6;2)$

N3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

ОДЗ: $x^2+18x>0$, т.к иначе $\log_{12} x^2+18x$ не опр $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ исходное нер-во $\Leftrightarrow$ $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2-(x^2+18x)^{\log_{12}13}+18x\geq 0$

Z $\exists$ $x^2+18x=a$

Тогда $5^{\log_{12}a}+a \geq a^{\log_{12}13}$. Прологарифмируем по

осн. 12.

Получим ~~$\log_{12}5 \cdot \log_{12}a + \log_{12}a - \log_{12}a \cdot \log_{12}13 \geq 1 \Leftrightarrow$~~

~~$\log_{12}a(\log_{12}5-\log_{12}13+1)\geq 1 \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow \log_{12}a\left(\log_{12}\frac{5}{13}+\log_{12}12\right)\geq 1 \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow \log_{12}a \cdot \log_{12}\frac{60}{13}\geq 1 \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow$~~ ~~$5^{\log_{12}a}$~~ ~~$\log$~~ Получим $\log_{12}5 \cdot \log_{12}a+\log_{12}a \geq$

$\geq \log_{12}a \cdot \log_{12}13 \Leftrightarrow \log_{12}a(\log_{12}5-\log_{12}13+1)\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{12}a \cdot \log_{12}\frac{60}{13}\geq 0 \Leftrightarrow \log_{12}a \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\in(0;1] \Leftrightarrow x^2+18x\in(0;1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\left[\frac{-18-\sqrt{328}}{2};-18\right)\cup\left(0;\frac{-18+\sqrt{328}}{2}\right]$

Ответ: $x\in\left[\frac{-18-\sqrt{328}}{2};-18\right)\cup\left(0;\frac{-18+\sqrt{328}}{2}\right]$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2 (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(p) = f\left(p^2 \cdot \frac{1}{p}\right) = f(p^2) + f\left(\frac{1}{p}\right) = f(p) + f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(p) = -f\left(\frac{1}{p}\right)$; $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{1} \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

Пусть $y = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$ — больше двух разл. пр. множ. быть не может, т.к. $2 \cdot 3 \cdot 5 > 24$.

Тогда $f(y) = f(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) =$

$= \alpha_1 \cdot f(p_1) + \alpha_2 \cdot f(p_2)$. Тогда $f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$= f\left(\frac{1}{p_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{1}{p_2^{\alpha_2}}\right) = f\left(\frac{1}{p_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{1}{p_2^{\alpha_2}}\right) = \alpha_1 \cdot f\left(\frac{1}{p_1}\right) + \alpha_2 f\left(\frac{1}{p_2}\right) =$

$= -\alpha_1 \cdot f(p_1) - \alpha_2 \cdot f(p_2) \Rightarrow$ Если $x = p_3^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4}$.

То $f\left(\frac{x}{y}\right) = \alpha_3 \cdot f(p_3) + \alpha_4 \cdot f(p_4) - \alpha_1 f(p_1) - \alpha_2 f(p_2)$

Рассмотрим для каждого x

$x = 1$ — тогда любой ~~y~~ $y \neq 2^k \cdot 3^l$ подходит

$x \neq 2$
$x \neq 3$ таких y 13.

$f(1) =$

Для $x = 2, 3$ то же самое, т.к. $\left[\frac{2}{4}\right] = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

Для $x = 4$ $f(4) = f(2) + f(2) = 0 \Rightarrow$ тоже 13 вариантов

Для $x = 5$ подойдет $\begin{cases} y \neq 5 \cdot 2^k \cdot 3^l \\ y \neq 7 \cdot 2^k \cdot 3^l \\ y \neq 2^k \cdot 3^l \end{cases}$ — таких чисел 6

т.к. $2^k \cdot 3^l$ дают в $f(y)$ 0, а $f(5) = f(7)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №3
(Нумеровать только чистовики)

№5 (продолжение)

Для $x=6$ $f(x) = f(2)+f(3) = 0 \Rightarrow$ подходят 13 y

Для $x=7$ то же самое, что и для 5, т.к. $[\frac{5}{4}]=[\frac{7}{4}]$

$\Rightarrow$ 6 вар-тов

Для $x = 2^k \cdot 3^l$ всегда $13 \Rightarrow$ для 8, 9, 12, 16, 18, 24 это 13

Для $x = 2^k \cdot 3^l \cdot 5$ всегда 6, (аналогия с $x=5$)

Также и для $x = 7 \cdot 2^k \cdot 3^l$, т.е. для

10, 14, 20, 21, 15 это 6

Остались числа 11, 13, 17, 19, 22, 23.

