МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5.

Из условия следует, что $f(2)=f(3)=0$.

$f(2)=f(2\cdot 1)=f(2)+f(1)=0+f(1)$; $f(1)=0$.

Для $y>0$ верно: $f(1)=f(y\cdot \frac{1}{y})=f(y)+f(\frac{1}{y})$;

$f(\frac{1}{y})=f(1)-f(y)=0-f(y)=-f(y)$

$f(x/y)=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$

$$\begin{cases} x\in[4;28] \\ y\in[4;28] \\ x,y\in\mathbb{N} \\ f(x/y)<0 \end{cases} \quad \begin{cases} x,y\in[4;28] \\ x,y\in\mathbb{N} \\ f(x)<f(y) \end{cases}$$

Вычислим $f(t)$ для $t\in[4;28]$ (по правилу $\left[\begin{array}{l} f(xy)=f(x)+f(y); \\ f(p)=[p/4]\ \forall p\text{ - простое} \end{array}\right.$)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$f(t)$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0	1

Посчитаем кол-во вхождений различных $f(t)$

$5\to 1$
$4\to 2$
$3\to 2$
$2\to 3$
$1\to 8$
$0\to 9$

Тогда $f(x)<f(y)$ в ~~...~~ $1\cdot 0+2\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+8\cdot 8+$ $+9\cdot 16=2+6+15+64+144=23+208=231$ случаях

Ответ: 231.

№ 1

$a=2\alpha+2\beta$

$b=2\beta$

$$\begin{cases} \sin(a)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(a+b)+\sin(a-b)=-\frac{2}{17} \end{cases}$$

$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b$; $2\sin a\cos b=-\frac{2}{17}$; $\sin a\cos b=-\frac{1}{17}$.

$\begin{cases} \sin a \cos b = -\frac{1}{17} \\ \sin a = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$ $\begin{cases} \sin a = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos b = \frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$ $\sin a + \cos b = 0$

$\left(\sin\frac{a+b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\right)\left(\sin\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a-b}{2}\right) = 0$

$(\sin(\alpha+2\beta) + \cos(\alpha+2\beta))(\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) = 0$

$f(t) = \sin(t) + \cos(t);\ t \in R$

$f(\alpha+2\beta) f(\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} f(\alpha+2\beta) = 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{array}\right.$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \alpha+2\beta = -\frac{\pi}{4} + \pi n \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k \end{array}\right. , n \in N, k \in N \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\beta) = -\frac{2}{17} \\ \sin(\cancel{2\alpha}\ \alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$

$f(t) = 0$

$\sin(t) + \cos(t) = 0$

$\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$t + \frac{\pi}{4} = \pi n,\ n \in Z$

$t = -\frac{\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z.$

N 3.

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)} \Rightarrow 26x - x^2 > 0$

$(26x - x^2)^{\log_5 12} + 26x - x^2 - (26x - x^2)^{\log_5 13} \geq 0$; $t = 26x - x^2, t > 0$

$t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} + t \geq 0$

$12^{\log_5 t} - 13^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 0$

$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t} \quad |: 12^{\log_5 t} > 0$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_5 t} + 1 \geq \left(\frac{13}{12}\right)^{\log_5 t}$; $k = \log_5 t$

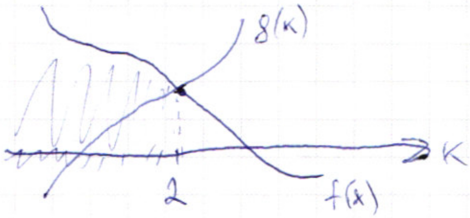
$\left(\frac{5}{12}\right)^k + 1 \geq \left(\frac{13}{12}\right)^k$ $\quad f(k) = \left(\frac{5}{12}\right)^k + 1$ $\quad f(k) \downarrow$ на R $\quad f(k) \geq g(k)$

$g(k) = \left(\frac{13}{12}\right)^k$ $\quad g(k) \uparrow$ на R

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(k) = g(k)$ имеет не более 1 реш.

$k = 2.$



$\left(\frac{13}{12}\right)^2 = \frac{169}{144}$

$\left(\frac{5}{12}\right)^2 + 1 = \frac{169}{144}$

$k \le 2.$

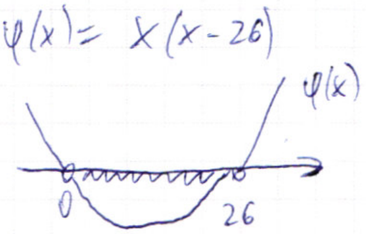
$\log_5 t \le 2$

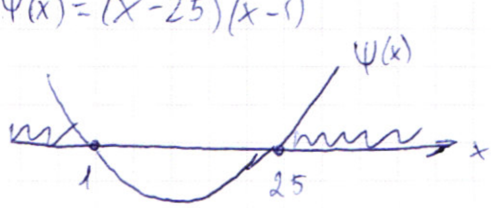
$t \in (0; 25]$

$0 < 26x - x^2 \le 25$

$\begin{cases} x^2 - 26x < 0 \\ x^2 - 26x + 25 \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x-26) < 0 \\ (x-25)(x-1) \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x < 26 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 25 \\ x \le 1 \end{array}\right. \end{cases}$ $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

$\varphi(x) = x(x-26)$ $\psi(x) = (x-25)(x-1)$





Ответ: $(0; 1] \cup [25; 26)$.

