МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ (1)

(2): $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$ (2)

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$ или $-\frac{2}{\sqrt5}$ (по осн. тр.)

1) $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

(1): $\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \,|\cdot\sqrt5$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha + 4\cos^2\alpha = 1$

$-\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha = 0 \;|:\cos^2\alpha \neq 0$ (по о.т.т.)

$-tg^2\alpha + 2tg\alpha + 3 = 0 \;|\cdot(-1)$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$D = 4+12 = 16 = 4^2$

$tg\alpha_{1,2} = \frac{2\pm4}{2}$ $\quad t_1 = 3$

$t_2 = -1$

2) $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha - 4\cos^2\alpha = -3$

$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0 \;|:\cos^2\alpha$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

$D = 4^2$

$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{6}$ $t_1 = -1$
$t_2 = \frac{1}{3}$

Всего получилось 3 знач. $(3; -1; \frac{1}{3})$, так как их ≥ 3 по усл., то они должны подх.

Ответ: $3; -1; \frac{1}{3}$

№ 6

Пусть $f_1(x) = \frac{16x - 16}{4x - 5}$; $f_2(x) = ax + b$,
$f_3(x) = -32x^2 + 36x - 3$

Рассмотрим $f_3(x)$: парабола с ветвями вниз ⇒
$x_в = \frac{36}{64}$. $\frac{1}{4} < \frac{36}{64}$ ⇒ в этой точке пар. возр.
$1 > \frac{36}{64}$ ⇒ в этой точке пар. убыв.

$f_3(\frac{1}{4}) = 4$ $f_3(1) = 1$

~~Получается $f_2(x) \leq 1$, тогда для всех других x из пр. неров. вып.~~

Рассмотрим $f_1'(x)$:

$\frac{16(4x-5) - 4(16x-16)}{(4x-5)^2} = \frac{-16}{(4x-5)^2} < 0$ ⇒

⇒ $f_1(x)$ всегда убыв.

$f_1(\frac{1}{4}) = 3$ $f_1(1) = 0$ ⇒ $f_2(x) \geq 0$

Вывод: $3 \leq f_2(x) \leq 4$ подх. пары

$\begin{cases} \cancel{f_2(\frac{1}{4}) \leq 4} \\ \cancel{f_2(\frac{1}{4}) \geq 3} \\ \cancel{f_2(1) \leq 1} \\ \cancel{f_2(1) \geq 0} \end{cases}$ $\begin{cases} f_2(\frac{1}{4}) \leq 4 \\ f_2(\frac{1}{4}) \geq 3 \\ f_2(1) \geq 0 \\ f_2(1) \leq 1 \end{cases}$

$f_2(1) = a + b \leq 4$
$f_2(\frac{1}{4}) = \frac{a}{4} + b$

$\begin{cases} \frac{1}{4}a + b \leq 4 \\ \frac{1}{4}a + b \geq 3 \\ a + b \leq 1 \\ a + b \geq 0 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} & (1) \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 & (2) \end{cases}$$

$(2): (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 0$

$(x-6)^2 \geq 0$

$(6y-3)^2 \geq 0$ | +

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 \geq 0$

равны нулю только когда $x = 6 \quad y = \frac{1}{2}$

Проверка в (1):

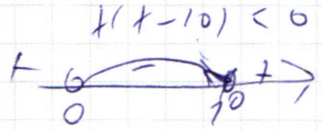
$0 = \sqrt{6 - 6 - 6 + 6} \quad 0 = 0$ правильно

Ответ: $x = 6, \ y = \frac{1}{2}$

№3

$10x - x^2 + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0 \qquad x^2 - 10x < 0 \qquad x(x-10) < 0$



$x \in (0, 10)$

$|x^2 - 10x| = |10x - x^2|$

Пусть $t = 10x - x^2$, но ОДЗ $t > 0$

$t + |t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

Т.к. $t > 0$, то $|t| = t$

$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$

$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t}$ — возр. фун-я, так как они обе показ. с осн > 1. $5^{\log_3 t}$ — возр. показ. осн > 1. => ~~графики выглядят примерно~~ так

Мы должны найти точку, когда они становятся равны и всё больше подх.

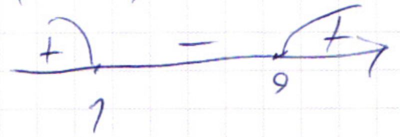
Заметим, что при $\log_3 t = 2$ $t = 9$ $3^2 + 4^2 = 5^2$, тогда $t \geq 9$ — подх. Также можно заметить, что при $t < 9$ правая фун-я больше, так что в силу монотон. после равенства в этой точке левая ~~час~~ фун-я всегда больше.

