# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина $A$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $AD$. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра $BC$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5\cdot\cos(2\beta)}, \quad \cos(2\beta)\neq 0$$

$$-\frac{2}{5\cdot\cos(2\beta)} = -\frac{1}{\sqrt5}, \quad \cos(2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$$

$$\sin(2\beta) = \pm\sqrt{1-\cos^2(2\beta)} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\left[\begin{aligned} 2\alpha+2\beta &= -\arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi k \\ 2\alpha+2\beta &= \pi + \arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi k \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} 2\alpha+2\beta &= -\arcsin(|\sin(2\beta)|)+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta &= -\arcsin(-|\sin(2\beta)|)+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta &= \pi+\arcsin(|\sin(2\beta)|)+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta &= \pi+\arcsin(-|\sin(2\beta)|)+2\pi k \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} 2\alpha+2\beta &= -2\beta+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta &= 2\beta+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta &= \pi+2\beta+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta &= \pi-2\beta+2\pi k \end{aligned}\right.
\qquad
\left[\begin{aligned} \alpha &= -2\beta+\pi k \\ \alpha &= \pi k \\ \alpha &= \tfrac{\pi}{2}+\pi k \\ \alpha &= \tfrac{\pi}{2}-2\beta+\pi k \end{aligned}\right.$$

(у тангенса период $\pi$)

$$\left[\begin{aligned} tg\alpha &= tg(-2\beta) \\ tg\alpha &= tg(0) \\ tg\alpha &= tg(\tfrac{\pi}{2}),\ tg\alpha = tg(\tfrac{\pi}{2}-2\beta) \end{aligned}\right.
\qquad
\left[\begin{aligned} tg\alpha &= -tg(2\beta) \\ tg\alpha &= 0 \\ tg\alpha &= ctg(2\beta) \end{aligned}\right.
\qquad
\left[\begin{aligned} tg\alpha &= \pm\tfrac{1}{\sqrt5}\cdot\tfrac{\sqrt5}{2} \\ tg\alpha &= 0 \\ tg\alpha &= \pm\tfrac{2}{\sqrt5}\cdot\tfrac{\sqrt5}{1} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = \pm 2 \end{array}\right.$$

N 2

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$ , $x \geq 2y$

$x^2-4y\cdot x+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$

$x^2+x(1-5y)+(4y^2+2y-2)=0$

$D=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=$

$=9(y-1)^2$

$x=\frac{5y-1\pm(3y-3)}{2}=\{4y-2;\ y+1\}$

~~① $x=4y-1$~~

~~$16y^2-8y+1+9y^2-4(4y-1)-18y-12=0$~~

~~$25y^2-$~~

① $x=4y-2$

$16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y-12=0$

$25y^2-50y=0$, $y=\{0;2\}$

$x=-2$ $y=0$

$x=6$ $y=2$ $\quad x \geq 2y$

② $x=y+1$

$y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y-12=0$

$10y^2-20y-15=0$, $2y^2-4y-3=0$, $D=16+24=40$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \left\{ \frac{2+\sqrt{10}}{2} ; \frac{2-\sqrt{10}}{2} \right\}$

$x = \frac{2+\sqrt{10}}{2} + 1 = \frac{4+\sqrt{10}}{2} \quad y = \frac{2+\sqrt{10}}{2} \quad (x < 2y)$

$x = \frac{2-\sqrt{10}}{2} + 1 = \frac{4-\sqrt{10}}{2} \quad y = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$

$\left(x = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}, \ 2y = 2 - \sqrt{10}\right) = (x, \ 2y)$

$x - 2y = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2} - 2 + \sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{2} > 0 \quad (x \geq 2y)$

Ответ: $(6;2)$, $\left(2 - \frac{\sqrt{10}}{2} ; \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$

N 5

$f(x) = f(1) + f(x)$, $f(1) = 0$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = ?$, $f\left(\frac{1}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y) = f(1) = 0$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \rightarrow f(x) < f(y)$

$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(6) = f(8) \overset{f(9)}{=} f(12) = f(16) =$
$= f(18) = f(24) = 0$ . т.к.