Для $x=11$ нужно чтобы $\begin{cases} y \neq 5 \cdot 7 \cdot 2^l \cdot 3^k \\ y \neq 2^l \cdot 3^k \cdot 11 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ подходят 13, 17, 19, 23, – 4 числа

Для $x=13$ подходят те же что и для 11, только

без $13 \Rightarrow 3$ числа

Для $x=17$ без $17 \Rightarrow 2$ числа

Для $x = 19$ – 1 число

Для $x = 22$ столько же сколько для $11 \Rightarrow 4$ числа

Для $x=23$ – 0 чисел, для 1 подходят y $2^k \cdot 3^l$ – 13 чисел

Суммарно

$13 \cdot \cancel{11} + 6 \cdot \cancel{7} + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 + 4 = 189$

Ответ: 189

№1

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow 2 \sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2} \cdot \cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}$

$= 2 \cdot \sin(2\alpha+2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение)

Рассмотрим $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

Тогда $\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos 2\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} \iff$

$\iff \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} \pm \frac{1}{\sqrt5} \cdot \sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt5} \iff$

$\iff \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5} = \mp \frac{1}{\sqrt5}\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} \iff$

$\iff \begin{cases} \sin^2 2\alpha \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sin^2 2\alpha \\ \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5} < 0 \Rightarrow \sin 2\alpha < -\frac{1}{2} \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} 5\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha = 0 \\ \sin 2\alpha < -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 0 \\ \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{array}\right. \\ \sin 2\alpha < -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{9}{5} \Rightarrow (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \frac{9}{5}$

$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{1}{5}$

~~Сразу заметим, что если бы $\cos 2\alpha = -\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}$, то был бы корень 0, но он не подходит, т.к. тогда $\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow tg\,\alpha$ не опред.~~

Теперь $\sin\alpha - \cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt5}$

$\sin\alpha + \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

№1 (продолж.)

Если ~~sy~~ везде знак $+$, то

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt5} + \cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt5} + 2\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -2$

Если $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt5} + \cos\alpha$, а $\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt5} + 2\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin\alpha =$

$= \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$, если $\cos 2\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, то $\sin 2\alpha = 0$ — корень $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}+\pi k \text{ — не подходит} \\ \pi+\pi k \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0 \end{array}\right.$

Если $\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt5} + \cos\alpha$, а $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{3}{\sqrt5} + 2\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$

Если везде минусы, то $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt5}$, а $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -2 \Rightarrow$ варианты $-\frac{1}{2}$ и -2.

Если $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

тогда $\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} - \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $\cos 2\alpha = \sqrt{1-\sin^2 2\alpha}$ получаем

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} - \frac{1}{\sqrt5} \cdot \sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt5}$. Снова

перенося и возводя в квадрат, получаем

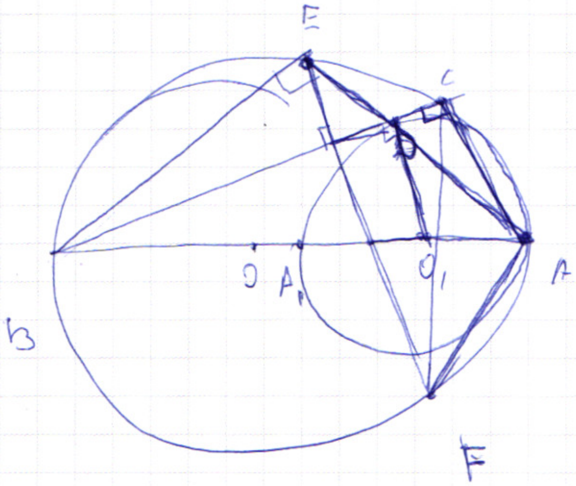
те же корни $\Rightarrow$ значения $\operatorname{tg}\alpha$ тоже будут

теми же $\Rightarrow$ все значения это $-\frac{1}{2}$; -2 и 0.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; -2; 0.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



~~Заметим, что~~

Пусть радиус ω r, радиус Ω R.

Тогда $AB = 2R$.