Обр. замена:

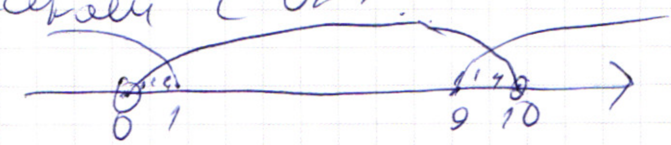
$10x - x^2 \geq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$(x - 9)(x - 1) \geq 0$



Пересекаем с ОДЗ:



Отв: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

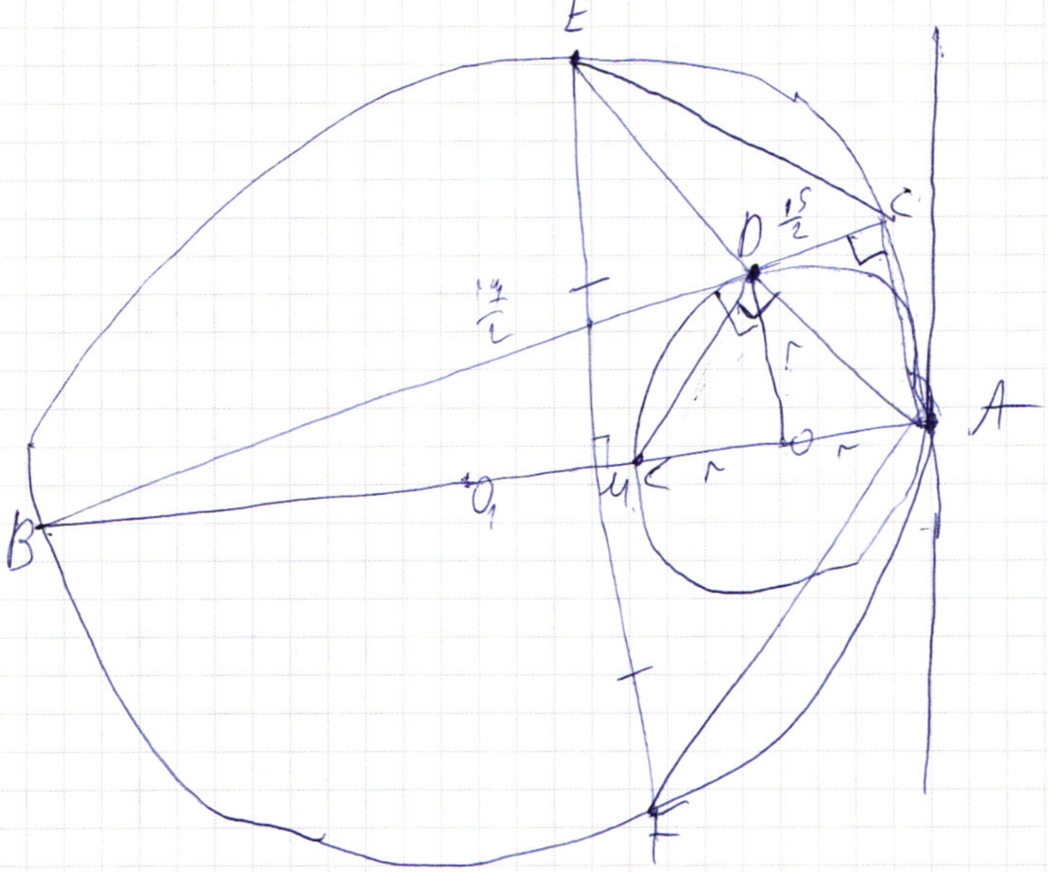
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Пусть O_1 и O – центры окр;

где $EF \cap BA = M$ $EM = MF$ ($\perp$ диам AB)

~~Пусть R-N~~ радиус $\Omega = R$, радиус $\omega = r$.

$BD^2 = BL \cdot (BL + AL)$ $BA \cap \omega = L$.

$\frac{289}{4} = (2R - 2r)(2R - 2r + 2r) = 4(R-r)R$

Проведём LD. $\angle LDA = 90^\circ$ (опир. на AL (диам))

Проведём $DO = r$. По т.К.П. ~~$BD^2 + DO^2 = BO^2$~~

~~$\frac{289}{4} - R\,r^2 = (2R - r)^2$~~

~~$\frac{289}{4} = 4R^2 - 4Rr$~~

$\frac{289}{4} = 4R(R - r)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Проведём EC и CA: $\angle BCA = 90°$ (опир. на AB диам(R))

$\begin{cases} OD \perp BC \\ AC \perp BC \end{cases} \Rightarrow OD \parallel AC \Rightarrow \triangle BDO \sim \triangle BCA$

$\frac{\cancel{C}}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{2R-r}{2R}$ $\quad \frac{17}{32} = \frac{2R-r}{2R}$

$34R = 64R - 32r$

$30R = 32r$

$R = \frac{32r}{30} = \frac{16r}{15}$

$\frac{28^2}{4} = 4(R-r)R$

$\frac{28^2}{4} = \frac{64r}{15} \cdot \left(\frac{16}{15}r - r\right)$

$\frac{28^2}{4} = \frac{64r}{15} \cdot \frac{r}{15}$

$\frac{28^2}{4} = \frac{64r^2}{15^2}$

$r^2 = \frac{17^2 \cdot 15^2}{8^2 \cdot 2^2}$

$r = \sqrt{\frac{17^2 \cdot 15^2}{8^2 \cdot 2^2}} = \frac{17 \cdot 15}{8 \cdot 2} = \frac{255}{16}$

