МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = \frac{-2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = \frac{-8}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

1) $\cos(2\alpha+2\beta) = \sqrt{1-\left(\frac{-1}{\sqrt{17}}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

$0 = \cos(2\alpha+2\beta) - \cos 2\beta = -2\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+2\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0\\ \sin(\alpha+2\beta)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = 0\\ \sin\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\cos\alpha\cdot\sin 2\beta = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = 0\\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{17}}{4}\sin 2\beta\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = 0\\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\pm 1}{4}\end{array}\right.$

2) $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{-4}{\sqrt{17}}$

$\cos(2\alpha+2\beta)+\cos 2\beta = 2\cos(\alpha+2\beta)\cdot\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 0\\ \cos(\alpha+2\beta)=0\end{array}\right.$

при $\cos\alpha = 0$ $\operatorname{tg}\alpha$ не определен $\Rightarrow$ $\cos(\alpha+2\beta)=0 \Leftrightarrow \cos\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = \sin\alpha\cdot\sin 2\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}\sin 2\beta} = \pm 4$. По условию кол-во значений $\operatorname{tg}\alpha$ не менее 3, значит, все случаи могут быть.

Ответ: $0, \pm\frac{1}{4}, \pm 4$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

3.

ОДЗ: $x^2+6x>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$.

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$, обозначим $y=x^2+6x$, $y>0$, имеем:

$3^{\log_4 y}+y \geq y^{\log_4 5}$

Обозначим $y=4^a$, $a\in\mathbb{R}$, можно сделать, т.к. $y>0$. Тогда:

$3^a+4^a \geq 5^a=(5^2)^{\frac{a}{2}}=(3^2+4^2)^{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow 9^{\frac{a}{2}}+16^{\frac{a}{2}} \geq (9+16)^{\frac{a}{2}}$, это неравенство, как известно (можно его доказать, например, с помощью обобщенного бинома Ньютона для $a\in\mathbb{R}$) выполняется при $\frac{a}{2}\leq 1$ и не выполняется при $\frac{a}{2}<1 \Rightarrow a\in(-\infty;1] \Rightarrow y\in(0;4] \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+6x\in(0;4] \Rightarrow x\in[-3-\sqrt{13};-6)\cup(0;-3+\sqrt{13}]$.

Ответ: ~~$x\in$~~

2. $\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{(x-1)(3y-2)}=3y-2x\\ (x-1)^2+\left(\frac{1}{3}(3y-2)\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2\end{cases}$

$\begin{cases}a=x-1\\ b=3y-2\end{cases}$ Тогда: $\begin{cases}\sqrt{ab}=b-2a\\ a^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4a^2+b^2-5ab=0\\ 9a^2+b^2-5^2=0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5a^2+5ab-5^2=0 \Rightarrow a^2+ab=5 \Rightarrow b=\frac{5-a^2}{a} \Rightarrow 4a^2+\left(\frac{5-a^2}{a}\right)^2-25+5a^2=0$

~~$9a^4$~~ $10a^4-35a^2+25=0 \Rightarrow 2a^4-7a^2+5=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a^2=1\\ a^2=\frac{+5}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=0\\ x=\frac{7}{2}\\ x=\frac{-3}{2}\end{array}\right.$

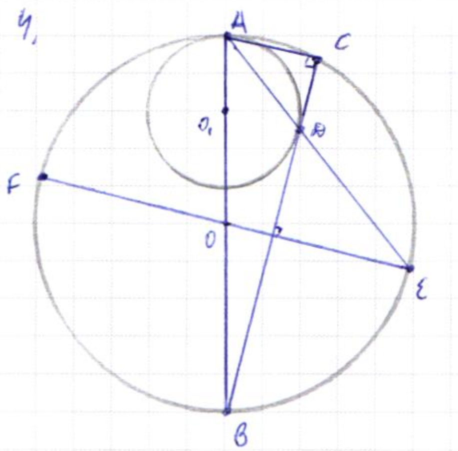
но $ab>0 \Rightarrow 5-a^2\geq 0 \Leftrightarrow (5-a)(5+a)\geq 0 \Rightarrow |a|\leq 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ все значения подходят, $\Rightarrow$ ~~$3y-2\geq 2$~~ 1) $x=2$, $y=2$; 2) $x=0$; $y=2$,

Ответ: 3) $x=\frac{7}{2}$, $y=\frac{4}{5}$, 4) $x=\frac{-3}{2}$, $y=\frac{4}{5}$.

Ответ: $(2,2)$, $(0,2)$, $\left(\frac{7}{2};\frac{4}{5}\right)$, $\left(\frac{-3}{2},\frac{4}{5}\right)$.

