МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}; \quad \begin{cases} \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\cos 2\beta \quad (2) \end{cases}$$

$$-\cos 2\beta = \sin\left(2\beta - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} 2\alpha+2\beta &= 2\beta - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 2\alpha+2\beta &= \pi - 2\beta + \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{aligned}\right., \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\pi}{4} + \pi k \\ \alpha &= \frac{3\pi}{4} - 2\beta + \pi k \end{aligned}\right. \\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases};$$

1) $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -1$,

2) $\alpha = \frac{3\pi}{4} - 2\beta + \pi k \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\beta\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} - \operatorname{tg}2\beta}{1 + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\operatorname{tg}2\beta}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 2\beta = 5 - 1 = 4 \Rightarrow \operatorname{tg}2\beta = \pm 2$

$$\left[\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{-1-2}{1+(-1)\cdot 2} = \frac{-3}{-1} = 3 \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{-1+2}{1+(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{3} \end{aligned}\right.$$

Получили 3 разл. значения тангенса, по условию их не меньше 3 $\Rightarrow$ все подходят

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = -1$; $\operatorname{tg}\alpha = 3$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

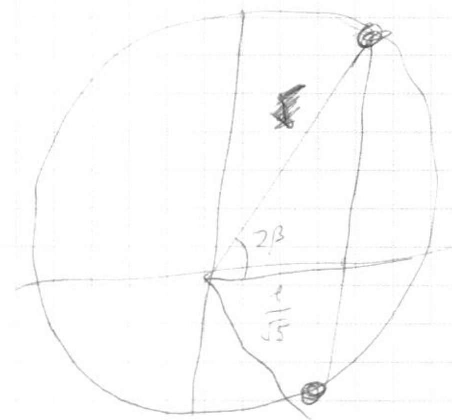
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\beta = -\frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} \cos2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} = -\cos2\beta = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right) = \sin\left(2\beta-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$



~~1) $\sin2\beta \geq 0$~~

~~$\sin2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$ $\sin2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$~~

~~$\sin2\alpha$~~

1) $2\alpha + 2\beta = 2\beta - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ ✗

2) $2\alpha + 2\beta = \frac{3\pi}{2} - 2\beta + 2\pi k$

$\alpha = \frac{3\pi}{4} - 2\beta + \pi k$

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$(x-6)^2+(6y-3)^2 = 90$$

$x-12y \geq 0$

$x^2-24xy+144y^2 = 2xy-12y-x+6$

$x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0$

$x^2+36y^2-12x-36y-45=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ:

$10x - x^2 > 0$;

$(10-x)x > 0$;

$x \in (0;10)$

$\Rightarrow |x^2-10x| = 10x - x^2$

$10x - x^2 = t$; $\quad$ $\cancel{10}$ $t = 10x - x^2 = -(x-5)^2 + 25 \leq 25$

$0 < t \leq 25$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t = 3^{\log_3 t}$, $\quad t^{\log_3 4} = (3^{\log_3 t})^{\log_3 4} = 4^{\log_3 t}$

$\log_3 t = a \in (-\infty; \log_3 25]$

$3^a + 4^a \geq 5^a \iff \log_5(3^a+4^a) \geq a$

$f(a) = \log_5(3^a+4^a) - a$

$f'(a) = \frac{1}{\ln 5 \cdot (3^a+4^a)} \cdot (\ln 3 \cdot 3^a + \ln 4 \cdot 4^a) - 1 < 0$,

т.к. $\ln 3 \cdot 3^a + \ln 4 \cdot 4^a < \ln 5 \cdot 3^a + \ln 5 \cdot 4^a$

$\Rightarrow f(a)$ убывает $\Rightarrow f(a) = 0$ имеет ~~единств~~ не больше одного решения. Заметим, что $a = 2$ – корень, т.к. $f(2) = \log_5 25 - 2 = 0$

см. стр. №3

продолж. №3

$\Rightarrow f(a) \geq 0$ при $a \leq 2$

$f(a) \geq 0$ равносильно исходному (на ОДЗ)

$\Rightarrow$ подходят $\log_3 t = a \leq 2$

$$0 < t \leq 9$$

$$0 < 10x - x^2 \leq 9$$

$$\begin{cases} x \in (0; 10) \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \in (0; 10) \\ (x-1)(x-9) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (0; 10) \\ x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty) \end{cases}; \quad x \in (0; 1] \cup [9; 10)$$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$R_1 := R_\omega$ - ?