если $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots$ $f(x) = \alpha_1 \cdot f(p_1) + \alpha_2 \cdot f(p_2) + \ldots$
$= \left[\frac{p_1}{4}\right] \cdot \alpha_1 + \left[\frac{p_2}{4}\right] \cdot \alpha_2 + \ldots$ ($p_i$ - простое, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

$x \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24\}$ (11 чисел)

$f(x) = 0 \Rightarrow f(y) > 0 \rightarrow y \notin$ (всего таких $y$ - $(24-11) = 13$ чисел)

$f(x) = 1$, $x \in \{5; 7; 10; 14; 15; 20; 21\}$ (7 чисел)

$f(y) > 1 \rightarrow f(y) \neq 0$ и $f(y) \neq 1$ :

: всего таких $y$ : $24 - 11 - 7 = 6$

$f(x) = 2$, $x \in \{11; 22\}$ (2 числа)

$f(y) \neq 0$, $f(y) \neq 1$, $f(y) \neq 2$ : всего таких $y$: $24 - 11 - 7 - 2 = 4$

$f(x) = 3$, $x \in \{13\}$, $f(y) > 3$ : всего таких $y$ : 3

$f(x) = 4$, $x \in \{17, 19\}$, всего подходящих $y$: 1

$f(x) = 5$ : $x \in \{23\}$, всего подходящих $y$ : 0

Ответ: $11 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 =$

$= 143 + 42 + 8 + 3 + 2 = 185 + 13 = 198$

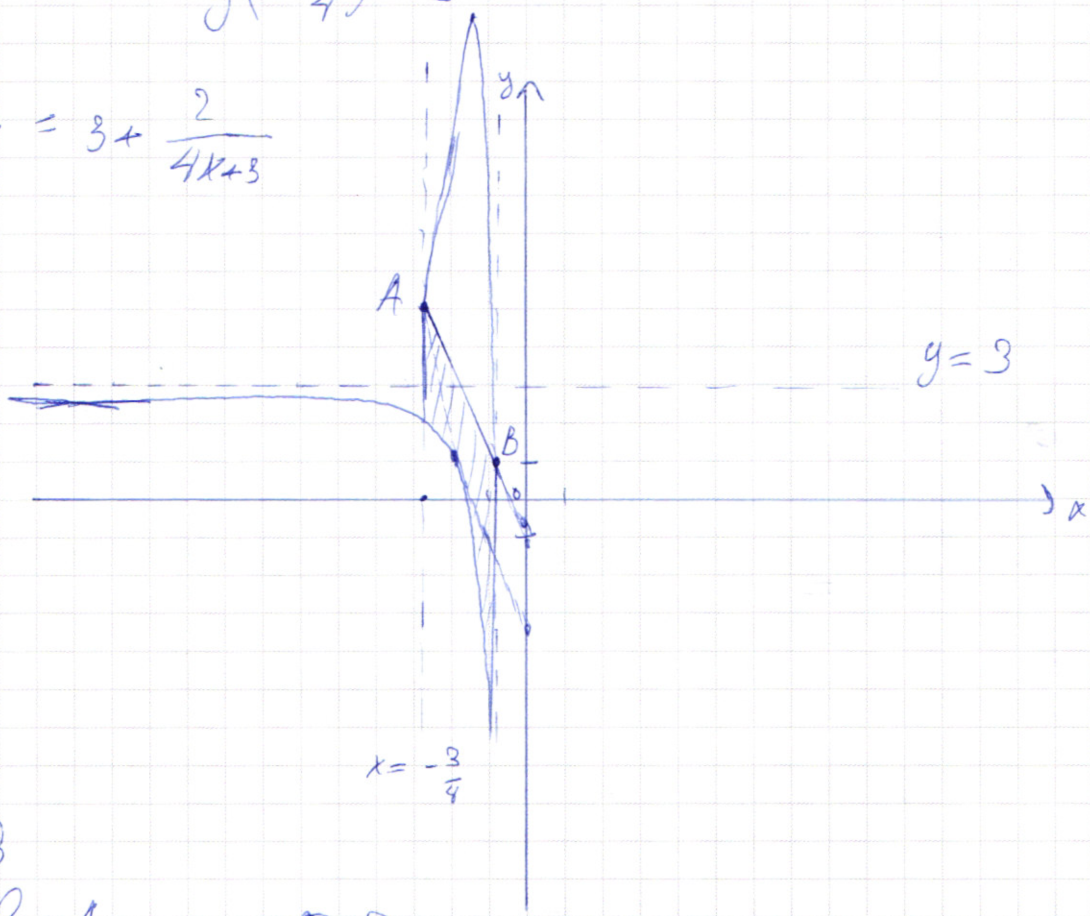
N 6

$y = -8x^2 - 30x - 17$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} \approx 13$

$y\left(-\frac{3}{4}\right) = 1$ $\quad y\left(-\frac{11}{4}\right) = 5$

$y_1 = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$




прямая AB

$$\begin{cases} a \cdot A_x + b = A_y \\ a \cdot B_x + b = B_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{11}{4}a + b = 5 \\ -\frac{3}{4}a + b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -11a + 4b = 20 \\ -3a + 4b = 4 \end{cases}$$

