МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$$

$$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \qquad \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta =$$
$$= \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha$$

$$4\cdot\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} \qquad \operatorname{tg}^2\alpha \neq 0$$

$$\frac{8\operatorname{tg}\alpha \pm (1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} = -1$$

1) +

$$8\operatorname{tg}\alpha+1-\cancel{\operatorname{tg}^2\alpha}+\cancel{\operatorname{tg}^2\alpha}+1=0$$
$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$$

г) –

$8\,tg\alpha - \cancel{1} + tg^2\alpha + \cancel{1} + tg^2\alpha = 0$

$tg\alpha(tg\alpha + 8) = 0$ Значений не меньше 3-х

$tg\alpha = 0$

$tg\alpha = -8$

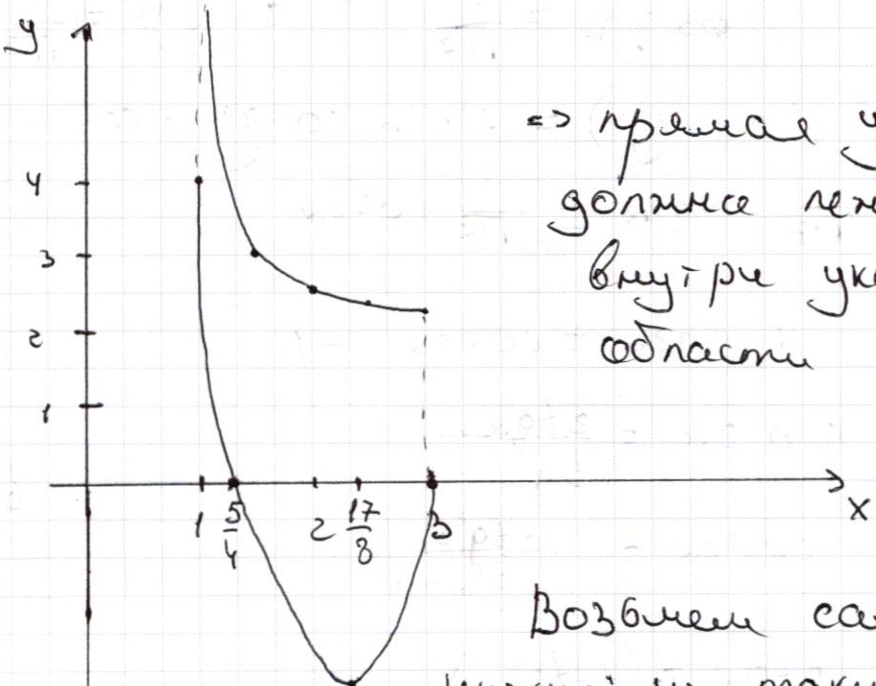
Ответ: $tg\alpha = -8; -\frac{1}{4}; 0$

№6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

$8x^2-34x+30 = 2(4x^2-17x+15)$

$$\frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$$



=> прямая $y = ax+b$ должна лежать внутри указанной области

Возьмем самую „низкую" из таких прямых, проходящую через точки (1; 4); (3; 0)

$\begin{cases} \cancel{3x+b=0} \\ \cancel{4=x+b} \end{cases}$ $\begin{cases} 3a+b=0 \\ a+b=4 \end{cases}$ $a=-2$ $b=6$

$y = -2x+6$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Посмотрим, как расположена эта прямая относительно гиперболы

$$\cancel{-2x+6 = 8x^2-34x+30}$$

$$\cancel{8x^2-32x+24}=0$$

$$\cancel{x} \quad -2x+6 = \frac{4x-3}{2x-2}$$

$$-4x^2+4\cancel{x}+12x-12-4\cancel{x}+3=0$$

$$\cancel{x^2}\,(2x-3)^2=0$$

$\Downarrow$

Касается гиперболы. Далее прямая станет ∩ гиперболу в 2-х точках и выйдет за пределы области => решение одно

Ответ: $(-2; 6)$.

