ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

1). $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ ОДЗ: $xy-x-2y+2\geqslant 0 \Leftrightarrow$ ~~(x-2)~~ $\Leftrightarrow (x-2)(y-1)\geqslant 0$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ (x^2-4x+4)+(9y^2-18y+9)-13=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$ введём новые переменные $a=x-2$; $b=y-1$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow$ ~~a>~~

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2b\geqslant 0 \\ a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geqslant 2b \\ a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\geqslant 2b \\ (a^2-ab)-(4ab-4b^2)=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geqslant 2b \\ a(a-b)-4b(a-b)=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\geqslant 2b \\ (a-4b)(a-b)=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geqslant 2b \\ \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b \end{array}\right. \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

2.1). Случай, когда $a = b$

$$\begin{cases} a \geq 2b \\ a = b \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2a \\ 10a^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq 0 \\ a^2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a = \sqrt{\frac{5}{2}} \\ a = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a = -\sqrt{\frac{5}{2}};\ b = -\sqrt{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y - 1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}} \\ y = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$. Проверим ОДЗ: $(x-2)(y-2) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \cdot \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2} \geq 0$ - верно $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(2 - \sqrt{\frac{5}{2}};\ 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ - подходит

2.2) Случай, когда $a = 4b$

$$\begin{cases} a \geq 2b \\ a = 4b \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b \geq 2b \\ 16b^2 + 9b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ 25b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow b = 1;\ a = 4b = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = y - 1 \\ 4 = x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 6 \end{cases}$$

Проверим ОДЗ: ~~a·b~~ $(x-2)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 1 \geq 0$ - верно $\Rightarrow$

$\Rightarrow (6;2)$ - корень

$\boxed{\text{Ответ: } (6;2);\ \left(2 - \sqrt{\frac{5}{2}};\ 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right)}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$$

1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=2\sin\left(2\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)=$

$=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{4}{5}$

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{2}{5}\\ \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\end{cases}\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt5}\cos2\beta=-\frac{2}{5}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \cos2\beta=\frac{2\sqrt5}{5}$

2) $\sin^2 2\beta+\cos^2 2\beta=1\Rightarrow \frac{4\cdot5}{25}+\sin^2 2\beta=1\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2 2\beta=1-\frac{4}{5}\Rightarrow \sin^2 2\beta=\frac{1}{5}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right.$

3) $\sin(2\alpha+2\beta)=\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cdot\frac{2\sqrt5}{5}+$

~~3.1) $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5}\Rightarrow\sin(2\alpha+2\beta)=\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=$~~

~~$=\frac{2\sqrt5}{5}\sin2\alpha+\frac{\sqrt5}{5}\cos2\alpha\Rightarrow\frac{2\sqrt5}{5}\sin2\alpha+\frac{\sqrt5}{5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$~~

$\cancel{\frac{2\sqrt5}{5}\sin 2\alpha + \frac{\sqrt5}{5}\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt5}{5}}$

$\cancel{2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1}$

$\cancel{3.1.1)}$ $\cancel{\sin(2\alpha+4\beta) = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta =}$

$= 8 - \frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2\sqrt5}{5}$

3.1) Если $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) =$

$= \cancel{-\frac{1}{\sqrt5}} = -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2\sqrt5}{5} + \frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos(2\alpha+2\beta)$

$\sin^2(2\alpha+2\beta) + \cos^2(2\alpha+2\beta) = 1 \Rightarrow \cos^2(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2\sqrt5}{5} \\ \cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2\sqrt5}{5} \end{array}\right.$

3.1.1). Если $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2\sqrt5}{5}$, тогда

$\sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2\sqrt5}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 0$

Тогда $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = \frac{3}{5} \\ \cos 2\alpha = -\frac{3}{5} \end{array}\right.$

3.1.1.1). $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{4}{5} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$4\operatorname{tg}^2\alpha - 4 = 10\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow 2\operatorname{tg}^2\alpha - 5\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$

3.1.1.2). ~~3.1.3).~~ $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{5} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$4 - 4\operatorname{tg}^2\alpha = 10\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow 2\operatorname{tg}^2\alpha + 5\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.1.2) $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2\sqrt5}{5}$, тогда

$\sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{2}{5} + \left(-\frac{2\sqrt5}{5}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{4}{5}$

тогда $\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \pi + \pi k, k\in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z \Rightarrow$ ~~$tg\alpha = 1$~~ $tg\alpha = 0$ или он несуществует