$R = \frac{16}{15} \cdot \frac{255}{16} = \frac{51}{3} = 17$

Ответ: $R = 17$; $r = \frac{255}{16}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(a\cdot b) = f(a) + f(b)$

$f(0\cdot 0) = f(0) + f(0)$ $\quad f(0) = 0$ $\quad f(1\cdot 1)$ $f(1) = f(1) + f(1)$ $\quad f(1) = 0$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$ $\quad f(3) = 0$ $\quad f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$ $\quad f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$ $\quad f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$

$f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$ $\quad f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$ $\quad f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$

$f(2\cdot 2) = f(2) + f(2) = 0$ $\quad f(4\cdot 2) = f(4) + f(2) = 0$

$f(2\cdot 3) = f(2) + f(3) = 0$ $\quad f(3\cdot 3) = f(3) + f(3) = 0$

$f(2\cdot 5) = f(2) + f(5) = 1$ $\quad f(2\cdot 6) = f(2) + f(6) = 0$

$f(2\cdot 7) = f(2) + f(7) = 1$ $\quad f(3\cdot 5) = f(3) + f(5) = 1$

$f(8\cdot 2) = f(8) + f(2) = 0$ $\quad f(9\cdot 2) = f(9) + f(2) = 0$

$f(2\cdot 10) = f(2) + f(10) = 1$ $\quad f(3\cdot 7) = f(3) + f(7) = 1$

$f(11\cdot 2) = f(11) + f(2) = 2$ $\quad f(6\cdot 4) = f(6) + f(4) = 0$

$f(5\cdot 5) = f(5) + f(5) = 2$

$f\left(\frac{1}{b}\cdot b\right) = f\left(\frac{1}{b}\right) + f(b)$

$0 \quad f\left(\frac{1}{b}\right) = -f(b)$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right) = f(a) - f(b).$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

для $f(y) > f(x)$

для $f(x)$ мож. под. знач $0; 1$, ~~для $f(y)$ 0, 1, 2~~ $= 24$

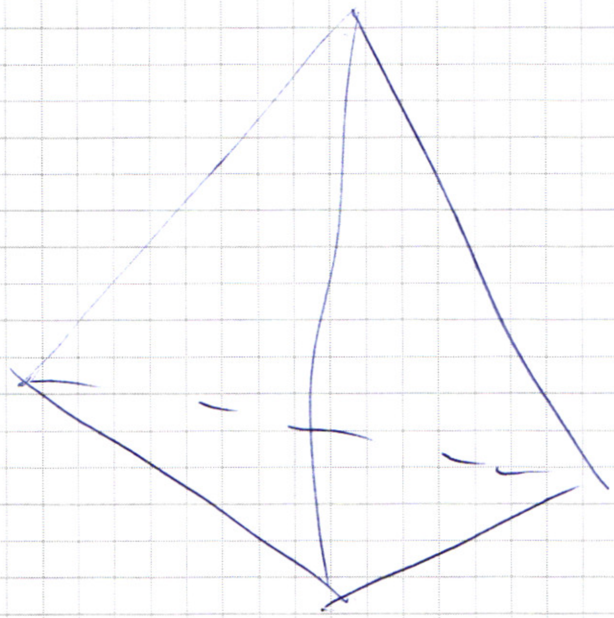
Если $f(x) = 0$ выбрать x: 10, b: 14 знач. $14\cdot 10 = 140$