№ 3

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

ОДЗ $x^2+6x>0$

Пусть $x^2+6x=a>0$

$$3^{\log_4 a}+a \geqslant a^{\log_4 5}$$

Пусть $\log_4 a = t \qquad a=4^t$

$$3^t+4^t \geqslant 5^t$$

b^x - монотонно возрастающие функции => 3^t+4^t тоже монотонно ↑ как сумма

$\Rightarrow$ уравнение $3^t+4^t=5^t$ имеет одно решение $t=2$

$t \le 2$

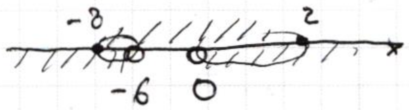
$0 < a \le 16$

$$\begin{cases} x^2+6x \le 16 & (1) \\ x^2+6x > 0 & (2) \end{cases}$$

1) $x^2+6x-16 \le 0$

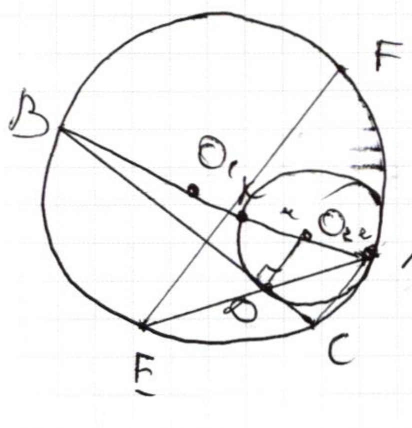
$D = \cancel{6\cdot 4}\ 6\cdot 6 + 4\cdot 16 = 4(9+16) = 4\cdot 25$

$x_1 = \frac{-6-10}{2} = -8 \qquad x_2 = 2$



Ответ: $x \in [-8;-6)\cup(0;2]$

№4



O_2 лежит на AB, т.к. окр-ти касаются

Св-во секущей и касательной: $(BK = x)$

$\cancel{B}\ x(x+2r) = BD^2$

$BD^2+\cancel{r^2} = (x+r)^2 = x^2+2xr+\cancel{r^2}$

$x^2+2xr = BD^2$

$x+2r = 2R$

$AC \perp BC$

$\frac{BD}{BC} = \frac{x+r}{x+2r} = \frac{13}{18} \qquad 13x+26r = 18x+18r$

$BC = 9 \qquad 8r = 5x$

$x = \frac{5}{8}r$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{25}{64} r^2 + \frac{5}{4} r^2 = BD^2$$

$$\frac{105}{64} r^2 = BD^2$$

$$r = \frac{8BD}{\sqrt{105}} = \frac{4 \cdot 13}{\sqrt{105}} = \frac{52}{\sqrt{105}}$$

$$R = \frac{2 \cdot 52}{\sqrt{105}} + \frac{5 \cdot 52}{8\sqrt{105}}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4x^2+9y^2-12xy=3xy-2x-3y+2$

$4x^2+9y^2-15xy+2x+3y=2$

$x^2+6y^2-15xy+8x+7y+2=0$

$x^2+x(8-15y)+6y^2+7y+2=0$ | $x-y$

x^2-xy | $x+(8-14y)$

$x(8-14y)+6y^2+7y+2$

$x^2=3x^2-5x+2$

$x=\sqrt{2}$ $8-$

$2x^2-5x+2=0$

$6x^2-10x-4=0$

$x^2=3x^2-5x+2$

$2=\sqrt{12-4-6+2}$

$6x^2-10x-4=0$

$6\cdot4-12-8$

$2x^2-5x+2=0$

$x\pm2$

$3x^2-5x-2=0$

(x^2-4)

$x^2+x(8-15y)+6y^2+7y+2$ | x^2-4

$y^2=3y^2-5y+2$

$2y^2-5y+2=0$

$25-16$

$6y^2-10y-4=0$

$\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$ 2

$\frac{6}{4}-5-4=0$ $\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$

$3(x-1)^2+3(y-\cancel{2})^2$ -3 -7

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

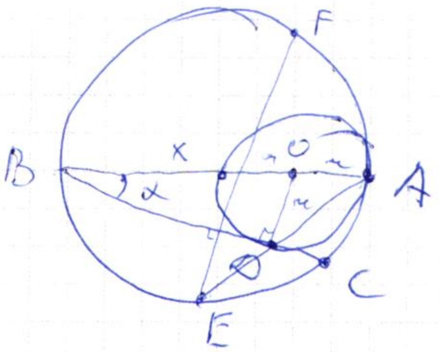
$\cancel{9}$ $18y^2+8x^2+24xy=6xy-4x-6y+4$