Пусть точка пересечения AB с ω отл. от A будет A_1,

тогда $BA_1 = 2R - 2r$. ~~Вот~~ по условию $BD = 17$. $BD^2 = BA_1 \cdot BA$ по теор. о степ. точки $\Rightarrow$

$\Rightarrow 17^2 = 2R(2R-2r)$ ①. С другой стороны $\angle ACB = 90^\circ$, т.к. AB - диаметр. $\angle BDO_1 = 90^\circ$, т.к. O_1D - радиус $\Rightarrow \triangle BDO_1 \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{17}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25} \Rightarrow \frac{r}{2R} = \frac{8}{25} \Rightarrow r = \frac{16}{25}R$

из ① $17^2 = 2R\left(2R - \frac{32}{25}R\right) \Rightarrow 2R \cdot \frac{18}{25}R = 17^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{17^2 \cdot 25}{36}} = \frac{85}{6} \Rightarrow r = \frac{136}{15}$

$\Rightarrow$ в первом вопросе ответ $\frac{85}{6}$ и $\frac{136}{15}$

Теперь заметим, что $AB = \frac{85}{3}$, $BC = 25 \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{85}{3}^2 - 25^2} =$

$= \sqrt{\frac{7225}{9} - \frac{5625}{9}} = \sqrt{\frac{1600}{9}} = \frac{40}{3} \Rightarrow \angle CBA = \arcsin \frac{\frac{40}{3}}{\frac{85}{3}} = \frac{8}{17}$ $\arcsin\frac{8}{15}$

№4 (продолжение)

$CD = 8 \quad AC = \frac{40}{3} \Rightarrow \angle DAC = \operatorname{arctg} \frac{8}{\frac{40}{3}} = \operatorname{arctg} \frac{3}{5}$.

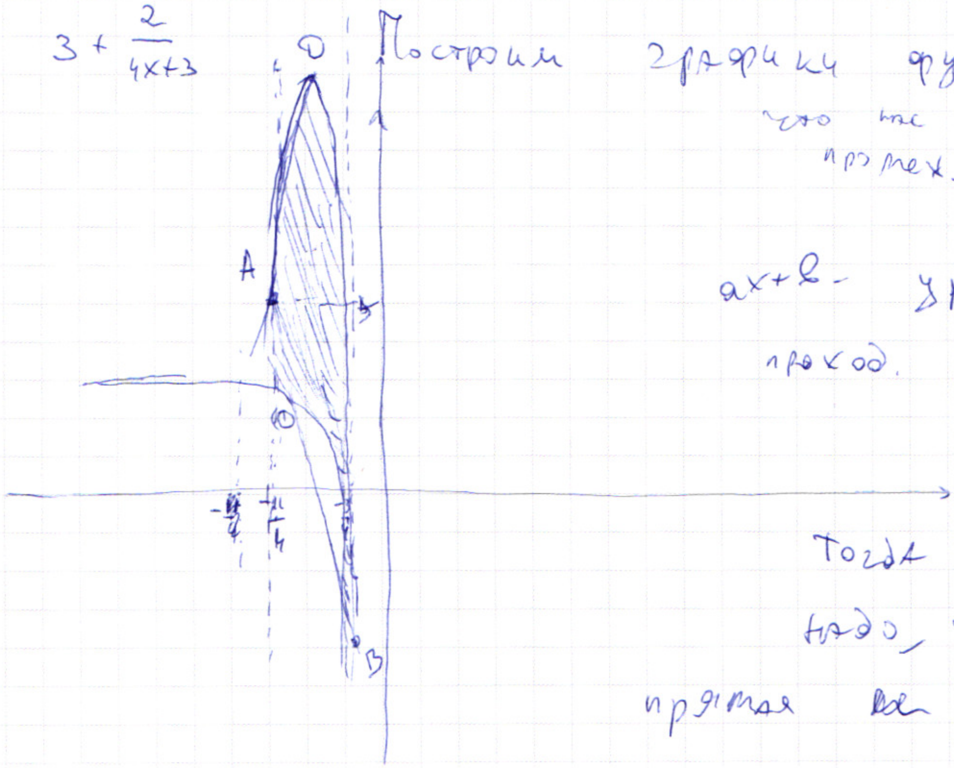
$\angle AFE = \angle EFC + \angle CFA = \angle DAC + \angle CBA = \operatorname{arctg} \frac{3}{5} +$
$+ \arcsin \frac{8}{15}$

Ответ: $\left(\frac{35}{6}, \frac{136}{15}\right)$; $\operatorname{arctg} \frac{3}{5} + \arcsin \frac{8}{15}$.

№6.

$$\underset{①}{\frac{12x+11}{4x+3}} \le \underset{③}{ax+b} \le \underset{②}{-8x^2-30x-17}$$

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$



Построим графики функций, заметим, что нас интерес. только промеж. $\left(-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$ax+b$ – ур-е прямой, проход. через точку $(0; b)$

Тогда по условию надо, чтобы эта прямая на $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$ целиком лежала в закраш. зоне.

Сразу заметим, что прямые $x = -\frac{3}{4}$ и $y = 3$ подходят, т.е. $a = -\frac{3}{4}; b = 0$ и $a = 0; b = 3$ подходят.

