МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{5}{25}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

I $\left(\sin 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Big|\cdot\sqrt{5}$$

$$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$$

$$2\cos\alpha\sin\alpha + \cancel{2}\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha \cancel{+\cos^2\alpha}$$

$$2\cos\alpha\sin\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$$

$$\cancel{\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\sin^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha + 3\cos^2\alpha = 0 \quad \Big|:\cos^2\alpha$$

$$tg^2\alpha - 2tg^2\alpha - 3 = 0$$

$$tg\,\alpha = \frac{2 \pm \sqrt{\cancel{8}16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 3;\ -1$$

II $\left(\sin 2\beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} - \cos 2\alpha\, \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Big|\cdot\sqrt{5}$$

$$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$$

$$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0 \quad \Big|:\cos^2\alpha$$

$$3tg^2\alpha + 2tg\,\alpha - 1 = 0$$

$$tg\,\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = -1;\ \frac{1}{3}$$

Итак, получаем, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$
$\operatorname{tg}\alpha = -1$

т.к. в условии сказано, что значений не меньше трёх => все подходят.

Отв: $3; -1; \frac{1}{3}$

№2

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} = \sqrt{2y(x-6)-(x-6)} = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ x^2+36y^2-12x-36y = 45 \end{cases}$$

$\vee$ $x-12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9 = 45+36+9$

$\vee$ $(x-6)^2+9(2y-1)^2 = 90$

Пусть $x-6 = a$ $\quad 2y-1 = b$

$$\begin{cases} a-6b = \sqrt{ab} \\ a^2+9b^2 = 90 \end{cases} \qquad a-6b \geq 0$$

$a^2-12ab+36b^2 = ab \Rightarrow a^2-13ab+36b^2 = 0 \quad (1)$

Рассмотрим (1), как квадратное относительно a.

$a^2-13b\cdot a+36b^2 = 0$

$$\begin{cases} a_1+a_2 = 13b \\ a_1\cdot a_2 = 36b^2 \end{cases} \quad \text{Th. Виета}$$

$\Downarrow$

$a_1 = 4b$

$a_2 = 9b$

I) $a = 4b \qquad 16b^2+9b^2 = 90$

$b^2 = \frac{90}{25} = \frac{18}{5} \Rightarrow b = \frac{\pm 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow a = \frac{\pm 12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$a = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad b = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \qquad a-6b \geq 0 \qquad \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} - \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = -\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}} < 0 \Rightarrow$ не подходит

$\boxed{a = \frac{-12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad b = \frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}} \qquad a-6b \geq 0 \qquad -\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}} > 0 \Rightarrow$ подходит

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

II) $a = 9b$

$90b^2 = 90$

$b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow a = \pm 9$

$\boxed{a = 9 \quad b = 1}$ $\quad a - 6b \geq 0 \quad 9 - 6 = 3 \geq 0 \Rightarrow$ подходит

$a = -9 \quad b = -1 \quad a - 6b \geq 0 \quad -9 + 6 = -3 < 0 \Rightarrow$ не подходит

1) $x - 6 = -\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = 6 - \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}$

$2y - 1 = \frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad 2y = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{10}}$

2) $x - 6 = 9 \Rightarrow x = 15$

$2y - 1 = 1 \Rightarrow y = 1$

Ответ: $\left(6 - \frac{12\sqrt{10}}{5} ; \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$(15; 1)$

N3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 > 0 \Rightarrow |x^2 - 10x| = 10x - x^2$

$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

Пусть $t = 10x - x^2 \quad t > 0$

$t^{\log_3 4} + t \geq 5^{\log_3 t}$

$f(t) = t^{\log_3 4} + t$

$g(t) = 5^{\log_3 t}$

две монотонно возрастающие функции $\Rightarrow$ имеет не более одной точки пересечения

равенство при $t = 9$,

при $t \in (0; 9) \quad f(t) > g(t)$

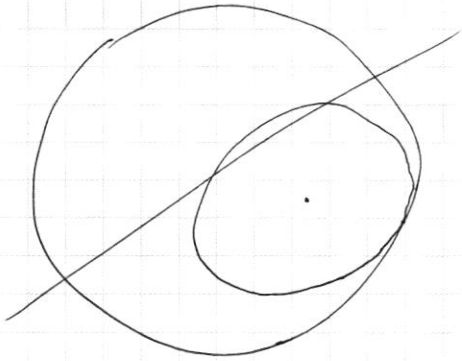
$|x^2 - 10x| < 9 \quad x^2 - 10x + 9 > 0$