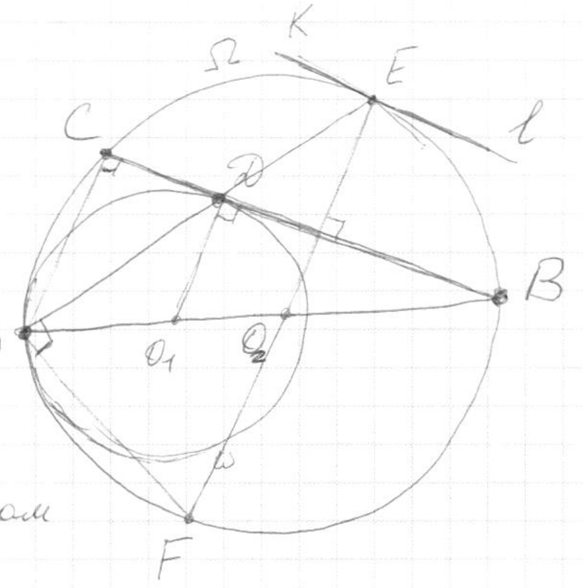
$R_2 := R_\Omega$ - ?

$\angle AFE$ - ?

$S_{\triangle AEF}$ - ?

$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$



~~Рассм.~~ ~~При~~ гомотетию с центром в A и $k = \frac{AE}{AD}$:

$H_A^k: \omega \to \Omega \Rightarrow BC \to l$, l - касательная к Ω и $l \parallel BC$; $\angle BAE = \frac{1}{2}\overset{\smile}{EB} = \angle BCE = \angle KEC$ (из-за паралл.-сти) $\angle KEC = \angle CBE$ (угол между хордой и касат.) $\Rightarrow \angle BCE = \angle CBE \Rightarrow E$ - середина дуги BC.

$\Rightarrow$ т.к. $EF \perp BC$, то EF - диаметр $\Omega \Rightarrow$ $O_2 = AB \cap EF$ - центр Ω.

Пусть O_1 - центр $\omega \Rightarrow O_1D \perp BC$, ~~AB диам~~

ω и Ω касаются $\Rightarrow O_1$ и O_2 лежат на AB

$\triangle O_1DB \sim \triangle ACB$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{\frac{17}{2}}{\frac{32}{2}} = \frac{17}{32}$

$BO_1 = AB - AO_1 = 2R_2 - R_1 \Rightarrow \frac{2R_2 - R_1}{2R_2} = \frac{17}{32}$

$\Rightarrow 1 - \frac{R_1}{2R_2} = \frac{17}{32}$, $\frac{15}{16} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{k}$ - обратн. коэф. гомотетии

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

продолж. №4

$\Rightarrow k = \frac{16}{15} = \frac{AE}{AD}$, пусть $AD = 15x \Rightarrow AE = 16x \Rightarrow DE = x$

AE и BC — хорды $\Rightarrow DA \cdot DE = DB \cdot DC$

$$15x \cdot x = \frac{15 \cdot 17}{4}$$

$$x^2 = \frac{17}{4};\quad x = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

BD - касат. $\Rightarrow BD^2 = BO_1^2 - O_1D^2 = (2R_2 - R_1)^2 - R_1^2 =$

$= (2R_2 - 2R_1) \cdot 2R_1 = 4R_1(R_2 - R_1) = 4R_1^2\left(\frac{16}{15} - 1\right) = \frac{4R_1^2}{15}$

$\Rightarrow \frac{4R_1^2}{15} = \frac{17^2}{4} \Rightarrow R_1 = \frac{17\sqrt{15}}{4} \Rightarrow R_2 = \frac{16}{15}R_1 = \frac{68}{\sqrt{15}}$

в $\triangle AFE$ по т. синусов:

$\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R_2$; $AE = 16x = 8\sqrt{17}$

$$\sin\angle AFE = \frac{8\sqrt{17} \cdot \sqrt{15}}{2 \cdot 68} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{17}}$$

$\Rightarrow \cos\angle AFE = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \Rightarrow AF = 2R_2 \cos\angle AFE = \frac{8 \cdot 17}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \frac{8\sqrt{34}}{\sqrt{15}}$

$\Rightarrow S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} AF \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{17} \cdot \frac{8\sqrt{34}}{\sqrt{15}} = \frac{32 \cdot 17\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

Ответ: $R_1 = \frac{17\sqrt{15}}{4}$; $R_2 = \frac{68}{\sqrt{15}}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{17}}$;
$S_{\triangle AEF} = \frac{544\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, где p_i – простые.