$-8a = 16$

$a = -2$

$b = -\frac{1}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 2x} - 18x$$

$$t^{\log_{12} 5}$$

$$a^{\log_{12} 5} \cdot b^{\log_{12} 5}$$

$$t^{\log_t \log_t 12 \; 13} = t^{\frac{1}{\log_t 12} \cdot \log_t 13} = 13^{\frac{1}{\log_t 12}}$$

$$13^{\log_{12} t} - 5^{\log_{12} t} = \qquad a^x - b^x \quad \left(\frac{a^x}{b^x} - 1\right)$$

$$13^{\log_{12} t}$$

$$12x + 11 = 4ax^2 + 3ax + 4bx + 3b$$

$$4ax^2 + x(3a + 4b - 12) \neq (3b - 11)$$

$$12(4x+3) - 4(12x+11) =$$

$$= 48x + 36 - 48x - 44$$

$$= \frac{-8}{(4x+3)^2}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x^2+x(1-5y)+(4y^2+2y-2)=0$

$D=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=$

$=9(y^2-2y+1)=(3(y-1))^2$

$x=\left\{\frac{5y-1+3y-3}{2};\frac{5y-1-3y+3}{2}\right\}=\left\{\frac{8y-4}{2};\frac{2y+2}{2}\right\}=$

$=\{4y-2;y+1\}$

$f'(x_0)+f'(x_0)$

$f'(x_0)=0$

① $(4y-2)^2+9y^2-4(4y-2)-18y=12$

$16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y=12$

$25y^2-50y=0$

$y^2-2y=0$

$y(y-2)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right.$

ОДЗ $x\geq 2y$

② $(y+1)^2+9y^2-4(y+1)-18y=12$

$y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y=12$

$10y^2-20y=15$

$2y^2-4y=3$

$2y^2-4y-3=0$

$D=16+24=40$

$y=\frac{4\pm2\sqrt{10}}{4}=\left\{\frac{2+\sqrt{10}}{2};\frac{2-\sqrt{10}}{2}\right\}$

$x=-2$ $y=0$ (X)

$x=3$ $y=2$ (X)