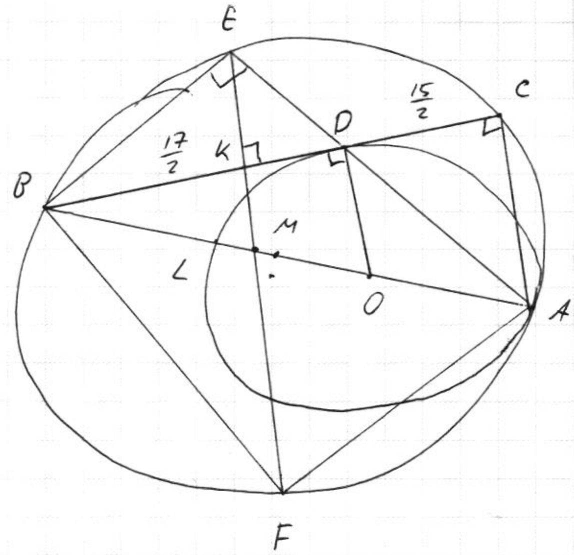
$10x - x^2 - 9 < 0 \quad (x - 1)(x - 9) > 0$

$\begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (9; +\infty) \\ 10x - x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 1) \cup (9; 10)$

Ответ: $(0; 1) \cup (9; 10)$

№4





1) Пусть O – центр ω, M – центр Ω, $O; M \in AM$ т.к. Ω и ω касаются

r – радиус ω, R – радиус Ω

2) $BD^2 = BL \cdot AB$ по Th. о секущей и касательной

$BL = 2R - 2r$

$AB = 2R$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = 2R(2R-2r)$

3) $\triangle BDO$ – п/у т.к. OD (радиус) $\perp BD$ => $\cancel{\frac{17^2}{2^2} = (R+r)^2 - r^2}$

$BD^2 = BO^2 - OD^2 \Rightarrow \frac{17^2}{2^2} = (2R-r)^2 - r^2$

~~4)~~ $\cancel{\left(\frac{17}{2}\right)^2 = 4R^2 - 4Rr}$ и) $\angle BCA = 90°$ т.к. AB – диаметр =>

$\cancel{\left(\frac{17}{2}\right)^2 = 4R^2 - 4Rr}$ => $\triangle ABC$ – п/у => $BC^2 = AB^2 - AC^2$

5) $\triangle BDO \sim \triangle BCA$ по двум углам => $\cancel{AC = \frac{16}{\frac{17}{2}} \cdot OD \Rightarrow AC = \frac{32}{17} r}$

6) $\cancel{\begin{cases} 32^2 = (2R)^2 - \left(\frac{32}{17}\right)^2 r^2 \\ \left(\frac{17}{2}\right)^2 = 2R(2R-2r) \end{cases}}$ $\cancel{\begin{cases} 32^2 = 4R^2 - \frac{1024}{289} r^2 & \mid :4 \\ \frac{289}{4} = 4R^2 - 4Rr & \mid :4 \end{cases}}$

$\cancel{\begin{cases} 256 = R^2 - \frac{256}{289} r^2 \\ \frac{289}{8} = R^2 - Rr \end{cases}}$ $\cancel{Rr = R^2 - \frac{289}{8}}$

$\cancel{r = R - \frac{289}{8R}}$

$\frac{OB}{AB} = \frac{\frac{17}{2}}{16}$

$\begin{cases} \frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{32} \\ \left(\frac{17}{2}\right)^2 = 4R^2 - 4Rr \end{cases}$

$1 - \frac{r}{2R} = \frac{17}{32}$

$\cancel{\frac{47}{2R}} \cancel{\frac{47}{64}}$ $\frac{15}{32} = \frac{r}{2R}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) $\frac{r}{R} = \frac{15}{16}$ $\quad r = \frac{15R}{16}$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = 4R^2 - \frac{15R^2}{4} = \frac{16R^2 - 15R^2}{4}$

$\frac{17^2}{4} = \frac{R^2}{4} \Rightarrow \boxed{R = 17} \Rightarrow \boxed{r = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16}}$

8) $\cos\angle DBO = \frac{17}{2 \cdot 17} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle DBO = 60° \Rightarrow \angle BOD = 30° \Rightarrow$