Тогда $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \ldots + f(p_k^{\alpha_k}) =$

$= \alpha_1 \cdot f(p_1) + \alpha_2 \cdot f(p_2) + \ldots + \alpha_k \cdot f(p_k)$ (*)

Рассм. $f(p)$, где p – простое ~~от~~ меньшее 25.

$f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(5) = 1$, $f(7) = 1$, $f(11) = 2$,

$f(13) = 3$, $f(17) = 4$, $f(19) = 4$, $f(23) = 5$.

$f(x) = f(y) + f(\frac{x}{y}) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow$

$f(x) - f(y) < 0$

$\Leftrightarrow f(x) < f(y)$

Рассм. n от 2 до 25 и посчитаем, для скольких n $f(n) = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

$f(n) = 0 \Leftrightarrow$ (в силу (*)) $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta$, $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$

Такие $n \leq 25$: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24

$\Rightarrow$ 10 чисел

$f(n) = 1 \Leftrightarrow$ n делится на 5 либо 7 (в 1 степени) и возможно на 2 и 3.

Такие $n \leq 25$: 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21 $\Rightarrow$ 7 чисел

$f(n) = 2$ если $n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5}$, причём

$\begin{cases} \alpha_3 + \alpha_4 = 2 \\ \alpha_5 = 0 \end{cases}$ либо $\begin{matrix} \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_5 = 1 \end{matrix}$, такие $n \leq 25$: 11, 22, 25

$\Rightarrow$ 3 числа

~~[illegible]~~ продолж. №5

Итого рассмотрели 20 значений n. Осталось 4 значения: $n = 13, 17, 19, 23 \Rightarrow$ для $f(n) = 3$ - 1 число
$f(n) = 4$ - 2 числа
$f(n) = 5$ - 1 число

$f(x) < f(y)$

если $f(x) = 0 \Rightarrow x$ можно выбрать 10 способами, y - 14 способами $\Rightarrow$ 140 пар

если $f(x) = 1$, то x можно выбрать 7 способами, y - 7 сп. $\Rightarrow$ 49 пар

если $f(x) = 2$, то x - 3 спос, y - 4 спос $\Rightarrow$ 12 пар

если $f(x) = 3$, то x - 1 спос., y - 3 способа $\Rightarrow$ 3 пары

если $f(x) = 4$, то x - 2 способа, y - 1. $\Rightarrow$ 2 пары

Итого: $140 + 49 + 12 + 3 + 2 = 206$

Ответ: 206 пар

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

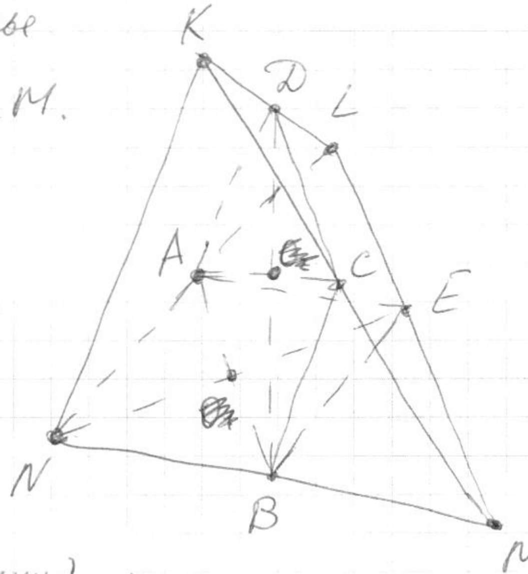
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7



A, B, C, D, E – середины рёбер LN, MN, MK, KL, LM.

ω – данная сфера.

$N, A, E, B \in \omega$, они лежат в одной плоскости $\Rightarrow$

$BNAE$ – вписанный, но $BN \parallel AE$ и

$AN \parallel BE$ (ср. линии) $\Rightarrow BNAE$ – парал-м, впис. в окр. $\Rightarrow$ прямоугольник $\Rightarrow \angle N = 90^\circ$

$AB \parallel LM \parallel CD$ (ср. линии), $AD \parallel KN \parallel BC$ (аналогично)

$\Rightarrow ABCD$ – парал-м, $A, B, C, D \in \omega \Rightarrow ABCD$ – впис.