$x=?$ $y=0$

$x$ $?$ $y=2$

ПОДСТАВЬ ВСЕ 4

$f'(x_0)-f'(x_0)$

$f'(x_0)=0$

$x=2(2-\sqrt{10})-2=2-2\sqrt{10}$ $y=\frac{2-\sqrt{10}}{2}$ (X) не одз

$x=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$

в

МФТИ

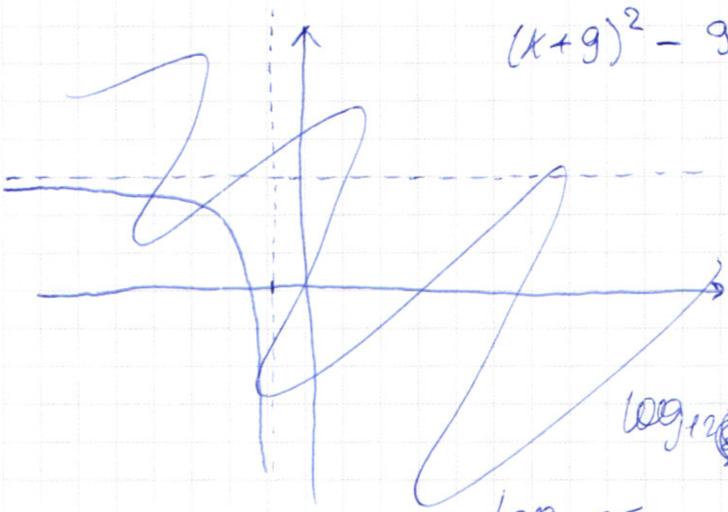
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$(x+9)^2-9^2$

$t^{a} \quad t^{k(a-1)}$

$3-\frac{1}{4} \le -\frac{11}{4}a+b \le 5$

$12-1 \le -11a+4b \le 20$

$11 \le -11a+4b \le 20 \quad t^k(t^{ak-k}-1)$

$\log_{12} \frac{13}{2} \quad a(-2)$

$t^{ak}+t-t^k$

$1-\log_{12}5=$

$-\frac{3}{4}a+b\le 1$

$3-\frac{1}{4} \le a\left(-\frac{11}{4}\right)+b \le 5$

$a\left(-\frac{3}{4}\right)+b \le 1$

$-3a+4b\le 1$

$4b\le 3a+1$

$11\le -11a+4b$

$a\left(-\frac{3}{4}\right)+b=1$

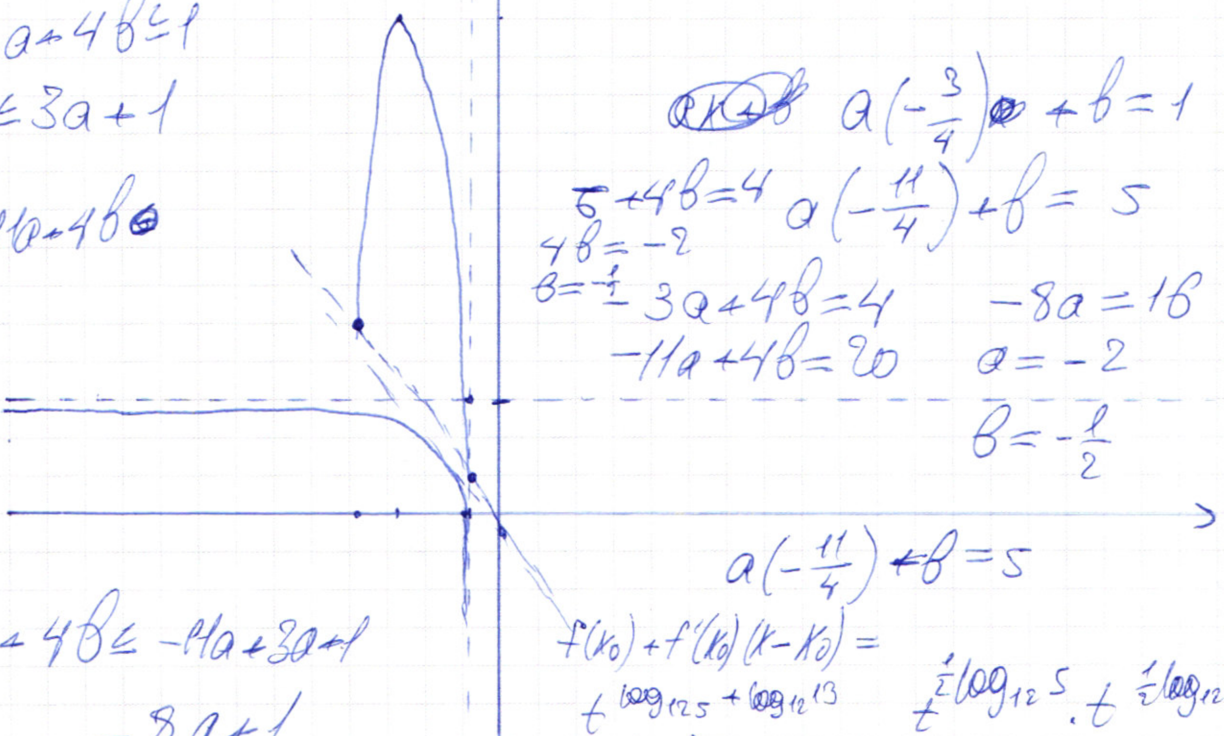
$6+4b=4 \quad a\left(-\frac{11}{4}\right)+b=5$