Если $f(x) = 1$ выбрать x: 7, b: 7 знач. $7\cdot 7 = 49$

Складываем: ~~140+166~~ ~~308~~ $140 + 49 = 189$

Ответ: ~~308~~ 189

№4



☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-3x^2+36x-3 \quad -16t-16$

$4t-5$

11a10

$\frac{1}{4}a+b=4$

$a+b=1$

$\frac{1}{4}a-a=3$

$-\frac{3}{4}a=3$

$a=-4$

$b=5$

$f(1)=f(b)+f(\frac{1}{b})$

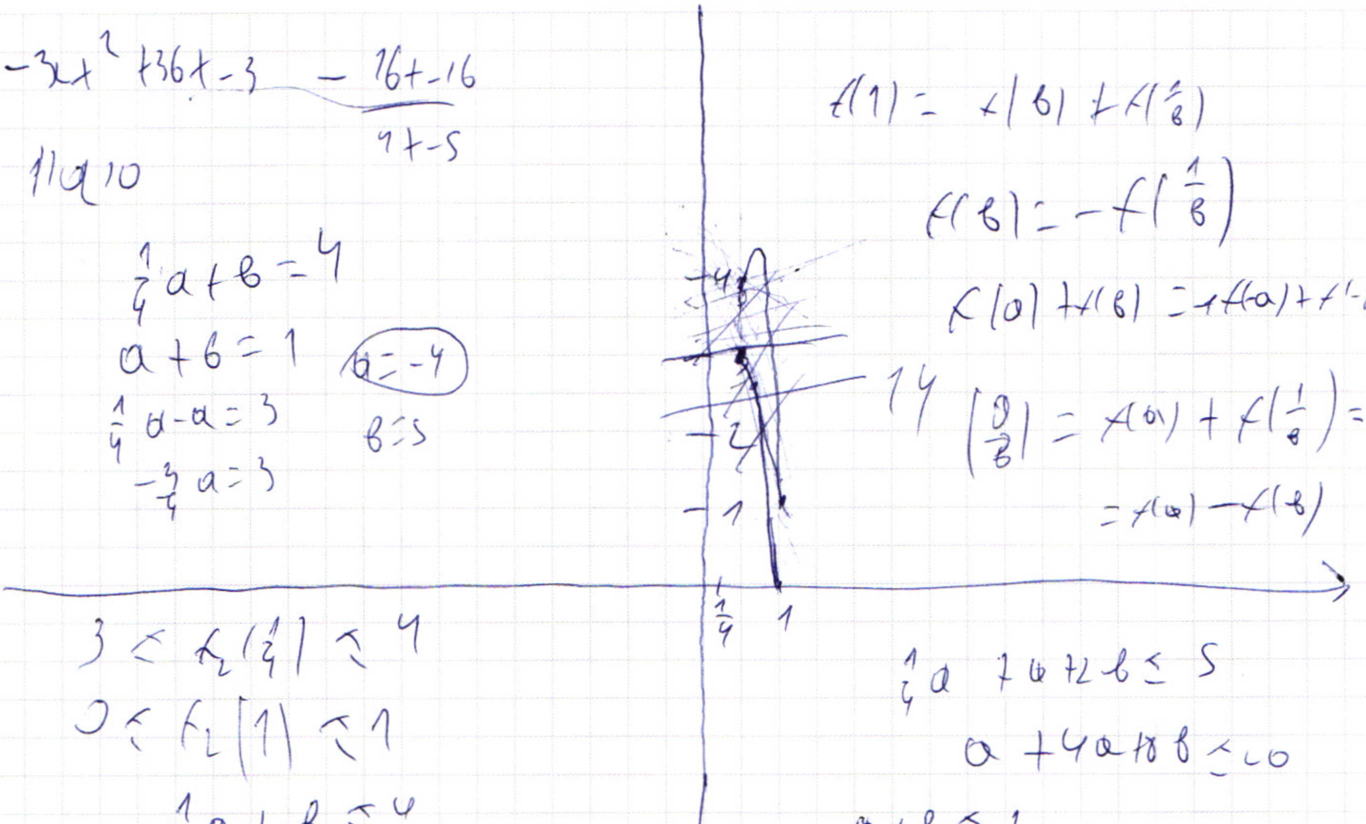
$f(b)=-f(\frac{1}{b})$

$f(a)+f(b)=f(a)+f(-b)$

14

$f(\frac{a}{b})=f(a)+f(\frac{1}{b})=$

$=f(a)-f(b)$



$3\le f_2(\frac{1}{4})\le 4$

$0\le f_2(1)\le 1$

$\frac{1}{4}a+b\le 4$

$\frac{1}{4}a+b\ge 3$

$\frac{1}{4}a+4+2b\le 5$

$a+4a+8b\le 20$

$a+b\le 1$

$a+b\ge 0$

$\frac{1}{4}x+y\le 4$

$\frac{1}{4}x+y\ge 3$

$x+y\ge 0$

$x+y\le 1$

~~$4y\le 4-x$~~

$y\le 4-\frac{1}{4}x$

$y\ge 3-\frac{1}{4}x$

$y\ge -x$

$y\le 1-x$

$b\ge 3-\frac{1}{4}a$

$a\ge -b$

$b\le 4-\frac{1}{4}a$

$a\le 1-b$

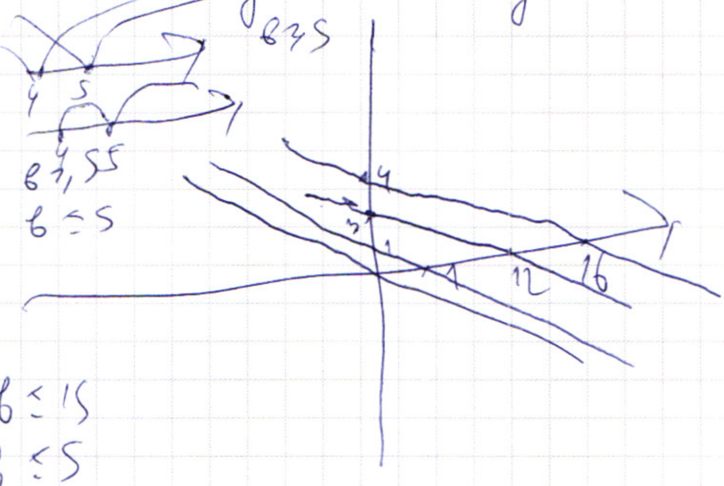
$3-\frac{1}{4}a\le b\le 4-\frac{1}{4}a$

$a\le 16-4b$

$a\ge 12-4b$

$4-\frac{1}{4}a\ge 3-\frac{1}{4}a$

$b\ge 5$



$-b\ge 12-4b \qquad 12-4b\ge -b \quad b\ge 5$

$b\le 5$

$3b\ge 12 \qquad 3b\le 12$

$b\ge 4 \qquad b\le 4$

$1-b\le 16-4b \qquad 3b\le 15$

$b\le 5$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f(xy) = f(x) + f(y)$