3.2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

3.2.1) ~~$\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2\sqrt5}{5}$~~

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta) =$

$= -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2\sqrt5}{5} + \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5} - \frac{\cos(2\alpha+2\beta)}{\sqrt5}$

3.2.1) $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2\sqrt5}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{2}{5} - \frac{2\sqrt5}{5\sqrt5} = -\frac{4}{5}$

Получаем $\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = 0$ или он несуществует

~~3.2.2) $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2\sqrt5}{5}$ $\sin 2\beta$~~

3.2.2) $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2\sqrt5}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{2}{5} + \frac{2\sqrt5}{5\sqrt5} = 0 \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

Получаем тоже самое, что и в пункте 3.1.1)

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = \frac{5\pm\sqrt{41}}{4} \\ tg\,\alpha = \frac{-5\pm\sqrt{41}}{4} \end{array}\right.$$

Ответ: $tg\,\alpha = 0$; $tg\alpha = \frac{5+\sqrt{41}}{4}$; $tg\alpha = \frac{5-\sqrt{41}}{4}$
$tg\alpha = \frac{-5+\sqrt{41}}{4}$; $tg\alpha = \frac{-5-\sqrt{41}}{4}$

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

ОДЗ: $x^2+18x>0 \Rightarrow x(x+18)>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+(x^2+18x) \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

$t=x^2+18x$, на ОДЗ $t>0 \Rightarrow |t|=t$

$$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13} \Leftrightarrow t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

т.к. $t>0$, то слева и справа от знака $\geq$ стоят возрастающие ф-ии. Найдём их производные (Продолжение на стр 12.

~~$f(x)=t^{\log_{12}5}+t \Rightarrow f'(x)=\log_{12}5\cdot t^{\log_{12}\frac{5}{12}}+1$~~

~~$g(x)=t^{\log_{12}13} \Rightarrow g'(x)=\log_{12}13\cdot t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$~~

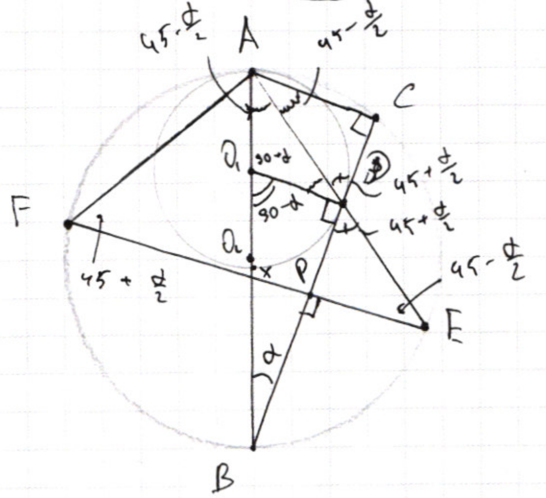
~~$f(t)=t^{\log_{12}13}-t^{\log_{12}5}$ сравним с нулём~~

~~$t^{\log_{12}13}-t^{\log_{12}5}>0 \Leftrightarrow (\log_{12}13-\log_{12}5)(t-1)>0 \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow t-1>0 \Rightarrow t>1 \Rightarrow$ если $t>1$, то $f(t)>0$.~~

~~Если $t<1$, то $f(t)<0$~~

№4.



R - ?

r - ?

$\angle AFE$ - ?

$S(\triangle AFE)$ - ?

$CD=8$

$BD=17$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~1). $\angle ABC = \alpha$; тогда $\angle BAC = 90 - \alpha$, т.к. $\angle ACB = 90°$~~

1. $\angle ACB = 90°$, т.к. опирается на диаметр AB

2). $\angle ABC = \alpha \Rightarrow \angle BAC = 90 - \alpha$, т.к. $\triangle ABC$ − ~~равноб~~ пр/уг.

3) $\angle BO_1D = 90 - \alpha$, т.к. $\triangle BO_1D$ − пр/уг ($O_1D \perp BD$, т.к. BD − касательная)

4) $\angle AO_1B = 180 - \angle BO_1D = 180 - 90 + \alpha = 90 + \alpha$

5) $\angle O_1AD = \angle O_1DA = \dfrac{180 - (90+\alpha)}{2} = 45 - \dfrac{\alpha}{2}$, т.к.