4.



$CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$

Решение: По лемме Архимеда AE - биссектриса $\angle BDC$. $\Rightarrow E$ - середина $\cup CEB \Rightarrow EF \ni O$ - ц-р Ω.

O_1 - ц-р ω. $AC \perp BC$, т.к. AB - диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC \parallel EF \Rightarrow ACEF$ - вписанная трапеция, т.к. $AC < EF$.

$\Rightarrow$ ~~это~~ равнобокая трапеция.

В $\triangle BAC$ BD - биссектриса $\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} = \frac{13}{5} \Rightarrow 13AC = 5AB$.

$BC = \frac{18}{2} = 9$. Из т. Пифагора $(\triangle ABC)$: $169AC^2 = 25(81 + AC^2) \Rightarrow AC^2 \cdot 144 = 1856 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{AC = \sqrt{\frac{64}{6}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$. $\cancel{AC = \sqrt{\frac{64 \cdot 29}{144}} = \frac{4\sqrt{58}}{\sqrt{97}}}$, $\cancel{AB = \frac{13}{5} \cdot \frac{4\sqrt{58}}{\sqrt{97}} = \frac{52}{5}\sqrt{\frac{58}{97}}}$.

$AC = \frac{2}{3}\sqrt{29} \Rightarrow AB = \frac{13\sqrt{5}}{3}$

R, r - радиусы Ω и ω соотв.

$R = \frac{1}{2}AB = \cancel{\frac{26}{5}\sqrt{\frac{58}{97}}}$, $\frac{13\sqrt{5}}{6}$. BD - касательная к $\omega \Rightarrow O_1D \perp BC \Rightarrow O_1D \parallel AC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow r = \frac{13}{18}AC = \cancel{\frac{26\sqrt{58}}{9\sqrt{97}}}$, $\frac{13}{9}\sqrt{29}$

$\angle AFE = \angle CEF = 90° - \angle BCE = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$.

$\sin\angle AFE = \sin(90° - \frac{1}{2}\angle BAC) = \cos(\frac{1}{2}\angle BAC) = \sqrt{\frac{1 + \cos\angle BAC}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \sin^2\angle BAC}}}{2} =$

$= \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{BC}{2R}\right)^2}}{2}} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin \cancel{\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{81 \cdot 25 \cdot 97}{4 \cdot 52^2 \cdot 58}}}{2}}} \arcsin\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{27}{13\sqrt{5}}\right)^2}}{2}} = \cancel{\arcsin}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}BC \cdot FE = \frac{1}{4}BC \cdot 2R = \frac{1}{2}BC \cdot R = \frac{1}{4}AB \cdot BC = \cancel{\frac{13\sqrt{58} \cdot 13}{5\sqrt{97}}} = \cancel{\frac{117\sqrt{58}}{5\sqrt{97}}}$.

$= \frac{1}{4} \cdot 9 \cdot \frac{13\sqrt{5}}{3} = \frac{39\sqrt{5}}{4}$.

$\angle AFE = \arcsin\sqrt{\frac{1 + \frac{2\sqrt{29}}{13\sqrt{5}}}{2}} = \arcsin\sqrt{\frac{6{,}5\sqrt{5} + 2\sqrt{29}}{13\sqrt{5}}}$.

Ответ: $r = \frac{13\sqrt{29}}{9}$, $R = \frac{13\sqrt{5}}{6}$, $\angle AFE = \arcsin\sqrt{\frac{6{,}5\sqrt{5} + 2\sqrt{29}}{13\sqrt{5}}}$, $S_{AEF} = \frac{39\sqrt{5}}{4}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. Решение:

$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ - разложение n на простые множители $p_i \in \mathbb{P}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$. ~~Тогда: $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k})$~~ Если $a, b, c \in \mathbb{Q}$ и $a, b, c > 0$, то $f(a\cdot b\cdot c) = f(a\cdot b) + f(c) = f(a) + f(b) + f(c)$, откуда имеем:

$f(n) = \alpha_1\cdot f(p_1) + \ldots + \alpha_k\cdot f(p_k) = \alpha_1\cdot\left[\frac{p_1}{4}\right] + \ldots + \alpha_k\cdot\left[\frac{p_k}{4}\right]$.

На множестве $[3; 27]$ найдем значения $f(n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$:

n	$f(n)$
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	4
18	0
19	4
20	1
21	1
22	2
23	5
24	0
25	2
26	3
27	0

Мы пользовались тем, что $f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(5)=1$, $f(7)=1$, $f(11)=2$, $f(13)=3$, $f(17)=4$, $f(19)=4$, $f(23)=5$ из $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$.