$\exists$ точка пересечения $x = -\frac{11}{4}$ и ② это $A(x_0; y_0)$. Заметим, что если прямая ③ пересек. график ② в точке с коорд $y_1 > y_0$, то прямая ③

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение)

.. то прямая (3) ~~пересечёт~~ не целиком будет лежать в закр. пл-ти на $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

] ~~точка~~ B - точка пересеч $x = -\frac{3}{4}$ и (2).

Тогда коорд B - $\left(-\frac{3}{4}; -12,5\right)$.] вершина параболы $O\left(-\frac{15}{8}; \frac{39}{8}\right)$ Тогда заметим, что прямая (3) не должна пересекать параболу (2) в части OB, т.к. тогда она не будет лежать полностью в закр. пл-ти. Проведём прямую AB.

] $y = dx + c$ ~~тогда~~ коорд. $A\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$. Тогда

$$5 = d \cdot -\frac{11}{4} + c \qquad \Rightarrow \quad 2d = -17,5 \Rightarrow d = -\frac{35}{4} \Rightarrow$$
$$-12,5 = -\frac{3}{4} \cdot d + c$$

$$\Rightarrow c = -\frac{305}{16}.$$

Тогда $0 = x \cdot -\frac{35}{4} - \frac{305}{16} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{305}{16} : -\frac{35}{4} = -\frac{305}{4 \cdot 35} = -\frac{305}{140}$$ - не лежит в закрыш зоне, но лежит в $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ прямая AB не подх, а ост. прямые не подх, т.к. пересекают параболу не в тех точках

Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$; $(0; 3)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

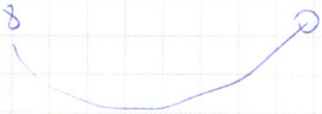
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12} a} + a - |a|^{\log_{12} 13} \geq 0$

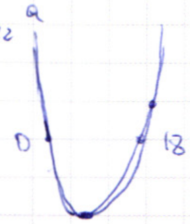
2° $x^2+18x<0$

~~$5^{\log_{12} a}$~~ $5^{\log_{12} a} + a + a \geq 0$

ОДЗ: $x^2+18x>0$ -18



$5^{\log_{12} a}$



$\log_{12} 5$

б) c) а) $0 < x^2+18x \leq 1$

$x^2+18x-1$

$5^{\log_{12} a} + \log_{12} 12^{a} -$

1° $x^2+18x \geq 0$

x

$\sin\alpha-\cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt5} \Rightarrow 1^\circ$

$5^{\log_{12} a} + a - a^{\log_{12} 13} \geq 0 \Rightarrow$

$\sin\alpha+\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\Rightarrow 5^{\log_{12} a} \geq a^{\log_{12} 13} - a$

$\log_c(a^b) = b\cdot\log_c(a)$

$\sin\alpha = \cos\alpha - \frac{3}{\sqrt5} \Rightarrow$

3° $\sin\alpha = \cos\alpha - \frac{3}{\sqrt5}$

$2\cos\alpha - \frac{3}{\sqrt5} = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\log_{12}\left(5^{\log_{12} a}\right) \geq \log_{12} a \cdot \log_{12} 5$

$\Rightarrow 2\cos\alpha - \frac{3}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \operatorname{tg} = -\frac{1}{2}$

$\log_{12} a \cdot \log_{12} 5 \geq \log_{12} 13 \cdot \log_{12} a - \log_{12} a$

$\Rightarrow \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt5}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} = -2$

либо $a=1$ либо

2° $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt5} + \cos\alpha$

1° $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt5} + \cos\alpha$

$\log_{12} 5 \geq \log_{12} 13 - 1 = \log_{12} 13$

$\frac{3}{\sqrt5} + 2\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt5}$

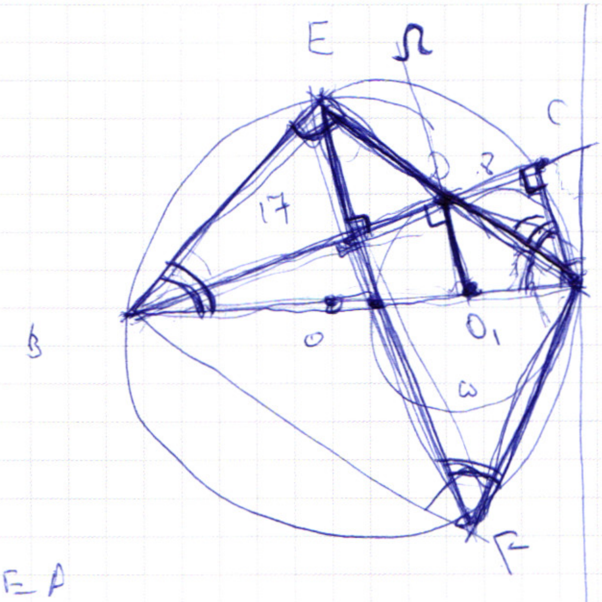
$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt5}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$

$\frac{3}{\sqrt5} + 2\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -2$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5.