$f(0) = 0$

$f(x) = f(x)$

$f(y) = f$

$f(2x) = f(x) + f(2)$

$f(2) = f(1) + f(2)$

$f(x) = f(x)$

$f(2x) = f(x) + f(1) + f(2)$

$f(2x) = f(x) + f(2)$

$f(3x) = f(3) + f(x)$

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(3) = f(3) + f(1)$

$f(2) = 0$

$f(3x) = f(3) + f(1)$

$f(5) = 1$

$f(11) = 2$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(2x) = f(2) + f(2x)$

$\left(\frac{1}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y^2}\right)$

$f(5x) = f(5) + f(x)$

$f(5x) = f(x) + 1$

$f\left(\frac{1}{y^2}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y^3}\right)$

$f(5x) = f(x) +$

$f(11x) = f(11x) = f(x) + 2$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y) + f(y) + f\left(\frac{1}{y^3}\right)$

$f(x) = 2 - f(11x)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = 2f(y) + f\left(\frac{1}{y^3}\right)$

$f(x) = 1 - f(5x)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$2 - f(11x) = 1 - f(5x)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y^2) + f(y)$

$f(5x) = f(11x) - 1$

$f(5x) = f(11x) - f(5x)$

$f(5x) = \frac{f(11x)}{2}$

$2, 2x$

$f(x) = \frac{f\left(\frac{11x}{5}\right)}{2}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

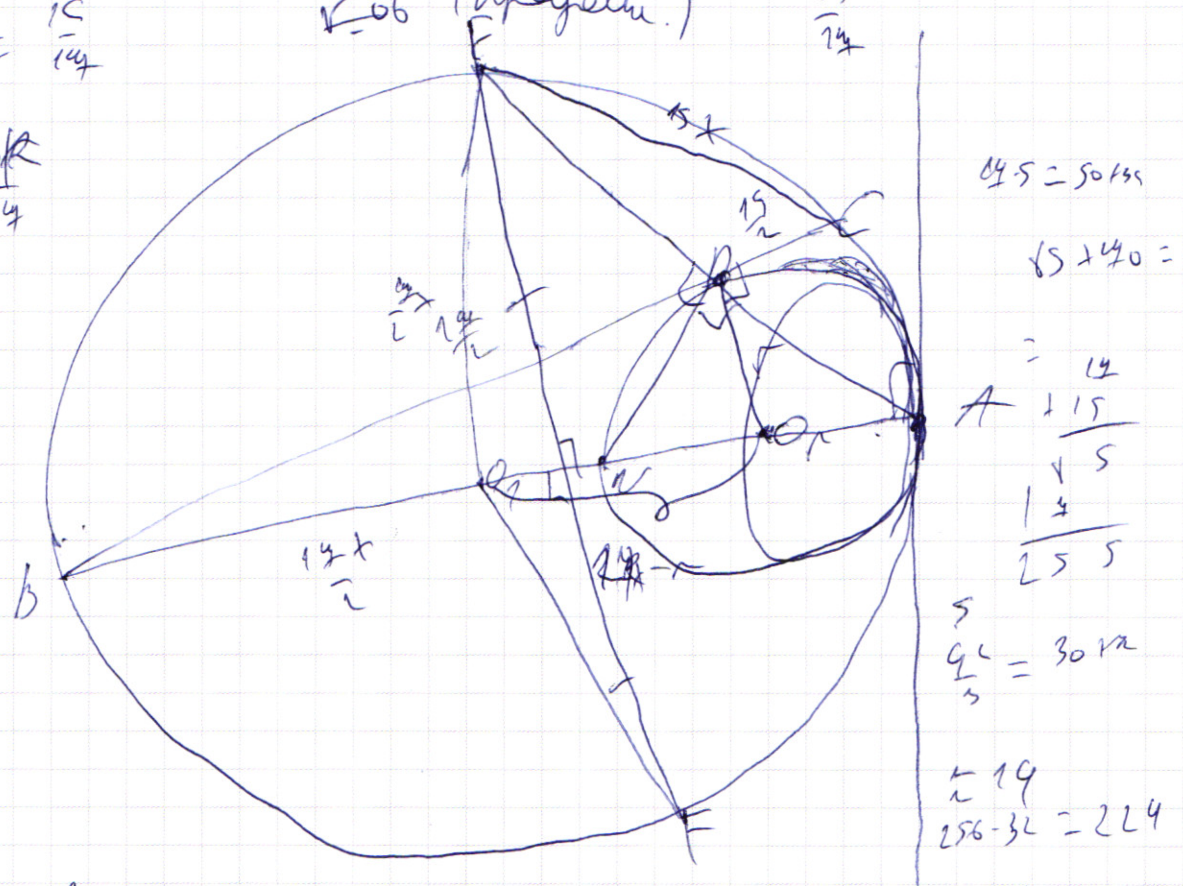
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолж.)