Тогда $f(n) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Значит, нер-ву $f(x) < f(y)$ удовлетворяют (x, y) такие, что:

1) $f(x)=0$, $f(y)>0$. Всего таких: $10\cdot 15 = 150$ пар.

2) $f(x)=1$, $f(y)>1$. Всего таких: $7\cdot 8 = 56$ пар.

3) $f(x)=2$, $f(y)>2$. Всего таких: $3\cdot 5 = 15$ пар.

4) $f(x)=3$, $f(y)>3$. Всего таких: $2\cdot 3 = 6$ пар.

5) $f(x)=4$, $f(y)>4$. Всего таких: $2\cdot 1 = 2$ пары.

6) $f(x)>4$, $f(y)>f(x)$. Всего таких 0 пар.

Всего: $150+56+15+6+2 = 150+79 = 229$.

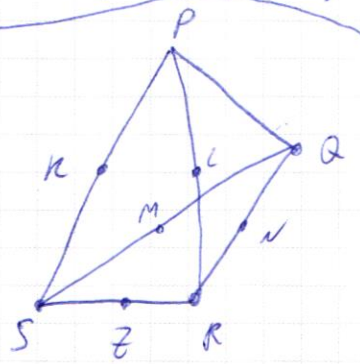
Ответ: 229.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. $KL \parallel MN$, $KM \parallel LN \Rightarrow N \in (KLM) \Rightarrow KLMN$ – параллелограмм $\Rightarrow$

$\Rightarrow KLMN$ – прямоугольник $\Rightarrow PQ \perp SR$,

$KL \parallel SR$, $KM \parallel PQ$, $MN \parallel SR$, $LN \parallel PQ$.



K, L, M, N, Z – середины ребер, как на рис.

PKZL – вписанный, но $\angle KZL = \angle KPL \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle SPR = 90° = \angle KZL$. $\begin{cases} KZ \parallel PR \\ LZ \parallel PS \end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{-1}{\sqrt{17}}$; $\cos(2\alpha+2\beta)=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\frac{-8}{17}=\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta+\sin 2\alpha$

$=\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)+\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\beta)=\frac{-8}{17}$

~~1) $\cos(2\alpha+2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}}$~~

~~$\frac{-8}{17}=\frac{-1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta+\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\beta$~~

~~$-8\sqrt{17}=4\sin 2\beta-\cos 2\beta=8\sin\beta\cdot\cos\beta-(\cos^2\beta-\sin^2\alpha)$~~

~~$\sin^2\beta+8\cos$~~

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=\frac{-2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta=\frac{-8}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$

1) $\cos(2\alpha+2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos(2\alpha+2\beta)-\cos 2\beta=-2\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+2\beta)=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0\\ \sin(\alpha+2\beta)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}tg\,\alpha=0\\ \sin\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\underset{\neq 0}{\cos\alpha}\cdot\sin 2\beta=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}tg\,\alpha=0\\ tg\,\alpha=\frac{-\sqrt{17}}{4}\underset{\pm\frac{1}{\sqrt{17}}}{\sin 2\beta}=\frac{\pm 1}{4}\end{array}\right.$

2) $\cos(2\alpha+2\beta)=\frac{-4}{\sqrt{17}}$

$\cos(\quad)+\cos 2\beta=2\cos(\alpha+2\beta)\cdot\cos\alpha=0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0\\ \cos(\alpha+2\beta)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos(\alpha+2\beta)=0\\ \cos\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}-\sin\alpha\cdot\sin 2\beta=0\end{array}\right.\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}\cdot\sin 2\beta}=\pm 4$

$\sin 2\beta=\frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\sin 4\beta=\frac{-8}{17}$

$2\cos 2\beta=\frac{8}{\sqrt{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$x^2+6x = y$

$3^{\log_4 y} + y \geq |y|^{\log_4 5}$

$y \geq 0$

$3^{\log_4 y} + y \geq y^{\log_4 5}$.

$y = 4^a$

$3^a + 4^a \geq \left(4^{\log_4 5}\right)^a = 5^a$

$3^a + 4^a \geq 5^a = (3^2+4^2)^{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow (3^a+4^a)^{\frac{2}{a}} \geq (3^2+4^2)$

$3^t + 4^t - 5^t \geq 0$.

$t(3^{t-1} + 4^{t-1} - 5^{t-1}) \geq 0$

$3^{t-1} + 4^{t-1} - 5^{t-1} \geq 0$

...