$4b=-2$

$b=-\frac{1}{2} \quad -3a+4b=4 \quad -8a=16$

$-11a+4b=20 \quad a=-2$

$b=-\frac{1}{2}$



$a\left(-\frac{11}{4}\right)+b=5$

$-11a+4b\le -11a+3a+1$

$-8a+1$

$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=$

$t^{\log_{12}5+\log_{12}13} \quad t^{\frac{1}{2}\log_{12}5}\cdot t^{\frac{1}{2}\log_{12}13}$

$\log_{12}(5+13)$

$10\le -8a \quad 8a\ge 10 \quad a\le \frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

$\log_{12}(5^2+13^2)=2$

$2\log_{12}5 = \log_{12}25+144$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x$

$f(\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 16, 12, 24, 6, 18, \}) = 0$

2

3 $\sin^2(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{5} = \sin^2 2\beta$

4

5 $\cancel{\sin^2(2\alpha}$

6

7 $(\sin(2\alpha+2\beta) - \sin(2\beta) =$

8

9

10 $\log\left(t\left(t^{\log_{12}5-1}+1\right)\right) \geq \log_{12}13 \cdot \log t$

11

12

13

14 $\log t + \log(\ldots) \geq \log_{12}13 \cdot \log t$

15

16 $\log(\ldots) \geq \log t(\log_{12}13 - 1)$

$\cancel{\frac{x^a}{x^b} = \frac{1}{x^b}}$

$x^a \cancel{+} x^{-b} = 1$

$\log_{12}5 \cdot t^\alpha - \log_{12}13 \cdot t^\beta = 0$

$t^{\log_{12}5} \cancel{+} t \geq t^{\log_{12}13}$

$\log_{12}5 \cdot t^\alpha = \log_{12}13\, t^\beta$

$\frac{t^\alpha}{t^\beta} = \frac{\log_{12}13}{\log_{12}5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

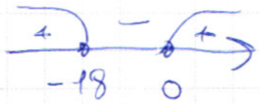
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x>0$ (ОДЗ)



$\left[x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)\right]$

$x^2+18x=t,\ t>0$

$5^{\log_{12}t} = 5^{\log_5 \log_{5}12\, t} = 5^{\frac{1}{\log_5 12}\cdot\log_5 t} = t^{\log_{12}5}$

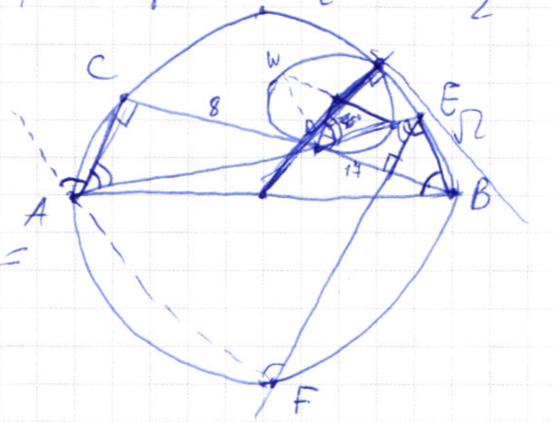
$t^{\log_{12}5} + t - t^{\log_{12}13} \geq 0$

$\cancel{x^2-4xy}$

$-8\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)^2+30\cdot\frac{11}{4}-17=-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-17=$

$$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0 \\ x^2+9y^2-4x-18y-12=0 \end{cases}$$