$C_9^2 - 1$ — для (0,0)

$4\cdot(C_9^2-3)$ — для 0,1

$2\cdot(C_9^2-6)$ для 0,2

$\frac{2R-2r}{2R} = \frac{17}{25} \Rightarrow$

EA

$ED\cdot DA = 17\cdot 8 \Rightarrow ED = DA =$

$\Rightarrow ED = \sqrt{17\cdot 8} \Rightarrow$

$(R + (R-2r))\cdot 2R = 17^2$

$\Rightarrow 34R = 50R - 50r \Rightarrow$

$\Rightarrow 50r = 16R \Rightarrow$

$\Rightarrow EA = 4\cdot\sqrt{34}$

$\Updownarrow$

$\Rightarrow r = \frac{8}{25}R$

25
×25
115
51
625
×9
5625
85
×85
425
680
7225

$\cancel{2R+}(2R-2r)\cdot 2R = 17^2 \Rightarrow$

$\frac{V_{EA}}{\sin\angle EBA} = 2R \Rightarrow$

$\Rightarrow 4R^2 - 4Rr = 17^2$

$\Rightarrow \frac{4\cdot\sqrt{34}}{\sin EBA} = 2R \Rightarrow$

$\Rightarrow r = -\frac{17^2 - 4R^2}{4R} = \frac{8}{25}R$

$\Rightarrow \angle EBA = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{34}}{R}\right)$

$\frac{17^2}{4R} - R = \frac{8}{25}R$

$\frac{33}{25}R^2 = \frac{17^2}{4}$

$\frac{17^2}{4} - R^2 - \frac{8}{25}R^2 = 0 \Rightarrow$

$y = p_1\cdot p_2$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(p_1)+f(p_2) > f(p_3)+f(p_4)$

$x = p_3\cdot p_4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

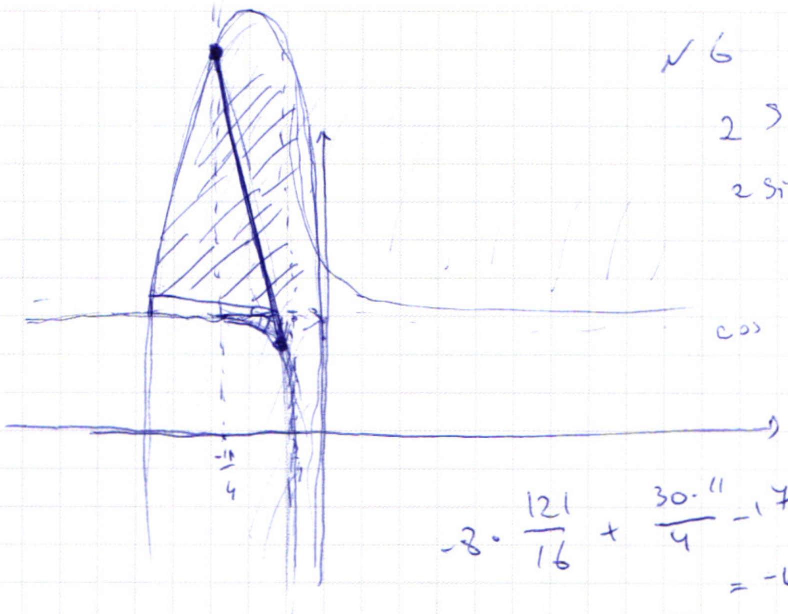
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№6 $\quad 2\lambda \quad\quad 13$

2β

$2\sin 2$

$143+42=$

$=135+142=$

$=133$

$y = ax + b$

cos

$a = 0$

$b = 3$

3'

$16 \cdot 5 = 80$

$-8 \cdot \frac{121}{16} + \frac{30 \cdot 11}{4} - 17 =$

$= -60,5 + \frac{330}{4} - 17$

$= -77,5 + 82,5 =$

$= 5$

$x_{max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{15}{8}$

1	13
2	13
3	13
4	13
5	6
6	13
7	6
8	13
9	13
10	6
11	4

12	13
13	3
14	6
15	6
16	13
17	2
18	13
19	1
20	6
21	6
22	4
23	0
24	13

2

$x = -\frac{3}{4}$

$\left(\frac{15}{8}\right)^2 \cdot -8 = -\frac{225}{8} + \frac{15 \cdot 15}{4} - 17 =$