$3^{\{t\}} + 4^{\{t\}} - 5^{\{t\}} \geq 0$

$3^\alpha + 4^\alpha \geq 5^\alpha$

$\sqrt{3}^{>3} + 2 \vee \sqrt{5}$

$\geq 2 \cdot 3^a \geq 5^a$

$a \vee \log_5 2$

$2 \geq \left(\frac{5}{3}\right)^a \Leftrightarrow$

$<$

$t<1 \; >0$, $t=2 \; =0$, $t>0 \; <0$

$\log_5(3^t+4^t)$ $\quad 3^{\frac{3}{2}} + 4^{\frac{3}{2}} = 8 + 3 \cdot 1{,}7 \overset{>}{\vee} 5 \cdot 2{,}2$

$\frac{D}{2} = 9+4 = 13$

$x = -3 \pm \sqrt{13}$

$\overset{>}{} 3^a + 4^a$ при $\frac{a}{2} > 1$ и $<$ при $\frac{a}{2} < 1$.

$(3^2+4^2)^{\frac{a}{2}} \vee 3^a + 4^a$ $\quad x^2+6x-4=0$

по обобщенному биному Ньютона для действ. a.

~~Ответ~~ $\Leftrightarrow a \in [0;2] \Leftrightarrow y \in [1;16]$ и

$x^2+6x = x(x+6) \in [1;16]$

$-6 \quad 0$

$\Leftrightarrow$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \overset{>}{\vee} \frac{1}{5}$

$\frac{7}{12} \vee \frac{1}{5}$ $\quad 35 \vee 12$

$2 + 3 \cdot 13 = 41$

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{1}{3}((3x-3)(3y-2))} = 3y - 2x$

$\sqrt{(x-1)(3y-2)} = 3y - 2x$

$2 - 3x^2$

$2(3y-2x)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \left(x - 1 + y - \frac{2}{3}\right)^2$

$7x^2 + 17y^2 - 10xy + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = 0$.

$21x^2 + 51y^2 - 30xy + 4x + 4y = 0$

$-(y+1)(y-7)$

$-3y^2+4y+7$

$\frac{D}{4} = 9 - 3y^2 + 12y + 12 = -9y^2 + 12y + 21$

$-1 \quad -3$

$3(x-1)^2 + 3y^2 - 4y - 7 = 0$

$(3y-2)^2 \quad 3y^2 - 2 \cdot 2y + \frac{4}{3} =$

$7 + \frac{4}{3} = \frac{25}{3}$

$(3y-2)^2 = 9y^2 + 4 - 12y$

$x=1$, $y = \frac{2}{3}$ $\quad \left(1; \frac{2}{3}\right)$

$3(x-1)^2 + \left(\sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{25}{3}$

$(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$81\cdot 9=729+4\cdot 29=845$ | 5, $169=13^2$, $13^2\cdot 5$

$f(x)=\ln x$

$f(abc)=f(ab)+f(c)=f(a+b+c)$

$f(p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n})=\alpha_1 f(p_1)+\ldots+\alpha_n f(p_n)=\alpha_1\cdot\left[\frac{p_1}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{p_n}{4}\right]\alpha_n$

$f(1)=0$

$f(\frac{x}{y}\cdot y)=f(x)=f(\frac{x}{y})+f(y)\Rightarrow f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y).$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 — p_i

0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5 — $\left[\frac{p_i}{4}\right]$

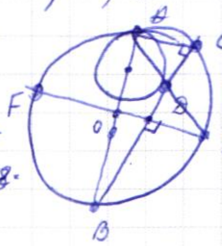
3, ..., 27   0, 0, 1

$29\cdot 64=116\ldots 1856$, $29\cdot 6=174$, $194:2=97$, $144=12^2=3^2\cdot 2^4$, $\frac{2^2\cdot 29}{9}$

$25\cdot 81$; $2025-169=1856$

$194=2\cdot 97$

$1856=2\cdot 928=4\cdot 464=8\cdot 232=16\cdot 116=32\cdot 58=64\cdot 29$



л. Архимеда

$CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$

$S_{DFE}=\frac{1}{2}BC\cdot 2R=BC\cdot R$

AD – бис.

$\frac{BD}{DC}=\frac{13}{5}=\frac{AB}{AC}$; $BC=9$.