$=\frac{44}{2}-17=$



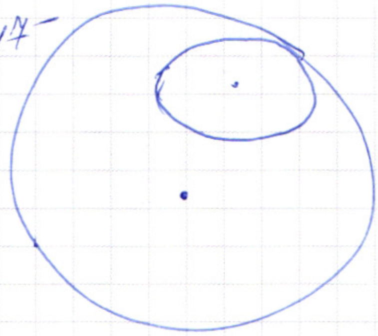

5

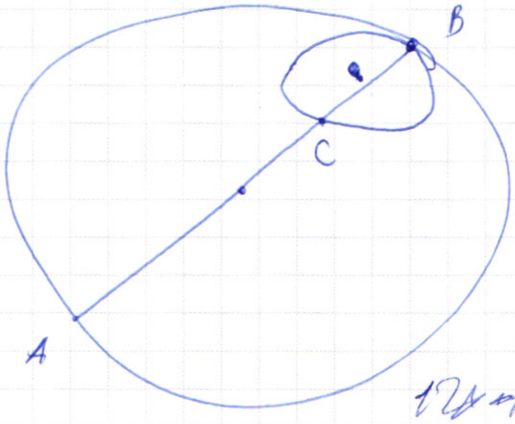
$-8\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2-30\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-17=$

$=-8\cdot\frac{9}{16}+30\cdot\frac{3}{4}-17=$

$=-\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-17=$

$=\frac{36}{2}-17=1$






$\frac{12x+9+2}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}$

$12x+11=0$

$x=-\frac{11}{12}$

$-\frac{22}{8}$

$-(8x^2+30x+17)$

$\frac{1}{4}$ 3,5

$-\frac{b}{2a}=-\frac{30}{16}=-\frac{15}{8}$

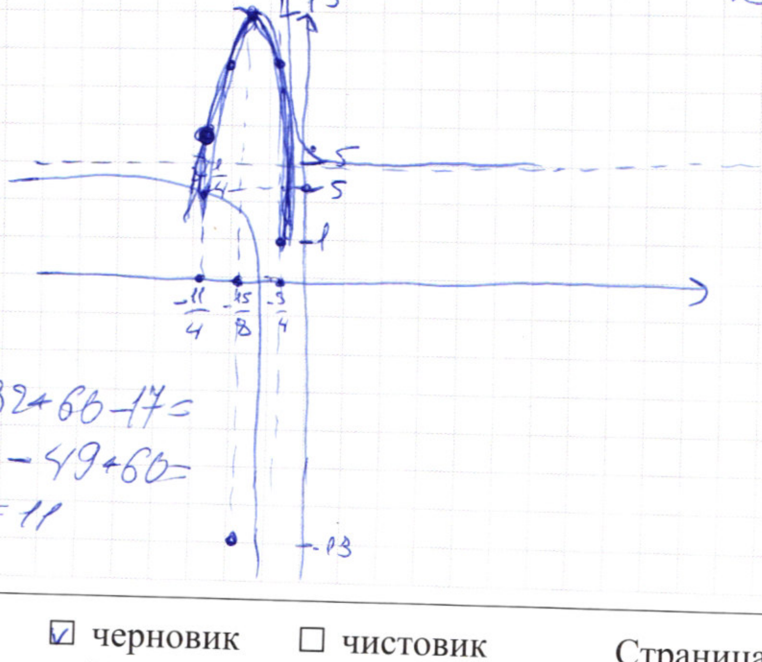
$3+\frac{2}{-11+3}=$

$c-\frac{b^2}{4a}=-17+\frac{900}{32}\approx 17-30=$

$=-13$

$=3+\frac{2}{-8}=$

$=3-\frac{1}{4}$




$-2$

$=-32+60-17=$

$=-49+60=$

$-8\cdot4+60-17=$ $=11$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$ , $x\geq 2y$

$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2+x+2y=2 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ $\Big|\cdot 9$, $\cdot 4$