7

$y = x^2$

$y = x^2 + x$

$x(x+1)$

$\frac{-225}{8} + \frac{225}{} = -\frac{225}{8} + \frac{225}{4} - \frac{136}{8} = \frac{305}{16}$

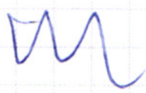
$-\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

$= \frac{89}{8}$

$-13 + -17 + 22 + \frac{1}{2} =$

$= -13,5$

$=$



$\sin(2\lambda + 2\beta) = -\frac{1}{5}$

$-2 \cdot \frac{9}{16} + \frac{30}{4} - 17 = -\frac{11}{4}$

$5 = -\frac{35}{4} \cdot -\frac{11}{4} + c \Rightarrow 5 = \frac{385}{16} + c \Rightarrow$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

10 11 12 13 14 15 16 17 18

19 20 21 22 23 24

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2 \cdot \sin \frac{2\alpha + 4\beta + 2\alpha}{2} \cdot \cos \frac{2\alpha + 4\beta - 2\alpha}{2} = -\frac{4}{5}$

"

$2 \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$

1° $\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \pm \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \pm \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \mp\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{4}{5}\sin^2 2\alpha + \frac{4}{5}\sin 2\alpha + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(1 - \sin^2 2\alpha) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow tg\,\alpha \text{ не опр.} \\ \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{5} \Leftarrow \end{array}\right.$

$\Leftarrow \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{9}{5} \Rightarrow (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \frac{9}{5}$

$\sin^2\alpha + 2 \ldots = \frac{1}{5} \qquad (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{1}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12} a} + a - |a|^{\log_{12} 13} \geq 0$

ОДЗ $a > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^{\log_{12} a} + a - a^{\log_{12} 13} \geq 0$

$\log_{12} 5 \cdot \log_{12} a + \log_{12} a - \log_{12} a \cdot \log_{12} 13 \geq 0$

$\cancel{\log_{12} 5 + \log 12}$ по ОДЗ $a > 0$.

1° $\log_{12} a \geq 0 \Rightarrow a \in (1; +\infty)$

$\log_{12} 5 \cdot \cancel{\log_{12} a} + 1 - \log_{12} 13 \geq 0$

$\log_{12} 5 + \log_{12} 12 \geq \log_{12} 13 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{12} 60 \geq \log_{12} 13$ — правда

2° $\log_{12} a = 0$ — понятно

3° $\log_{12} a < 0 \Rightarrow a \in (0; 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{12} 5 + \log_{12} 12 \leq \log_{12} 13$ — неправда $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 18x \in [1; +\infty) \Rightarrow$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25} \Rightarrow 50R - 25r = 34R \Rightarrow 16R = 25r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{16}{25}$$

$$2(R-r)\cdot 2R = 17^2 \Rightarrow$$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

0 0 1 1 2 3 4 4 5

$$\Rightarrow 4R^2 - 4rR = 17^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{4R^2-17}{4R} = R - \frac{17}{4R} = \frac{16R}{25} \Rightarrow$$

$$f(1) = f(1\cdot 1) = f(1)+f(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1) = 0$$

$$f(p_1p_2) = f(p_1)+f(p_2)$$

$$\Rightarrow R^2 - \frac{17^2}{4} = \frac{16R^2}{25} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{p_1p_2}\right) = -f(p_1)-f(p_2)$$

$$f\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{17}{4} = \frac{9}{25}R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{17^2\cdot 25}{4\cdot 9} \Rightarrow R =$$

$$f(p) = f\left(p^2\cdot\frac{1}{p}\right) = f(p^2)+f\left(\frac{1}{p}\right) = f(p)+f(p)+f\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow f(p) = -f\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$= \frac{17\cdot 5}{2\cdot 3} = \frac{85}{6} \Rightarrow r = \frac{\cancel{16}^{8}\cdot\cancel{85}^{17}}{\cancel{25}_{5}\cdot\cancel{6}_{3}} = \frac{136}{15}$$

5, 7, 10, 11, 13, 14,

15 17 19 20 21

22 23

$$f(ab) = f(a)+f(b)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) =$$

$$= f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\parallel$$

$$f(p_3)+f(p_4)$$

$$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{24}\right)} = \quad f\left(\frac{\cancel{3}}{2}\right) = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$$

$$f(3) = 0$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{p_1}\cdot\frac{1}{p_2}\ \cancel{\tfrac{1}{p_3}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{p_1}\ \frac{1}{p_2}\right) = f\left(\frac{1}{p_1}\cdot\frac{1}{p_2}\right) = f\left(\frac{1}{p_1}\right)+f\left(\frac{1}{p_2}\right)$$

$$12x+11 = 3(4x+3)+2 \Rightarrow 3+\frac{2}{4x+3}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