$AB=81+\frac{4\cdot 29}{9}$

$BD\to 2$

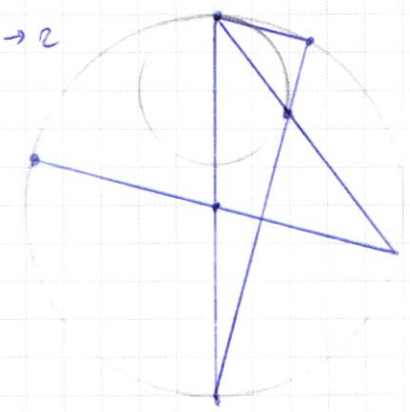
$13AC=5AB$ $169+25=194$

$169AC^2=25(81-AC^2)$

$194AC^2=1856=64\cdot 29$

$AC=\sqrt{\frac{64}{2\cdot 3}}=\sqrt{\frac{32}{3}}=\frac{4\sqrt2}{\sqrt3}$

$AB=\frac{13}{5}\cdot\frac{4\sqrt2}{\sqrt3}=\frac{52\sqrt2}{5\sqrt3}$



$\left(\frac{9}{2R}\right)^2$

$\frac{81\cdot 5^2\cdot 97}{2\cdot 5^2\cdot 58}$

$25AB^2=(81+AC^2)\cdot 13$

$\angle ECB=\angle EAB=\frac{1}{2}\angle BAC$

$90^\circ-\frac{1}{4}$ $\sin(90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC)=\cos(\frac{1}{2}\angle BAC)=\sqrt{\frac{1+\cos\angle BAC}{2}}$

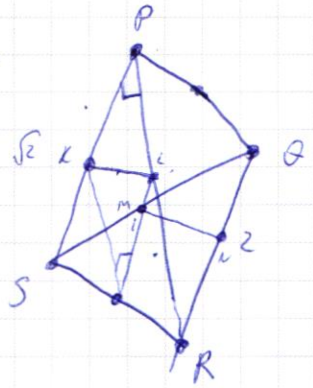
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

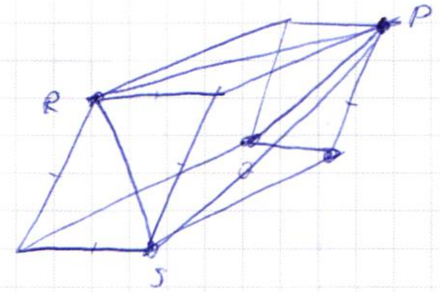
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\frac{BC}{2R} = \frac{S}{AB} = \frac{27}{13\sqrt{5}}$ $845 - 729$ $= \frac{\sqrt{\frac{4 \cdot 29}{13\sqrt{5}}+1}}{2}$

$27 \cdot 27 = 81 \cdot 9$

$\angle SPR = 90^\circ, \angle S$





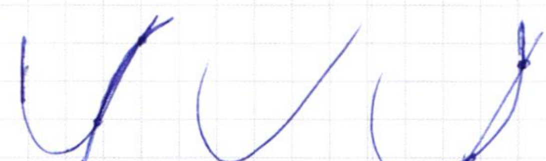
$KL \parallel MN$, $KM \parallel LN$

$N \in (KLM) \Rightarrow$ это пр-к. $\Rightarrow PQ \perp SR$.

$LN \perp SR$, $LN \perp KL$

$R = \frac{1}{2}r$

$\frac{4x-3-2ax^2-2bx+2ax+2b}{x-1} \geq 0$



~~$4-2a-2b$~~

$x-1>0$ при $x \in (1;3]$.

$8x^2 - 34x + 30 - ax - b \leq 0$

~~$D = 34^2$~~

$-2ax^2 + (4+2a-2b)x - 2b - 3 \geq 0$

$16 \cdot 15 = 4 \cdot 60 = 240$

$17 \cdot 17 = 119$ … 289; $289 - 240 = 49$

$\frac{D}{4} = (a+b+2)^2 + 4ab - 6a = (a-b)^2 - 10a - 4b \geq 0$

$4x-3$ $\quad 4x^2 - 17x + 15$ $\quad \frac{9}{4} - \frac{17 \cdot 3}{4} + 15 = 60$

~~$400 - 4 \cdot 15$~~ $(x-\frac{3}{4})$ $\quad 16 \cdot 15$

$D = 7^2$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{17+7}{8} = 3 \\ x = \frac{17-7}{8} = \frac{5}{4} \end{array}\right.$

$4(x-3)(x-\frac{5}{4})$

$3a^2+b^2 - (a^2+ab)^2 = 9a^2+b^2$

$ab = \frac{5}{a^2}$ $\quad \sqrt{5-a^2} = b$ $\quad \frac{12}{5}$ $\quad \frac{4}{5}$

$-2x-21-$ $\quad -2x-2+3y-28$

$b = 4$ $\quad \frac{5-\frac{5}{2}}{(\frac{5}{2})^2} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} = b$

$ab = 4a^2 + b^2 - 4ab$

$4a^2 + b^2 - 5ab = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)