$\triangle O_1AB$ − р/б ($O_1A = O_1D$ как радиусы)

6). $\angle DAC = \angle BAC - \angle O_1AD = 90 - \alpha - 45 + \dfrac{\alpha}{2} = 45 - \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AD$ − биссектриса $\triangle BAC \Rightarrow$ по её св-ву

$$\frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow \frac{8}{17} = \frac{AC}{2R}$$

~~7). в $\triangle ACD$: $tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{CD}{AC} = \frac{8}{AC}$~~

7). $\triangle BCA \sim \triangle BDO_1$ по 2 углам $\Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BO_1}{BA} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{17}{25} = \frac{2R - r}{2R} \Rightarrow \frac{17}{25} = 1 - \frac{r}{2R} \Rightarrow \frac{r}{2R} = \frac{8}{25}$$

8) также $\dfrac{O_1D}{AC} = \dfrac{BD}{BC} \Rightarrow \dfrac{r}{AC} = \dfrac{17}{25} \Rightarrow AC = \dfrac{25r}{17}$

8). $\angle ADC = 90 - \angle CAD = 45 + \dfrac{\alpha}{2}$, т.к. $\triangle ACD$ − пр/уг

9. $\angle FEA = 90 - (45+\frac{\alpha}{2}) = 45 - \frac{\alpha}{2}$, т.к. в $\triangle PE$ - пр/бс

10). $\angle FEA = \angle EAC \Rightarrow FE \parallel AC$

11). По св-ву касательной и секущей $BD^2 = BX \cdot BA \Rightarrow$

$\Rightarrow 17^2 = (2R-2r)\cdot 2R \Rightarrow 17^2 = 4R(R-r)$

$17^2 = 4R^2 - 4Rr$

12). $\begin{cases} 17^2 = 4R^2 - 4Rr \\ r = \frac{16}{25}R \end{cases} \Rightarrow 17^2 = 4\cdot R^2 - 4R\cdot\frac{16}{25}R$

$17^2 = 4R^2 - \frac{64}{25}R^2 = \frac{36}{25}R^2$

$R^2 = \frac{17^2\cdot 5^2}{6^2} \Rightarrow R = \frac{17\cdot 5}{6} = \boxed{\frac{85}{6} = R}$

$r = \frac{16}{25}\cdot\frac{85}{6} = \frac{4\cdot 4^2\cdot 5\cdot 17}{5\cdot 5\cdot 2\cdot 3} = \frac{8\cdot 17}{15} = \boxed{\frac{136}{15} = r}$

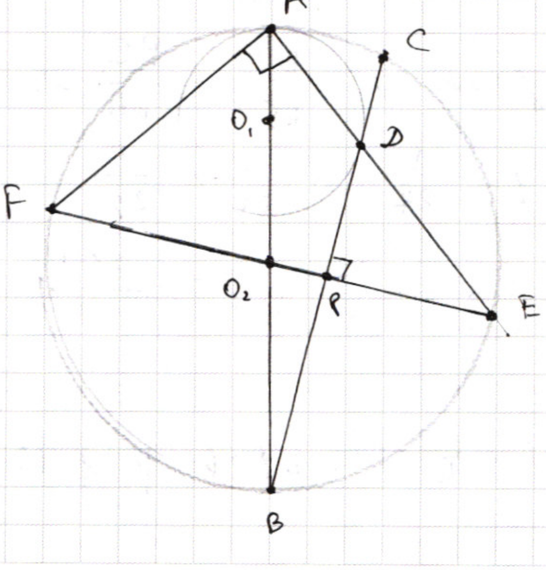
13). $\smile CE = 2\cdot\angle EAC = 2(45-\frac{\alpha}{2}) = 90-\alpha$

$\smile AC = 2\angle ABC = 2\alpha$

$\angle AFE = \frac{\smile AC + \smile CE}{2} = \frac{90-\alpha+2\alpha}{2} = 45+\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

14). $\triangle\ \angle FAE = 180 - \angle AFE - \angle FEA = 180 - 45 + \frac{\alpha}{2} - 45 - \frac{\alpha}{2} = 90°$

$\Rightarrow FE$ - диаметр Ω_2 и проходит ~~через~~ через O_2.



15). Из пункта 7 имеем

$AC = \frac{25}{17}\cdot r = \frac{25}{17}\cdot\frac{8\cdot 17}{15} = \frac{40}{3}$

tg

$\triangle ACD$; $tg(\angle ADC) = tg(45+\frac{\alpha}{2}) = tg(\angle AFE) = \frac{AC}{CD} = \frac{40}{3\cdot 8} = \frac{5}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $\angle AFE = \operatorname{arctg}\frac{5}{3}$.