$\angle DOA = 150°$ (смежные)

9) $\angle COA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AO} = \frac{1}{2}\angle DOA = 75° \Rightarrow \angle KDE = 75°$ (вертикальные) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AEF = 15°$

10) $\angle BEA = 90°$ т.к. AB – диаметр $\Rightarrow \angle EBD = 90° - \angle EDB = 90 - 75 = 15°$

11) $\angle EBA = \angle EBD + \angle DBA = 60° + 15° = 75°$

12) $\angle EBA$ и $\angle EFA$ опираются на одну дугу $AE \Rightarrow \underline{\angle EBA = \angle EFA = 75°}$

13) $\angle AFE + \angle AEF = 75° + 15° = 90° \Rightarrow \angle EAF = 90° \Rightarrow$ опирается

на диаметр $\Rightarrow EF$ – диаметр $\Rightarrow M \in EF$

14) $\triangle BKM \sim \triangle BOD$ по 2 углам $\Rightarrow \angle BMK = \angle BOD = 30°$

15) $S_{BEAF} = AB \cdot EF \cdot \sin\angle BMK \cdot \frac{1}{2} = 4R^2 \cdot \frac{1}{4} = R^2 = 17^2 = 289$

16) $BEAF$ – прямоугольник, т.к. диагонали равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} S_{BEAF} = \frac{289}{2}$

Ответ: $R = 17$; $r = \frac{255}{16}$

$\angle AFE = 75°$

$S_{\triangle AEF} = \frac{289}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

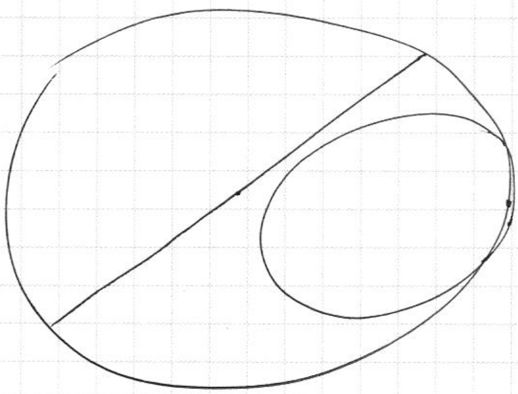
(заполняется секретарём)

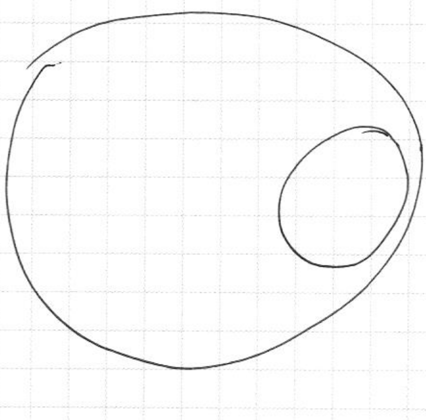
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

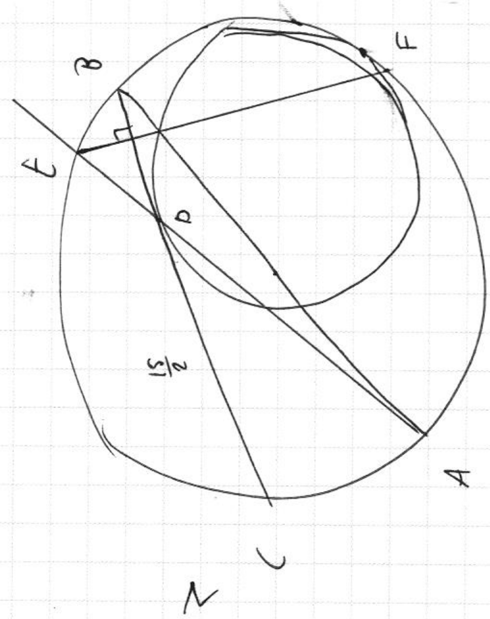
$$f(x) = \frac{16x - 20 + 4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$$