№2.

$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$ $\begin{cases} y \ge 6x \\ y^2 - 13xy + 36x^2 + 6x + y - 6 = 0 \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$

$9x^2+(-36x^2+13xy-6x-y+6)-18x-12y-45=0$

$27x^2+(-13y+24)x+13y+39=0$

$D=(24-13y)^2-4\cdot 27\cdot(13y+39)=169y^2-2028y-3636$

$$\begin{cases} D\geq 0 \\ x=\dfrac{13y-24\pm\sqrt{D}}{27\cdot 2} \end{cases}$$

$D=169(y^2-12y+36)-3636-36\cdot 169=169((y-6)^2-270)$

$$\begin{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y\geq 6+3\sqrt{30} \\ y\leq 6-3\sqrt{30} \end{array}\right. \\ y\geq 6x \\ x=\dfrac{13y-24\pm 13\sqrt{(y-6)^2-270}}{27\cdot 2} \end{cases} \\ y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \end{cases}$$

$\cancel{y^2-12y\,(13y-24}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$ $\begin{cases} y\geq 6x \\ y^2-13xy+36x^2+6x+y-6=0 \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$ $\begin{cases} y\geq 6x \\ y^2=13xy+y-36x^2-6x+6 \\ 9x^2+13xy+y-36x^2-6x+6-18x-12y=45 \end{cases}$

$-27x^2-24x+13xy - 11y-39=0$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\begin{cases} \sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos(2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha)(\cos^2(2\beta)-\sin^2(2\beta))+\cos(2\alpha)2\sin(2\beta)\cos(2\beta)+\sin(2\alpha)=-\frac{2}{17} \end{cases}$

$\cancel{\sin(2\alpha)(\cos^2(2\beta)-\sin^2(2\beta)+\ldots)}$

$t_1=2\alpha+2\beta$

$t_2=2\beta$

$|tg(\alpha)|=\sqrt{tg^2\alpha}=\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\sqrt{\frac{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}}=\frac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$

$\sin(t_1)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(t_1+t_2)=-\frac{2}{17}$

$\cancel{\ln(a^{\log_b c})=\log_b c\,\ln(a)=\frac{\ln(a)\ln(c)}{\ln(b)}}$

$12^{\log_5(26x-x^2)}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}-(26x-x^2)^{\log_5 13}\geq x^2-26x$ $t=26x-x^2,\ t\geq 0$

$t^{\log_5 12}-t^{\log_5 13}+t\geq 0$ $f(t)=t^{\log_5 12}-t^{\log_5 13}+t$

$f(5)=11$ $f(6)=0$
$f(2)=0$ $f(7)=1$
$f(3)=0$ $f(8)=0$
$f(1)=0$ $f(9)=0$
$f(4)=0$ $f(10)=1$

$f'(t)=\log_5 12\, t^{\log_5 12-1}-\log_5 13\, t^{\log_5 13-1}+1$

$f'(t)=0;$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \dfrac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \\ ax+b \geqslant 18x^2-51x+28 \\ x > \dfrac{2}{3} \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$\cos(2\alpha) = t$

$\sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -\dfrac{\sqrt{17}}{17}$

$\sin(2\alpha)(\cos^2(2\beta) - \sin^2(2\beta)) + \cos(2\alpha)\, 2\sin(2\beta)\cos(2\beta) + \sin(2\alpha) = -\dfrac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha)\cos^2(2\beta) - \cancel{\sin(2\alpha)} + 2\sin(2\beta)\cos(2\beta)\cos(2\alpha) + \cancel{\sin(2\alpha)} = -\dfrac{2}{17}$

$\cos(2\beta)(2\sin(2\alpha)\cos(2\beta) + 2\sin(2\beta)\cos(2\alpha)) = -\dfrac{2}{17}$

$2\cos(2\beta)\sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{2}{17}$

$\dfrac{-2\cos(2\beta)}{\sqrt{17}} = -\dfrac{2}{17}$

$\cos(2\beta) = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha)(1 - 2\sin^2(2\beta)) + \cos(2\alpha) 2\sin(2\beta)\cos(2\beta) + \sin(2\alpha) = -\dfrac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha) + 2\sin(2\beta)(\cos(2\alpha)\cos(2\beta) - \sin(2\alpha)\sin(2\beta)) = -\dfrac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha) + 2\sin(2\beta)\cos(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{2}{17}$

$9(x^2-2x+1) + y^2 - 12y + 36 = 90$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$ $\qquad f(1) = f(y) + f(\frac{1}{y})$

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$ $\qquad f(\frac{1}{y}) = -f(y)$

$f(x/y) = f(x) - f(y)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a = 2\alpha + 2\beta$

$b = 2\beta$

$$\begin{cases} \sin(a) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(a+b) + \sin(a-b) = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$\sin a \cos b + \sin b \cos a + \sin a \cos b - \sin b \cos a = -\frac{2}{17}$