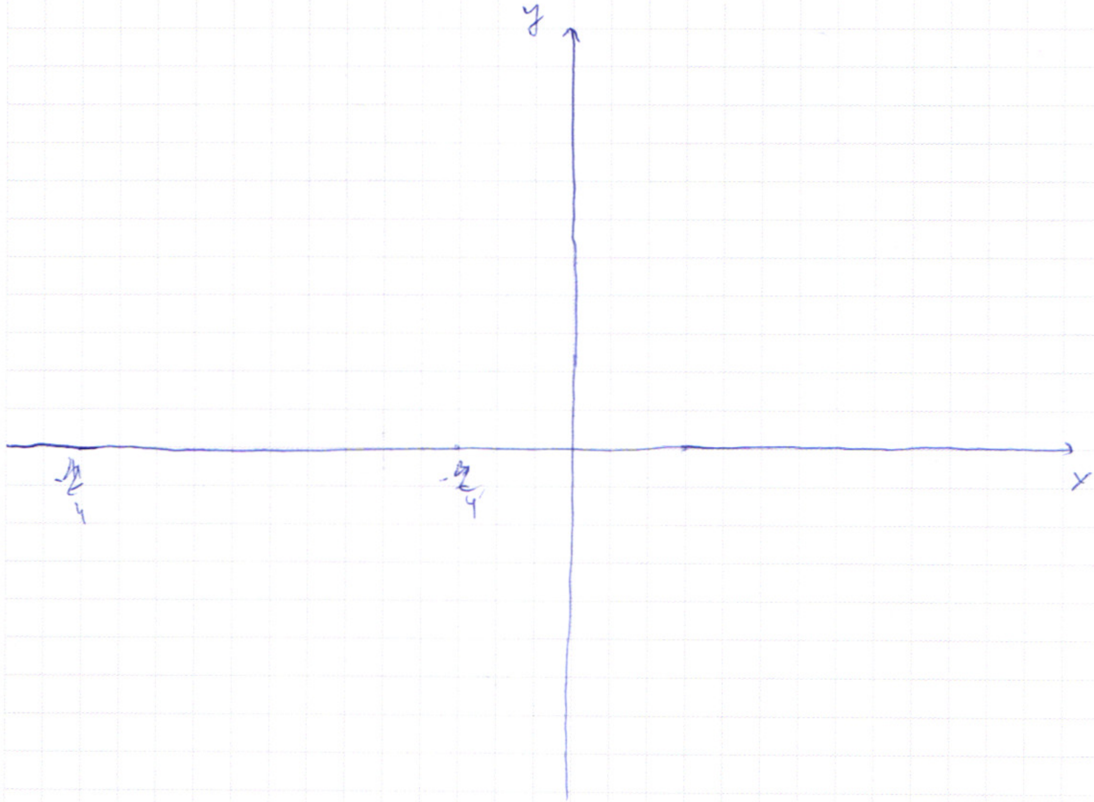
2° $\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} - \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