$3x^2+3y^2=6x+4y+4$

$15y^2+5x^2+18xy+10(x+y)=0$

$5(x^2+2xy+y^2)+8xy+10y^2$

$5(x+y)^2+10(x+y)$



$\underline{BD}$ B $BD^2=x($

AO

$BD^2+r^2=(x+r)^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-1)(3y-2)$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$3y+2x=3y-2x+4x$

$3x \quad 3y \quad x \quad y$

$x-1=a$

$3y-2=b$

$3y-2+2-2x$

$9y^2-6y$

слева от корня $(3y-2)-2(x-1)$

$y(3y-2)-2y$

$-\frac{2}{3}(3y-\dots)$

$3(3y-2)-\frac{2}{3}(3y-2)+\frac{4}{3}$

(x^2-2x+1)

$(x-1)^2-3+3(3y-2)-\frac{2}{3}(3y-2)+\frac{4}{3}-4=0$

$a^2-7+3b-\frac{2}{3}b+\frac{4}{3}=0$

$3(x-1)^2-7+3y^2-4y=0$

$a^2+\frac{5}{3}b-\frac{17}{3}=0$

$3y(y-1)-3(y-1)-8$

$(3y-1)(y-1)$

$3a^2+5b$

$y(3y-2)-2y-7$

$f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$9y^2-12xy+4x^2=$

$\left[\frac{x}{4}\right]-\left[\frac{1}{4y}\right]<0$

$=3xy-2x-3y+2$

$\left\{\frac{x}{4}\right\}<0$

$5y^2+x^2-12xy+6x+4y=$

$=3xy-2x-3y-2$

$5y^2+x^2-15xy+8x+7y+2=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3x^2-6x=4$
$-2x=\sqrt{-2x+2}$
$4x^2+2x-2=0$
$2x^2+1-2$

$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0$
$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$-6x-4y=-2(2y+3x$

$(3y+2x)^2+(3y+2x)-30xy-2=0$

$9x^2+4y^2-6x^2-y^2-6x-4y=4$

$24 \times 4 = 96$

$(3x+2y)^2-1$ $(y-1)^2-6x^2-6x$

$6x^2-10x-4=0$
$100+196=14^2$
$\frac{10-14}{12}=-\frac{1}{3};\ 2$

$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0$
$3x^2+3y^2-6x-4y-4=0$
$(3y+2x)^2-15xy-12xy+(3y+2x)-2=0$

$y=\sqrt{3y^2-5y+2}$
$12-10+2$

$9x^2+4y^2-6x^2-y^2-6x-4y-4=0$
$(3x+2y)^2-12xy-y^2-6x^2-6x-4y-4=0$
$6x^2-10x-4=0$
$x=\sqrt{3x^2-5x+2}$
$2x^2-5x+2=0$

$\frac{3y \mp 6y+3y^2-4y-4}{x-y}$
$3y^2-7y-4$

$(3x-2y)^2=9x^2+4y^2-12xy$
$(3x-2y)^2-6x^2-y^2+12xy$
$(3x-2y)^2=6x^2+y^2-12xy+6x+4y+4$
x^2+6y^2-12xy

$x^2+6y^2-12xy+6x+4y+4=3xy-2x-3y+2$
$x^2+6y^2-15xy+8x+7y+2=0$

$64 : 4 = 16$, $16 \times 5 = 80$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4 \mid x-y$
$3x^2-3xy \qquad 3x+(3y-6)$
$3xy-6x+3y$
$(3y-6)x-y(3y-6)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x^2-3x