$\Rightarrow ABCD$ – прямоуг. $\Rightarrow BC \perp AB \Rightarrow KN \perp LM \Leftrightarrow$

$\vec{KN} \cdot \vec{LM} = 0 \Leftrightarrow \vec{KN} \cdot (\vec{KM} - \vec{KL}) = 0 \Leftrightarrow$

$\vec{KN} \cdot \vec{KM} = \vec{KN} \cdot \vec{KL} \Leftrightarrow KN \cdot KM \cdot \cos\angle MKN = KN \cdot KL \cdot \cos\angle LKN$

$\Leftrightarrow$ пусть $\angle LKN = \alpha$, $\angle MKN = \beta \Rightarrow 1 \cdot \cos\beta = 3 \cdot \cos\alpha$

Пусть $KN = a$. По т. косинусов для $\triangle KNL$ и $\triangle KMN$:

$MN^2 = a^2 + 1^2 - 2a \cdot 1 \cos\beta = 2 \Rightarrow \cos\beta = \frac{a^2-1}{2a}$

$LN^2 = a^2 + 3^2 - 6a\cos\alpha = a^2 + 9 - 2a\cos\beta =$

$= a^2 + 9 - a^2 + 1 = 10 \Rightarrow LM^2 = LN^2 + MN^2 = 12$ (по т. Пифагора)

$\Rightarrow LM = 2\sqrt{3}$

продолж. №7 (1)

~~Пусть O – центр ω, O_1 и O_2 – его проекции на (ABE) и (ABC) – это центры опис. окружностей $BNAE$ и $ABCD$. Пусть $OO_1 = h_1$, $OO_2 = h_2$.~~

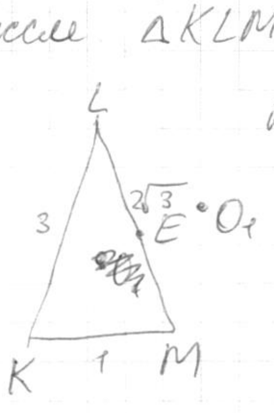
~~Тогда $OA^2 = h_1^2 + AO_1^2 = h_2^2 + AO_2^2$~~

~~$AO_1 = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{4} LM = \frac{\sqrt{3}}{2}$~~

~~$AO_2 = \frac{1}{2}$~~

Пусть R – радиус искомой сферы Ω, а O – её центр. O лежит на перпендикулярах к плоск. (KLM) и (NLM), восставл. в центрах опис. окр. O_1 и E $\triangle KLM$ и NLM. Пусть $OE = h_1$, $OO_1 = h_2$.

Рассм. $\triangle KLM$:



по т. косинусов: $LM^2 = KL^2 + KM^2 - 2KL \cdot KM \cos\angle MKL$

$\Rightarrow \cos\angle MKL = \frac{10-12}{2\cdot 3\cdot 1} = -\frac{1}{3}$

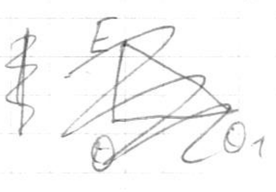
$\Rightarrow \sin\angle MKL = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

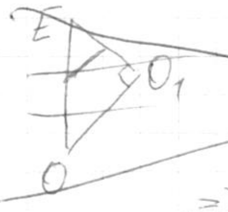
$\Rightarrow 2O_1K = \frac{LM}{\sin\angle MKL} \Rightarrow O_1K = \frac{2\sqrt{3}\cdot 3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

~~$LE = \sqrt{3}$, $LO_1 = \frac{3\sqrt{6}}{2} \Rightarrow O_1E^2 = \frac{9\cdot 6}{4} - 3 = \frac{42}{4} = \frac{21}{2}$~~

~~$R^2 = h_2^2 + O_1K^2 = h_2^2 + \frac{27}{2} = h_1^2 + EM^2 = h_1^2 + 3$~~

~~Рассм. $\triangle OO_1E$~~





~~$OO_1 \perp O_1E$~~

~~т.к. $EO_1 \subset (KLM)$~~

~~$\Rightarrow h_1^2 = O_1E^2 + h_2^2$~~

~~$\Rightarrow h_1^2 = h_2^2 + \frac{21}{2}$~~

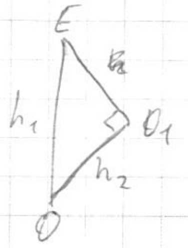
продолж №7 (2)