$\frac{x}{2R} = \frac{15}{17}$

$x = \frac{30R}{17}$



$\frac{289}{4} = AN \cdot 2R = 2r \cdot 17x = \frac{17 \cdot 17}{2}$

$289 = 16Rr$

$8rx = 17$

$x = \frac{17}{8r}$

$17x = 2R$

$\frac{17x}{2}\left(\frac{3 \cdot 17x}{2} - r\right) + 8^2 - r^2 = \frac{289}{4}$

$x = \frac{17}{8r}$

$\left(\frac{3 \cdot 17x}{2} - 8r\right)\left(\frac{3 \cdot 17x}{2} - 4r\right) = \frac{289}{4}$

$3 \cdot 6 \cdot 289x^2 - 4 \cdot 6 \cdot r \cdot x = 289$

$18 \cdot 17^2 \cdot x^2 - 24 \cdot \frac{17}{8} = 17$

$18 \cdot 17 \cdot x^2 - \frac{24}{8} = 17$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{D = 144}$

$36ty \quad 36y(y-1) \quad -36-2$

$6y-3$

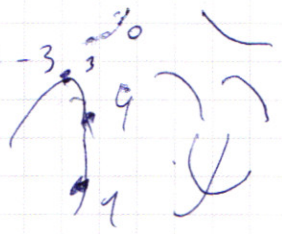
$(x-6)^2+(6y-3)^2=0$

$\frac{-36}{-64} = -9$

$1-2\sin^2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = \sin^2\beta$

$-2+9-3$



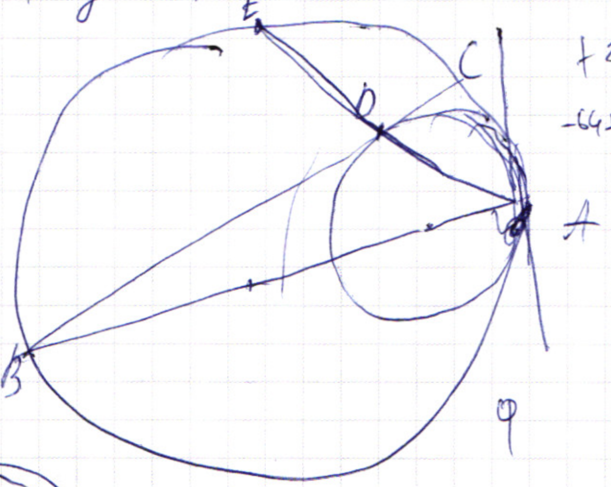
$4-16$

$64t+36t \geq 0 \quad \frac{-12}{-4} = -3 \quad 0$

$+3 \; \frac{-36}{64} \vee \frac{16}{64}$

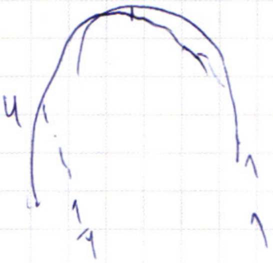
$-64t+36t \geq 0$

$64/4$



$40+24 = 10+6 = 16$

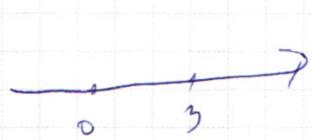
$+7, \frac{-36}{64}$

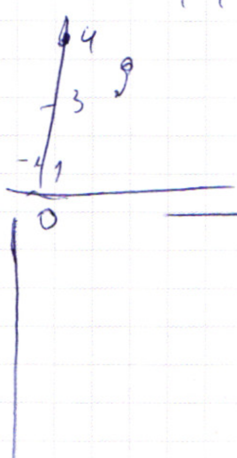


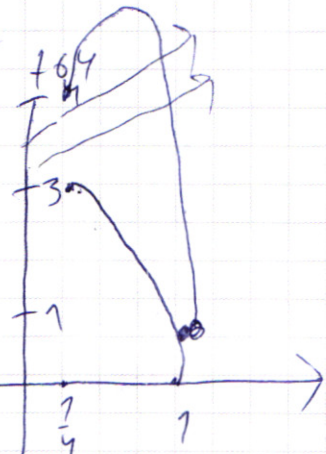
$\frac{16(4t-5)-4(16t-16)}{(4t-5)^2}$

$\frac{64t-80-64t+64}{(4t-5)^2}$

$\frac{4-16}{1-5} = \frac{-12}{-4} = 3 \quad 0$







☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$

$\frac{32}{30}$

$\frac{\frac{14}{2}}{\frac{16}{1}}=\frac{14}{32}$ $\quad -\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$ $\quad \frac{\frac{64}{30}-1}{\frac{64}{30}}$ $\quad \frac{34}{30}\cdot\frac{30}{64}=\frac{17}{32}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad 140+35$

$\sin 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$ or $-\frac{2}{\sqrt5}$ $\quad 205$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \cos\beta$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\pm 2\cos 2\alpha=-1$

$\operatorname{tg}2\alpha$ $\quad 2\sin\alpha\cos\alpha\pm 4\cos^2\alpha\mp 2=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha-4\cos^2\alpha+2=-1$ $\quad 2\sin\alpha\cos\alpha\mp 4\cos^2\alpha=-3$