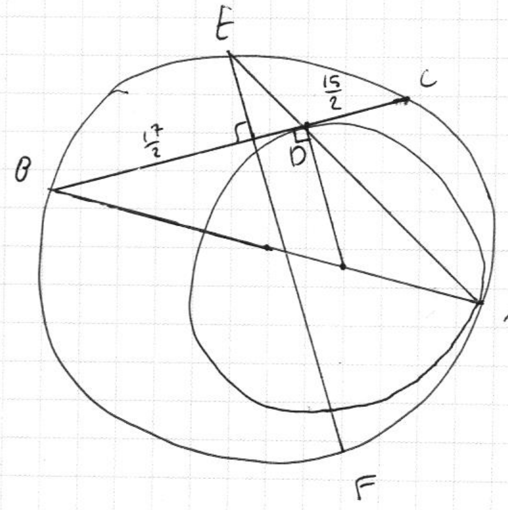
$$\cancel{x^2 - 10x - 9 < 0}$$

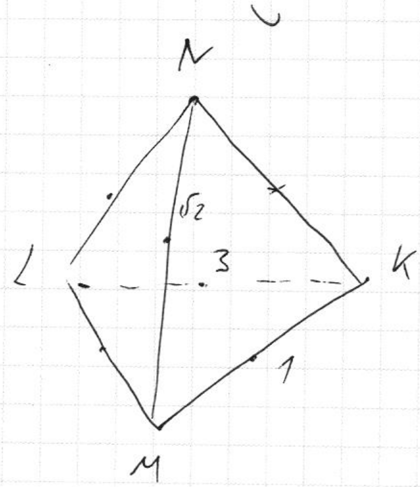
$$10x - x^2 - 9 < 0$$











☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x - 6 \quad -6(2y-1) = x - 12y$

$\begin{array}{r|l} -90 & 5 \\ \underline{5} & \overline{18} \\ 40 & \\ \underline{-40} & \\ 0 & \end{array}$

$\cancel{2a^2 - 13ab + 45b^2 - 90 = 0}$

$\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}^{\backslash\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{10}}{5}$

№3

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$$|x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 - 10x + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$\begin{array}{r} 15 \\ \times 17 \\ \hline 105 \\ 15 \\ \hline 255 \end{array}$

$10x - x^2 > 0$

$\Downarrow$

$|x^2 - 10x| = 10x - x^2$

Пусть $10x - x^2 = t$

$$t^{\log_3 4} + t \geq 5^{\log_3 t}$$

$x(10-x) > 0$

$x \in (0; 10)$

$t(t^{\log_3 \frac{4}{3}} + 1) \geq 5^{\log_3 t}$

$t \in (0; 25)$

$9(\frac{4}{3}^2 + 1)$

$t = 9$

$(t^{\log_3 4} + t)' =$

$= \log_3 4 \, t^{\log_3 \frac{4}{3}} + 1 > 0$

$3^{\log_3 \frac{1}{4}} + \frac{1}{3}$

$64 + 27 \neq 125$

$(5^{\log_3 t})' = \ln 5 \cancel{\log} 5^{\log_3 t} \cdot \frac{1}{t \ln 3} =$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{5}$

$128 + 81 \neq 625$

$= \log_3 5 \, \frac{5^{\log_3 t}}{t} > 0$

$\frac{1}{9} \quad 3^{-2\log_3 4}$

$3^{\log_3 \frac{1}{16}}$

$\frac{1}{27} \quad \frac{1}{64} + \frac{1}{27}$

$\frac{1}{16} + \frac{1}{9} = \frac{25}{144}$

$\begin{array}{r} 64 \\ -17 \\ \hline 47 \end{array}$

$) +)) +))) + \text{ʒ} = 180°$

$(+ (((= 90°$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin (x+y) = \sin x\cos y + \sin y \cos x$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$

$\sin(\underbrace{x+y}_{n}) + \sin(\underbrace{x-y}_{m}) = 2\sin x\cos y = 2\sin\frac{m+n}{2}\cos\frac{n-m}{2}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{5}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{5}{25}} = \pm\sqrt{\frac{20}{25}} = \pm\frac{2\sqrt5}{5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

1) $\sin 2\alpha \frac{\sqrt5}{5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2\sqrt5}{5} = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot\sqrt5$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \cancel{2}\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha + \cancel{\cos^2\alpha}$

№2 $\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} = \sqrt{2y(x-6)-(x-6)} = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ x^2+36y^2-12x-36y = 45 \end{cases}$

$(6y)^2 \cdot 2\cdot 6y\cdot 3 + 3^2$

~~$x^2-12x+36y^2-36y-45=0$~~

$(6y-3)^2 + (x-6)^2 = 90$