$9x^2-45xy+36y^2+9x+18y=18$

$4x^2+36y^2-16x-72y=48$

$5x^2-45xy+25x+90y=-30$

$x^2-9xy+5x+18y=-6$

$x^2+x(5-9y)+(18y+6)=0$

$D=81y^2-90y+25-$
$-72y-24=$

$=81y^2-162$

$2\cdot 81$

$5y^2+5xy-5x-20y=10$

$y^2+xy-x-4y-2=0$

$y^2+y(x-4)-(x+2)=0$

$D=x^2-8x+16+4x+8=x^2-4x+24$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

$6x^2-30xy+24y^2+6x+12y=12$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$5x^2+15y^2-30xy+10x+30y=0$

$x^2+3y^2-6xy+2x+6y=0$

$x^2+x(2-6y)+(3y^2+6y)=0$

$D=36y^2-24y+4-12y^2-24y=$

$=24y^2-48y+4=4(6y^2-12y+1)$

$t^{\log_{t}^{\log_{t}12}(5)}$

$t^{\left(\frac{1}{\log_t 12}\right)\log_t 5}$

$5$

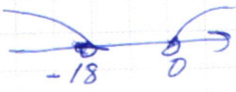
$\log_{12}5+\log_{12}x=\log$

$5^{\log_{5^{\log_5 12}}(t)}=5^{\left(\frac{1}{\log_5 12}\cdot\log_5(t)\right)}=t^{\frac{1}{\log_5 12}}=t^{\log_{12}5}$

$t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12}-t^{\log_{12}13}\geq 0$ $\quad t^{\log}$

$x^2+18x=x(x+18)$

$t^{\log_{12}5}\left(1+t^{\log_{12}\frac{12}{5}}\right.$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$$

$$x^2+18x=t$$

$$\frac{1}{\log_5 12}$$

$$5^{\log_{12} t}+t\geq t^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_5 \log_5 t} = 5^{\frac{1}{\log_5 12}} \left(5^{\log_5 t}\right)^{\frac{1}{\log_5 12}} = t^{\frac{1}{\log_5 12}}$$

$$t^{\frac{1}{\log_5 12}=a}+t-t^{\log_{12}13=b}\geq 0$$

$$\frac{1}{\log_{13}12}=b$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$t^a+t-t^b\geq 0$$

$$t^{a-1}-t^{b-1}+1$$

$$t(t^{a-1}-t^{b-1}+1)\geq 0$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\frac{\log_{12}13}{\log_{12}5}$$

$$f(1\cdot p)=f(1)+f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$f(p)=f(1)+f(p),\ f(1)=0$$

$$2f\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2f\left(\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{\sqrt2}\right)=$$

$$=4f\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)$$

$$f(\cancel{x})\ \ x=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\ldots$$

$$f(x)=f(p_1^{\alpha_1})+f(p_2^{\alpha_2})+\ldots=$$

$$=f(p_1)\cdot\alpha_1+f(p_2)\cdot\alpha_2+\ldots=$$

$$=\left[\frac{p_1}{4}\right]\cdot\alpha_1+\left[\frac{p_2}{4}\right]\cdot\alpha_2+\ldots$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(x) = f(2 \cdot \frac{x}{2}) = \underset{0}{f(2)} + f(\frac{x}{2})$ $\quad f(x) = f(8) + \underset{6(x)}{f(\frac{x}{8})}$

$f(x) = f(\frac{x}{2}) = f(\frac{x}{4})$ $\quad f(8) = 0$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(\frac{1}{N})$, $f(\frac{1}{2}) + f(2) = f(1)$ $\quad f(p^3) = f(p^2) + f(p) = 3f(p)$

$\underset{0}{f(\frac{1}{2})} + \underset{0}{f(2)} = \underset{0}{f(1)}$ $\quad f(x) < f(y)$

$f(\frac{1}{N}) + f(N) = 0$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 |
| $[\frac{p}{4}]$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 |

$x = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot \ldots$ $\quad x^{a-b} > 1$

$f(x) = [\frac{2}{4}]\alpha_1 + [\frac{3}{4}]\alpha_2 + \ldots =$ $\quad x^b(x^{a-b} - 1)$