$2\sin\alpha\cos\alpha-4\cos^2\alpha=-3$ $\quad \sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha=0$

$3\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha=0$ $\quad \operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha+3=0$

$3\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha-1=0$ $\quad 3\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha=0$

$4+12=16$ $\quad 3\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha-1=0$

$\frac{-2\pm4}{6}$ $\quad \frac{1}{3}$

$2\sin\alpha\cos\alpha$ $\quad -1$

$4+12=16$ $\quad \frac{1}{3}$

$\frac{-2\pm4}{6}$ $\quad -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha+2\cos 2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha-2=-1$ $\quad 4+12=16$ $\quad 3$

$2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha=1$ $\quad \frac{2\pm4}{2}$ $\quad -1$

$-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha=0$

$-t^2+2t+3=0$ $\quad t^2-2t-3=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\alpha)$

$\sin(2\alpha+4\beta) = 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = 2(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

$\sin(2\alpha+4\beta = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta+\sin2\beta\cos(2\alpha+2\beta)$

$\sin\alpha$ $\cos(2\alpha+2\beta) = \sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\left(\frac{2}{\sqrt5}\right) = -\frac{2}{5}$

$-\frac{4}{\sqrt5}\cos2\beta \mp \frac{2}{\sqrt5}\sin2\beta = \frac{2}{5}$ $\quad -\frac{1}{\sqrt5}\cos2\beta-\frac{2}{\sqrt5}\sin2\beta$

$\cos2\beta \mp 2\sin2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$

$\sqrt5(\sin(2\beta+\varphi) = \frac{2\sqrt5}{5}$ $\quad 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\beta+\varphi) = \frac{2}{5}$

$2\beta = (-1)^n\cdot\arcsin$ $\quad 2\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cos2\beta = -\frac{2}{5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta = \frac{2}{5}$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \cos2\beta = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{\sqrt5}} = \frac{2\sqrt5}{10} = \frac{\sqrt5}{5}$

$\sin2\alpha\cdot\frac{\sqrt5}{5}+\cos2\alpha\frac{2\sqrt5}{5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha+2\cos2\alpha = -1$ $\quad \sin2\beta = \sqrt{1-\frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2\sqrt5}{5}$

$-1 \le \sin2\alpha \le 1$ $\quad \sqrt5(\sin2\alpha+\varphi) = -1$

$-2 \le 2\cos2\alpha \le 2$

$-3 \le \sin2\alpha+2\cos2\alpha \le 3$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$x \geq 12y$

36
64 44
108

$x^2 - 24yx + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$$\begin{cases} x^2 - 26xy + x + 144y^2 + 12y - 6 = 0 \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y - 45 = 0 \end{cases}$$

$5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t} \geq 3^{\log_3 t}$

$5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t} \geq t$

$36y^2 + 26xy - 12x - x - 36y - 144y^2 - 12y + 6 - 45 = 0$

$-108y^2 + y(12 + 26x - 36) - 13x - 39 = 0$

$108y^2 - y(1\cancel{2} + 26x - 24) - 13x - 39 = 0$

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4}$

$5 - t^{\log_3 5}$

$\frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

$x^2 - 10x \leq |x^2 - 10x|^{\log_3 4} - 5^{\log_3 (10 - x^2)}$

$t \leq |t|^{\log_3 4} - 5^{\log_3 (-t)}$

$t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}} \geq -1$

$t - t^{\log_3 4} + 5^{\log_3 (-t)} \leq 0$

$t^{\log_3 \frac{5}{3}} - t^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq 1$

$t - t^{\log_3 4} + (-t)^{\log_3 5} \leq 0$

$3^{\log_3 5 \cdot \log_3 (-t)}$

$\left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 t} - \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 t} \geq 1$

$t(1 - t^{\log_3 4 - 1}$

$-t = t$

$t^{\log_3 5} - z$

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$

$1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}} \geq 0$

$(t-1)\left(\log_3 \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}}\right) \geq 0$

$t \geq 1$

$10x - x^2 \geq -|10x - x^2|^{\log_3 4} + 5^{\log_3 (10x - x^2)}$

$t > 0$

$t \geq -|t|^{\log_3 4} + 5^{\log_3 t}$

$t \geq -t^{\log_3 6} + t^{\log_3 3}$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad -\frac{3}{5}\sin 2\alpha + \frac{4}{5}\cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{\sqrt5}{5}$

$\frac{2t}{1-t^2}$ $\quad \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}$ $\quad \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$ $\quad \frac{1}{\sqrt5}$ $\cos(2\beta - 2\alpha) = \frac{1}{5}$ $\quad -3\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha + 5$

$\cos(2\beta - 2\alpha) = \frac{\sqrt5}{5}$ $\quad -\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -2$

$\cancel{2\sin\alpha\cos\beta} = -1$ $\quad \sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2\sqrt5}{5}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{\sqrt5}{5}$ $\quad 1+tg^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad 2\cdot\frac{\frac{4}{25}}{5} - 1$