$x^2-4x+3=0$ $16\cdot 9$ 144

$8x^2-34+30=2(4x^2-17x+15)$

$\frac{34}{2\cdot 8}=\frac{17}{8}$

$289-240=49$

$-4x^2+12x-9=0$

$4x^2-12x+9=0$

$\frac{17-7}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$ 3

ax

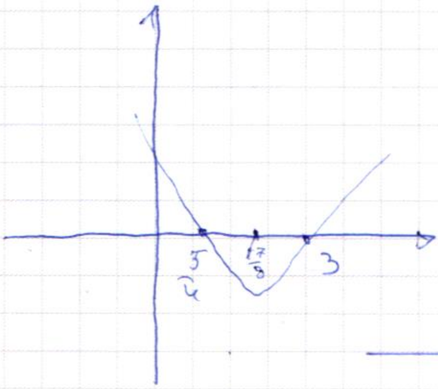
$3a+b=0$

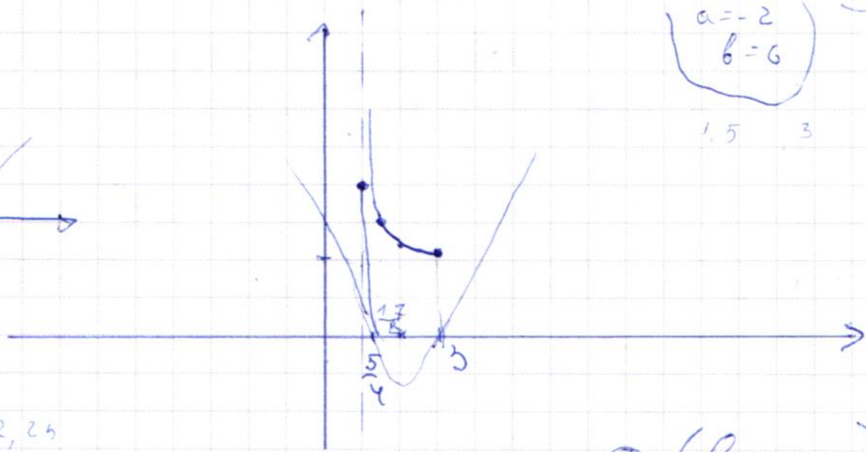
$8(x-3)(x-\frac{5}{4})$

$a+b=4$ $y=-2x+6$

$a=-2$

$b=6$





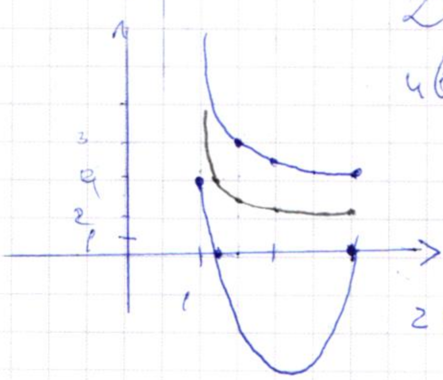
$D=(2b-2a-4)^2-8a(3-2b)$

$4b^2-4ab-8b$

$f(1)>4$ $f(3)>0$

$a+b>4$

$3a+b>0$ $3a+b<$



$\frac{-2}{4(x-1)^2}=\frac{-1}{2(x-1)^2}$

$2ax^2+x(2b-2a-4)-$

$-2b+3$

$a<0$

$4=a+b$

$0=3a+b$ $y=-2x+6$

$4=-2a$

$a=-2$ $b=6$ $y=2+\frac{1}{2x-2}$

$1+4x^2-4x-4x+4$

$4x^2-8x+5$

$-2x+6=2+\frac{1}{2x-2}$

$ax+b=\frac{4x-3}{2x-2}$

$\frac{1}{2x-2}+2x-4$

$2ax^2+2xb-2ax-2b-4x+3=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1) $y(1)=4$