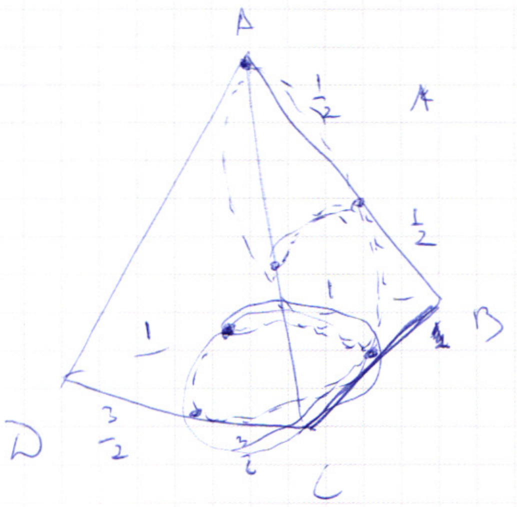
$\cos 2\alpha = 1$

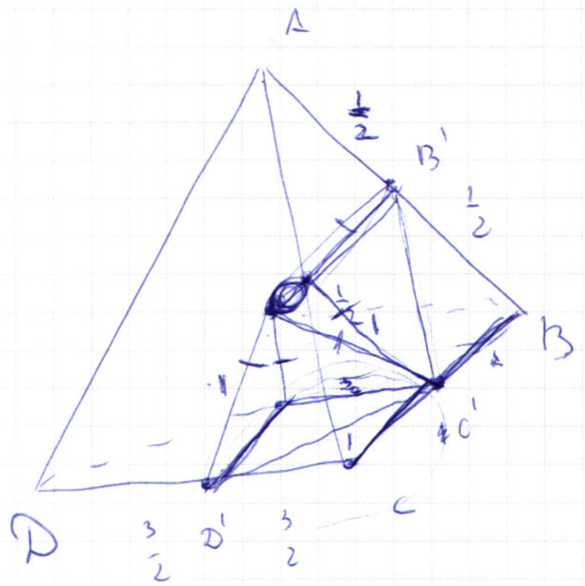
1° $\sin 2\alpha = 0$

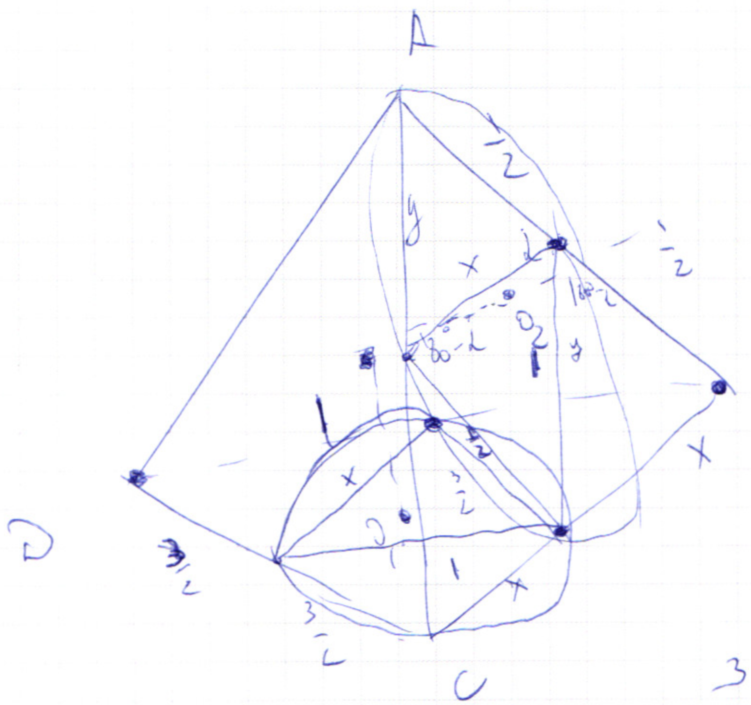
$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} \mp \sqrt{1-\sin^2 2\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha = \pm 1$

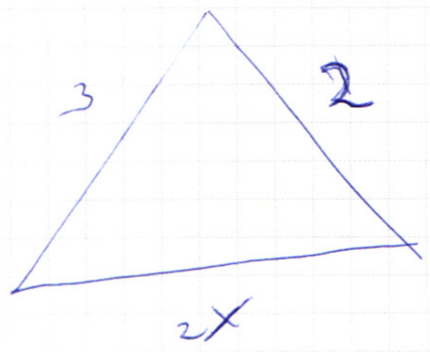








$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$



$x^2 + 18x - 1 = 0$

$D = 18^2 + 4 = 328$

$x_{1,2} = \dfrac{-18 \pm \sqrt{328}}{2}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad 2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) =$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} = 4 \cdot 2\cdot(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)\cdot$

$\cdot(\cos^2\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta)$

$\parallel$

$2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad 2\cdot\sin\frac{2\alpha+2\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow$

$= 1-2\cos^2\beta \Rightarrow 2\cos^2\beta = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\Rightarrow \cos^2\beta = \frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\quad \Rightarrow \sin^2\beta = \frac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha =$

$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$ $\quad \sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha = 0$

$\cos 2\alpha = \pm 1$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1-2\cos^2\alpha$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x^2+9y^2-4x-18y=12 \Rightarrow x^2-\cancel{4}x+4+9y^2-18y+9=25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(x-2) = a$

$(3y-3)^2 = 9(y-1)^2$, $(y-1) = b$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$xy-x-2y+2 = (x-2)(y-1)=xy-x-2y+2$

$4b$

$$\begin{cases} a^2+9b^2=25 \\ a-2b=\sqrt{ab} \end{cases}$$

$(a-4b)(a-b)=a^2-4ab-ab+4b^2$

$$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$\Leftarrow a^2-5ab+4b^2=0 \Leftrightarrow a=4b \Rightarrow a,b>0$

$a=b \Rightarrow b<0$

$x-2y=-2\sqrt{5}$

$\cancel{4\sqrt{2}+\sqrt{5}+29}$

1° $a=4b$

$a^2=16b^2 \Rightarrow 25b^2=25 \Rightarrow b=1$

2° $a=b \Rightarrow 10b^2=25 \Rightarrow b^2=2,5 \Rightarrow b=-\sqrt{2,5}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)