~~$\Rightarrow R^2 \geq \frac{27}{2}$ и равенство достигается, если~~

$$R^2 = h_1^2 + EM^2 = h_1^2 + 3 = h_2^2 + O_1K^2 = h_2^2 + \frac{27}{2}$$

$$\Rightarrow h_1^2 - h_2^2 = EO_1^2 = \frac{21}{2}$$

Рассм. $\triangle OO_1E$: $OO_1 \perp O_1E$ т.к. $EO_1 \subset (KLM)$



$\Rightarrow EO \geq EO_1 \Rightarrow h_1 \geq EO_1$

$\Rightarrow R^2 \geq EO_1^2 + 3 = \frac{21}{2} + 3 = \frac{27}{2} \Rightarrow R \geq \frac{3\sqrt{6}}{2}$

и достигается, если $EO_1 \equiv EO$,

т.е. $(KLM) \perp (NLM)$

Ответ: $LM = 2\sqrt{3}$, $R_{min} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

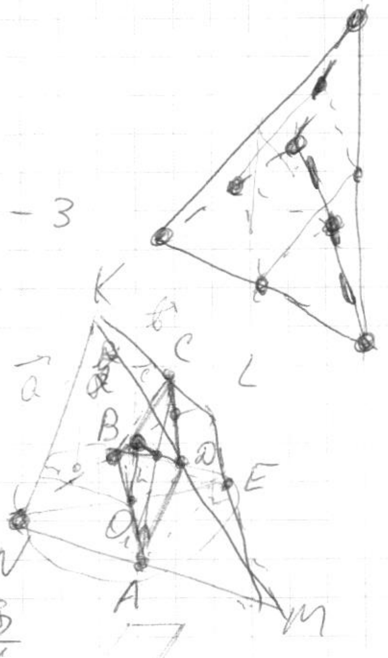
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

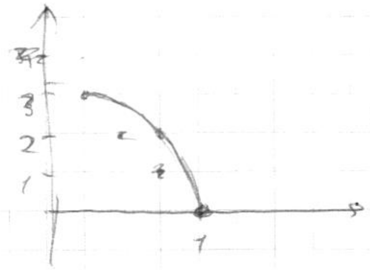


$x=\frac{1}{4} \Rightarrow 4+\frac{4}{1-5}=3$

$x=\frac{3}{4} \Rightarrow 4+\frac{4}{3-5}=4-\frac{4}{2}=2$

$x=1 \Rightarrow 4+\frac{4}{-1}=0$

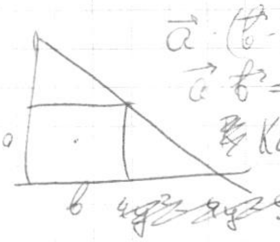
$\cancel{\frac{-36}{-64}} = \cancel{\frac{9}{16}}$



$16x-16 \ge 4ax^2+4bx-5ax-5b$

$4ax^2+(4b-5a-16)x-5b+16 \le 0$

$x_b = \frac{5a+16-4b}{8a}$



$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$

$KL\cdot\cos\angle LKN = KM\cdot\cos\angle MKN$

$x \ge 12y$

$x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0$

$x^2+36y^2-12x-36y-45=0$

$3x^2+26xy$

$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\frac{1}{3}$

$x^2-12x+36y^2-36y-45=0$

$MN^2=a^2+1-2a\cos\alpha$

$\cos\alpha=\frac{a^2-1}{2a}$

$\frac{D}{4}=36-36y^2+36y+45=$

$=9(4y-4y^2+9)$

$LN^2=a^2+9-6a\cos\beta$

$36y^2-36y+x^2-12x-45$

$x=\frac{6\pm3\sqrt{4y-4y^2+9}}{}$

$\frac{2a(a^2-1)}{2a}$

$18\cdot 2(x^2-12x-45)$

$=a^2+9-a^2+1=10$

$=36(9-x^2+12x+5$

$\sqrt{12}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \quad | +45$$

$$\begin{cases}(x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)}\\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=45+45\end{cases}$$

$x-6=a$

$2y-1=b$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$a-6b \geq 0$

$$\begin{cases} a^2+36b^2-12ab=ab \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$\Leftrightarrow \quad (a-9b)(a-4b)=0$

1) $a=9b \Rightarrow 90b^2=90$

$b^2=1$

$$\left[\begin{array}{l} b=1 \Rightarrow a=9 \Rightarrow a-6b>0 \\ b=-1 \Rightarrow a=-9 \Rightarrow a-6b<0 \text{ — не ок} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x-6=9 \\ 2y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases}$$