$= \alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5 + 3\alpha_6 + 4\alpha_7 + 4\alpha_8 + 5\alpha_9$

$\beta_3 + \beta_4 + 2\beta_5 + 3\beta_6 + 4\beta_7 + 4\beta_8 + 5\beta_9$

$f(x) < f(y)$ $\quad x = 1$ $\quad y$

$x = 2$

$x^a - x^b = x^a(x^{b-a} - 1)$

$-x^{b-a} > 0$

$t^{\log_{12} 13}$ $\quad t^{\log_t \log_t 12} 13 = \frac{1}{13^{\log_t 12}}$

$t^{\log_{12} 5} + t - t^{\log_{12} 13} \geq 0$

$\log_t x(a-b) > 0$

$\log(\ldots) \geq \log_{12} 13 \cdot \log t \; (a-b)(x-0)$ $\quad x(a-b)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2-4x+9y^2-18y=12 \end{cases}, \quad x-2y\geq 0$$

$$(x-2)^2+(3y-3)^2-4-9=12$$

$$(x-2)^2+(3y-3)^2=25=5^2$$

$$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$$

$$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2+x+2y=2 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$5y^2+5xy-5x-20y=10$$

$$\cancel{5y^2+y(5x)} \quad 5y^2+y(5x-20)+(-5x-10)=0$$

$$D=25x^2-200x+400+100x+200=$$

$$=25x^2-100x+600=25(x^2-4x+24)$$

$$5^{\log_{12}t} \geq t^{\log_{12}13}-t$$

$$\geq t\left(t^{\log_{12}13-1}-1\right)$$

$$\cancel{\log_{12}t \geq \log_{12}t+\log_{12}\left(t^{\alpha-1}-1\right)}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=-\frac{4}{5} \end{cases} \quad 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{4}{5}$$

$$-\frac{2}{5\cos(2\beta)}=-\frac{1}{\sqrt5} \qquad \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{5\cos(2\beta)}$$

$$5\cos(2\beta)=2\sqrt5$$

$$\cos(2\beta)=\frac{2}{\sqrt5}, \quad \sin(2\beta)=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\pm\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha)=\frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin(2\alpha)\pm\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos(2\alpha)$$

$$2\sin(2\alpha)\pm\cos(2\alpha)=-1$$

$$2\alpha+2\beta=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k=\arcsin(\sin(2\beta))=2\beta$$

$2\alpha$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\beta + 2\sin\beta \cdot \cos\beta \cdot \cos 2\alpha$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$ $\quad$ $\cancel{tg\alpha} \cancel{tg\beta}$ $tg\alpha + ctg\alpha =$

$\cancel{\cos 2\beta}$ $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{10\cos 2\beta}$ $\quad$ $tg\alpha + ctg\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sin 2\alpha}$

$-\frac{4}{10\cos^2 \beta} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad$ $\cos(2\beta) = \frac{4\sqrt{5}}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$1 - 2\sin^2\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}$ $\quad$ $\sin 2\alpha = \sqrt{1-\cos^2(2\alpha)} = \sqrt{1-\frac{4}{5}} =$

$= \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}$

$\sin(2\alpha) + \frac{1}{2}\cdot\cos(2\alpha) = -\frac{1}{2}$

$2\alpha = arcctg\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k$ $\quad$ $\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{4}{\sqrt{5}}}$ $\sin$

$\alpha = \frac{arcctg\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{\pi}{2}k$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$tg\beta$

$2\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha) = -1$

$\cancel{\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha) =}$

$2x + \sqrt{1-x^2} = -1$ $\quad$ $\sin 2\alpha = 0$ $\quad$ $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sqrt{1-x^2} = -1 - 2x$ $\quad$ $2\alpha = \pi k$ $\quad$ $2\alpha = \arcsin\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\pi k$

$1 - x^2 = 4x^2 + 4x + 1$ $\quad$ $\alpha = \frac{\pi}{2}k$

$5x^2 + 4x = 0$

$x(5x+4) = 0$ $\quad$ $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{4}{5} \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)