$y(3)=0$

$y=ax$

$ax=\frac{4x-3}{2x-2}$

$2ax^2-2ax-4x+3=0$

$D=(2a+4)^2-24a=4a^2+16a+16-24a\le 0$

$4a^2-8a+16\le 0$

$4(a^2-2a+4)\le 0$

$a=-2$

$b=6$, эта прямая проходит через нижние точки и касается гиперболы

$3x^2-6x+3y^2-4y-4 \mid x-y$

$3x^2-3xy \quad 3x+(3y-6)$

$-6x+3xy$

$x(3y-6)$

$-4y-4$

8 - дох - дн

№2

$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$(3x+2y)(2x+3y)$

$(3y-2x)(3x+2y)=6y^2-6x^2+9xy-4xy$

$3(x+y)^2-6xy-6x-4y-4=0$

$-6x(y+1)-4(y+1)$

$(y+1)(6x+4)$

$3(x^2+2xy+y^2)$

$y^2+2y+1-2y-1+x^2+2xy$

$(y+1)^2+2y(x-1)+(x-1)(x+1)$

$(x-1)(x+2y+1)$

$3x^2$

$\frac{3x^2+3y^2-6x-4y-4}{x-y}=$

$=$

$3y(x-1)-2(x-1)$

$(x-1)(3y-2)$

корень

$3(x^2-2x+1)+6x-3$

$3(x-1)^2-4y-7$

$3x^2+y(3y-2)-2y-6x-4=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8 -

36 - 51 + 15

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\,tg\alpha\cdot\cos^2\alpha = \frac{2\,tg\alpha}{tg^2\alpha+1}$

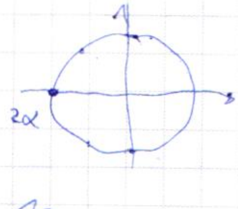
$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2}{tg^2\alpha+1} - 1 = \frac{1-tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1}$

$-2tg^2\alpha$

$1-tg^2$

$\frac{8\,tg\alpha}{tg^2\alpha+1} + \frac{1-tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1} + 1 = 0$



$8\,tg\alpha + 2 = 0$

$tg\alpha = -\frac{1}{4}$ ~~$tg\alpha = 0$~~

$2\alpha = \pi + 2\pi k$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\frac{4}{5}\sin 2\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{5}$

$\cos(2\alpha - \varphi) = -\frac{1}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$\cancel{3(x^2-2) + 3(y^2-2) + 2(y-2) = 0}$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$(4x^2 - 4x + 1) - x^2 - 2x - 1 + (4y^2 - 4y + 1) - 1 - y^2 = 4$

$(2x-1)^2 + (2y-1)^2 = x^2 + y^2 + 2x + 6$

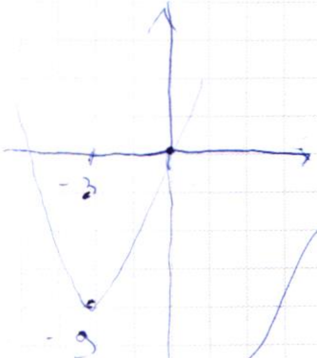
№3

$x^2 + 6 = a > 0$ $\qquad a > 0$

$3^{\log_4 a} + a \geq |a|^{\log_4 5}$ $\qquad a^{\log_4 5} - a^{\log_4 4}$

$3^{\log_4 a} + a \geq a^{\log_4 5}$ $\qquad a^{\log_4 4}\left(a^{\log_4 \frac{4}{5}} - 1\right)$

x^2+6x



$\log_4 a = t$

$a = 4^t$ $\qquad \left(4^{\log_4 5}\right)^t = 5^t$

$3^t + 4^t \geq 5^t$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{5}$ $\quad \frac{7}{12}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad 5^t - 3^t$

$9 + 16 \geq 25$ $\qquad$ 2 - корень

$27 + 64 \geq 125$ $\qquad (-\infty; 2)$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$

1) $\frac{4x-4+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$t \leq 2$

$\log_4 a \leq 2$

$0 < a \leq 16$ $\qquad 36 + 64$

$\begin{cases} x^2 + 6x \leq 16 \\ x^2 + 6x > 0 \end{cases}$ $\qquad x^2 + 6x - 16 \leq 0$

$D = 100$

$x_1 = \frac{-6-10}{2} = -8$

$x(x-6) > 0$

$x_2 = 2$

$\left[\begin{array}{l} (-\infty; 0)(6; +\infty) \\ [-8; 2) \end{array}\right.$

$[-8; 0)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)