$2\sin a \cos b = -\frac{2}{17}$

$$\begin{cases} \sin a \cos b = \frac{-1}{17} \\ \sin a = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin a = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos b = \frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases} \qquad \cos b = -\sin a$$

$\cos(2\beta) + \sin(2\alpha + 2\beta) = 0$

$\sin(x) + \cos(y) = 0$ $\quad p = \frac{x+y}{2}$ $\quad q = \frac{x-y}{2}$ $\quad \begin{cases} x = 2p - y \\ x = 2q + y \end{cases}$ $\quad 2p - y = 2q + y$ $\quad \begin{cases} y = p - q \\ x = p + q \end{cases}$

$\sin(p+q) + \cos(p-q) =$

$= \sin p \cos q + \sin q \cos p + \cos p \cos q + \sin p \sin q =$

$= \sin p (\sin q + \cos q) + \cos p (\sin q + \cos q) =$

$= (\sin p + \cos p)(\sin q + \cos q) = \left(\sin(\alpha + 2\beta) + \cos(\alpha + 2\beta)\right)(\sin\alpha + \cos\alpha)$

$$\begin{cases} y \geq 6x \\ y^2 - 13xy + 36x^2 + 6x + y - 6 = 0 \\ 9x^2 - 36x^2 + 13xy - 6x - y + 6 - 18x - 12y - 45 = 0 \end{cases}$$

$-27x^2 + (13y - 24)x - 13y - 39 = 0$

$27x^2 + (24 - 13y)x + 13y + 39 = 0$

$\cancel{D = (24 - 13y)^2 - 4 \cdot 27 \cdot (13y + 39) =}$
$\cancel{= 576 - 624y}$

$D = (24-13y)^2 - 4\cdot 27(13y+39) = 576 - 624y + 169y^2 - 1404y - 4212 \ominus$

$\ominus\ 169y^2 - 2028y - 3636$

$169y^2 - 169\cdot 12y$

24×24: $96 + 48\_ = 576$

24×26: $144 + 48\_ = 624$

108

108×13: $324 + 108\_ = 1404$

108×39: $972 + 324\_ = 4212$

$3636 : 13 = 27$ (26, 103, 91, 126)

$2028 : 13 = 156$ (13, 72, 65, 78, 78, 0)

$13\cdot 13\cdot 12$

$-12x + 36x^2 - 9x^2 = xy - 6x - y - 39$

$(26x - x^2)^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + (26x - x^2)^{\log_5 13}$

$t = 26x - x^2$

$t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} + t \geq 0$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}} - t^{\log_5 \frac{13}{5}} + 1 \geq 0$

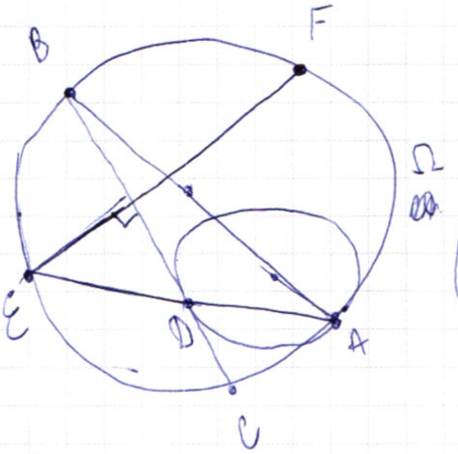
$a = \log_5(t)$

$12^{\log_5(t)} - 13^{\log_5(t)} + t \geq 0$

$12^a - 13^a + 5^a \geq 0$

$12^a + 5^a \geq 13^a;\quad a \in (-\infty; 2]$

$1 + \left(\frac{5}{12}\right)^a \geq \left(\frac{13}{12}\right)^a$



$c = tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin\alpha$

$\begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x \leq 2 \end{cases}$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b$

$\parallel$

$-\frac{6x-4}{3x-2} + \frac{4}{3x-2}$

$\parallel$

$-2 + \frac{4}{3x-2}$

$ax + b \leq -2 + \frac{4}{3x-2}$

$5y^2 - 13xy + 6x + y - 6 - 72x - 48y - 180 = 0$

$5y^2 - (47 + 13x)y - 66x - 186 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x+ay+b)(9x-9ay-\frac{45}{b}) = 9x^2 + x(9b-\frac{45}{b}) - 9a^2y^2 - 45 + y(-\frac{45a}{b}+cb)$

$\frac{9b^2-45}{b} = -18$

$9x^2 + x(9b - \frac{45}{b})$

$9b^2+18b-45=0$

$b^2+2b-5=0$

$D_1 = 1+5=6$

$\begin{cases} b = -1 \pm \sqrt{6} \\ a = \pm\frac{1}{3} \end{cases}$

$(x+ay+b)(9x-9ay-\frac{45}{b})$

$-9a^2y^2 = y^2$

$a^2 = -\frac{1}{9}$

$576 - 624y + 169y^2 - 1404y - 4212$

108×13: $324 + 108 = 1404$

108×39: $972 + 324 = 4212$

$4212 - 576 = 3636$

101×3: 303

$101 + 169 = 270$