$\frac{\sqrt5}{5}\sin 2\alpha + \frac{2\sqrt5}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \frac{2}{5} - 1$ $\quad -\frac{3}{5}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$ $\quad \cancel{2tg}$ $\quad \frac{2t}{1-t^2} = -\frac{3}{4}$

$tg 2\alpha + 2 = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$ $\quad 3-3t^2 = 8t$

$tg 2\alpha = \sqrt{1+tg^2 2\alpha} - 2$ $\quad 3t^2+8t-3=0$

$tg^2 2\alpha = \cancel{\quad}$ $\quad D = 64+36 = 100$

$1+tg^2 2\alpha - 4\sqrt{c} + 4$ $\quad \frac{-8\pm10}{6}$

$5 = 4\sqrt{c}$ $\quad ct,$ $\quad \frac{1}{3}$

$80 + 9^{\log_3 4}$ $\quad 25 = 16 + 16tg^2 2\alpha$ $\quad -3$

$8t = 3t^2 - 3$ $\quad -\frac{1}{3}$

$80+16\ 3$ $\quad 16tg^2 2\alpha = 9$ $\quad 3t^2-8t-3=0$ $\quad 3$

$106 \cancel{-2,87} + 25$ $\quad tg 2\alpha = \pm\frac{3}{4}$ $\quad \cancel{D} = \frac{8\pm10}{6}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$f(0) = f(0)\ f(0)$

$f(0) \quad f(0) = 0$

$0,$

$(a^x)' = a \ln a$

$f(1) = 2f(1)$

$f(1) = 0$

$5 \ln(\log_3 t)$

$t < 0$

$x^2 - \cancel{10x}$

$10x - x^2 + (10x - x^2)^{2\log_3 2} \geq 5^{\log_3 t}$

$5^{\frac{1}{3}} \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}$

$t + t^{2\log_3 2} \geq 5^{\log_3 t}$

$-\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}$

$5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t} \leq t$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geq \cancel{\log_3}\ ^{\log_3 t}$

t

$t \geq 9$

$10x - x^2 \geq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$(x-1)(x-9) \geq 0$

$10x - x^2 > 0$

$x(10 - x) > 0$

$-\quad +\quad -$

$0 \quad 10$

$1 \quad 9$

- [x] черновик
- [ ] чистовик

Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{2}{\sqrt5}} = \frac{\sqrt5}{5}$

$\sin 2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \frac{2\sqrt5}{5}$ или $-\frac{2\sqrt5}{5}$

Пусть $\sin 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{\sqrt5}{5}\sin 2\alpha + \frac{2\sqrt5}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ $| \cdot \sqrt5$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$ $| : \cos 2\alpha \ne 0$ из отм. 1

$tg 2\alpha + 2 = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$

$\frac{1}{\cos 2\alpha} = \sqrt{1+tg^2 2\alpha}$

$tg 2\alpha + 2 = -\sqrt{1+tg^2 2\alpha}$

$tg 2\alpha = -\sqrt{1+tg^2 2\alpha} - 2$ $|$: возв. в кв.

$tg^2 2\alpha = 1 + \cancel{tg^2 2\alpha} + 4\sqrt{\cancel{1+tg^2 2}}$ $+ 4\sqrt{1+tg^2 2\alpha}$

$\cancel{5 =}$ $\varnothing$ $5 + 4\sqrt{1+tg^2} > 0$

Пусть теперь $\sin 2\beta = -\frac{2\sqrt5}{5}$

$-\frac{2\sqrt5}{\sqrt5}\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt5}{5} - \frac{2\sqrt5}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ $| \cdot \sqrt5$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1 \mid$ ~~возв. в кв.~~ $: \cos 2\alpha$

~~$\sin$~~ $\operatorname{tg} 2\alpha - 2\cancel{t_0} = -\dfrac{1}{\cos 2\alpha}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} + 2$ | (возв. в кв.)

$\cancel{\operatorname{tg}^2 2\alpha} = 4 - 4\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} + 1 + \cancel{\operatorname{tg}^2 2\alpha}$

$5 = 4\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}$ | (возв. в кв.)

$25 = 16 + 16\operatorname{tg}^2 2\alpha$

$\operatorname{tg}^2 2\alpha = \dfrac{9}{16}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \pm\dfrac{3}{4}$

Пусть $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{3}{4}$

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3}{4}$$

Пусть $t = \operatorname{tg}\alpha$

$\dfrac{2t}{1-t^2} = \dfrac{3}{4}$

$8t = 3 - 3t^2$

$3t^2 + 8t - 3 = 0$

$D = 100$

$t_{1,2} = \dfrac{-8 \pm 10}{6}$

$t_1 = \dfrac{1}{3}$

$t_2 = -3$

~~Пусть~~ $\operatorname{tg} 2\alpha = -\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{2t}{1-t^2} = -\dfrac{3}{4}$

$8t = -3 + 3t^2$

$3t^2 - 8t - 3 = 0$

$t_{1,2} = \dfrac{8 \pm 10}{6}$

$t_1 = 3$

$t_2 = -\dfrac{1}{3}$

Так как зн 1,3, а при дп и. ис <3, то их 4

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -3 \end{array}\right.$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)