2) $a=4b \Rightarrow 25b^2=90$

$b^2=\frac{18}{5}$

$$\left[\begin{array}{l} b=3\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow a=12\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ b=-3\cdot\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow a=-12\cdot\sqrt{\frac{2}{5}} \end{array}\right.$$

$(12-18)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}<0 \Rightarrow$ 1 не подходит

$(-12+18)\sqrt{\frac{2}{5}}>0 \Rightarrow$ подходит

$\cancel{b=}$ $\begin{cases} x-6=-12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ 2y-1=-3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$; $\begin{cases} x=6-12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y=\frac{1}{2}-\frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$

Ответ: $(15;1)$; $\left(6-12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{1}{2}-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 12y & \text{– это условие проверим в конце} \\ x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6=(x-6)(2y-1) \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \end{cases}$

$x^2-26xy+12y+x-6+144y^2=0$

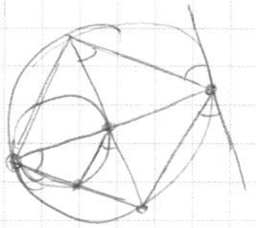
$x^2+36y^2-12x-36y-45=0$

$$\begin{cases} (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \\ x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \end{cases}$$

$(x-6) \cancel{-} 6(2y-1)=\sqrt{(x-6)}$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y\geq 0 \\ x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \end{cases}$$



$\cancel{(x-6)^2}$ $\cancel{(x-6y-3)}(x-$

2 3

3 15

$x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0$

$x^2+36y^2-12x-36y-45=0$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x-x^2>0$

$x(10-x)>0$

$x\in(0;10)$

$\cancel{10x-x^2}$ $\cancel{\frac{10}{-2}=-5}$

$\cancel{5\cdot 5+5=28}$

32
17
224
32
544

$10x-x^2=t>0$, $t\leq 25$

$t+t^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 t}=\left(3^{\log_3 5}\right)^{\log_3 t}=t^{\log_3 5}$

$t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}\geq 0$

$BD^2=8y^2=\frac{17^2}{2^2}$

$y^2=\frac{17}{4\sqrt{2}}$

$4^{\log_3 t}$ $3^{\log_3 t}$

$3^{\log_3 t}+4^{\log_3 t}\geq 5^{\log_3 t}$

$\ln 3\cdot 3^{\log_3 t}\cdot\frac{1}{\ln 3\cdot t}+\ln 4\cdot 4^{\log_3 t}\cdot\frac{1}{\ln 3\cdot t}-\ln 5\cdot 5^{\log_3 t}\cdot\frac{1}{\ln 3\, t}=$

$=\frac{1}{\ln 3t}\left(\ln 3\cdot 3^{\log_3 t}+\ln 4\, 4^{\log_3 t}-\ln 5\cdot 5^{\log_3 t}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\ln 3 \cdot 3^{\log_3 t} + \ln 4 \cdot 4^{\log_3 t} - \ln 5 \cdot 5^{\log_3 t}$

$3^a + 4^a \geq 5^a$

$a \leq 0$: $3^a \geq 5^a$ верно

$4^a > 0$

хочу при $a \leq 2$ верно

$\ln 3 \cdot 3^a + \ln 4 \cdot 4^a - \ln 5 \cdot 5^a$

$\ln^2 3 \cdot 3^a + \ln^2 4 \cdot 4^a - \ln^2 5 \cdot 5^a$

$5^a - 4^a - 3^a \leq 0$

$\log_5(3^a + 4^a) \geq a$

$\log_5(3^a + 4^a) - a \geq 0$

$\frac{1}{\ln 5 \cdot (3^a + 4^a)} \cdot (\ln 3 \cdot 3^a + \ln 4 \cdot 4^a) - 1$

$f(x) = f(y) + f(x/y)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

$\frac{\ln 3 \cdot 3^a + \ln 4 \cdot 4^a}{\ln 5 \cdot 3^a + \ln 5 \cdot 4^a} < 1$

$f(5) = 1$ $f(7) = 1$ $f(23) = 5$ $x = 2, 3 \Rightarrow f(x) = 0$

$f(10) = 1$ $f(14) = 1 = f(21)$ $x = 4, 6 \Rightarrow f(x) = f(2) + f(3) = 0$

$f(15) = 1$ $f(13) = 3$ $f(8) = 0$

$f(20) = 1$ $f(11) = 2$ $f(16) = 0$ $f(12) = 0$

$f(25) = 2$ $f(22) = 2$ $f(17) = 4$ $f(19) = 4$ $f(9) = 0$ $f(18) = 0$ $f(24) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)