$tg(\angle AFE) = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \begin{matrix} AE = 5x \\ AF = 3x \end{matrix}$

т.к. FE - диаметр, то $FE = 2R = 2 \cdot \frac{85}{6} = \frac{85}{3}$

Th Пифагора в FAE: $FE^2 = AE^2 + AF^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25x^2 + 9x^2 = \frac{17^2 \cdot 5^2}{3^2} \Rightarrow 34x^2 = \frac{17^2 \cdot 5^2}{3^2} \Rightarrow x^2 = \frac{17 \cdot 5^2}{2 \cdot 3^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{\frac{17}{2}}$

$AE = 5x = \frac{25}{3} \cdot \sqrt{\frac{17}{2}}$

$AF = 3x = 5\sqrt{\frac{17}{2}}$

$S(\Delta AFE) = \frac{1}{2} AE \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{3} \cdot 5 \cdot \frac{17}{2} = \frac{125 \cdot 17}{12} = \frac{2125}{12}$

$\boxed{\text{Ответ: } R = \frac{85}{6};\ r = \frac{136}{15};\ tg(\angle AFE) = \frac{5}{3};\ S(\Delta AFE) = \frac{2125}{12}}$

№5.

1) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f(y^{-1}) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

2) $f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

3) $f(1) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$, где $y \in$ y - произвольно, $y \neq 0$

$0 = f(y) + f(\frac{1}{y}) \Rightarrow f(y) = -f(\frac{1}{y})$ – функции от

противоположных чисел ~~про~~ отличаются знаком

Значит $f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = \underline{\underline{f(x) - f(y)}} = f(\frac{x}{y})$

4) Подсчитаем для простых

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$

$f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$

$f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$

$f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$

$f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$

$f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5$

подсчитаем для остальных

~~$f(6) = f(2) + f(3) = 0$~~

~~$f(7) = f$~~

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(12) = f(3) + f(4) = 0$

$f(14) = f(7) + f(2) = 1$

$f(15) = f(5) + f(3) = 1$

$f(16) = f(8) + f(2) = 0$

$f(18) = f(9) + f(2) = 0$

$f(20) = f(5) + f(4) = 1$

$f(21) = f(7) + f(3) = 1$

$f(22) = f(11) + f(2) = 2$

$f(24) = f(8) + f(3) = 0$

~~$f(22) = f(4) + f(4) = 2$~~

5) Перепишем все значения в красивом виде

на след. странице.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(4)=0$, $f(5)=1$, $f(6)=0$

$f(7)=1$, $f(8)=0$, $f(9)=0$, $f(10)=1$, $f(11)=2$, $f(12)=0$

$f(13)=3$, $f(14)=1$, $f(15)=1$, $f(16)=0$, $f(17)=4$, $f(18)=0$

$f(19)=4$, $f(20)=1$, $f(21)=1$, $f(22)=2$, $f(23)=5$, $f(24)=0$

кол-во 0: 11
кол-во 1: 7
кол-во 2: 2
кол-во 3: 1
кол-во 4: 2
кол-во 5: 1

~~f(7)=~~

т.к. ~~$f(x)-f(y)$~~

т.к. по условию $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, то $f(x)-f(y)<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)<f(y) \Rightarrow$ нам надо просто найти кол-во пар чисел, значение функций от которых различны.

1) Значение одной 0, а другой 1: $11\cdot7=77$

Одной 0, а другой 2: ~~$11\cdot7$~~ $11\cdot2=22$

одной 0, а другой 3: $11\cdot1=11$

одной 0, а другой 4: $11\cdot2=22$

одной 0, а другой 5: $11\cdot1=11$

одной 1, а другой 2: $7\cdot2=14$

одной 1, а другой 3: $7\cdot1=7$

одной 1, а другой 4: $7\cdot2=14$

одной 1, а другой 5: $7\cdot1=7$

одной 2, а другой 3: $2\cdot1=2$

одной 2, а другой 4: $2 \cdot 2 = 4$

одной 2, а другой 5; $2 \cdot 1$

одной 3, а другой 4: $1 \cdot 2$

одной 3, а другой 5: $1 \cdot 1$

одной 4, а другой 5: $2 \cdot 1$

Подсчитаем сумму: $11 \cdot (7+2+1+2+1) + 7(2+1+2+1) + 2(1+2+1) + 1(2+1) + 2 \cdot 1 =$

$= 11 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 + 2 = 143 + 42 + 8 + 3 + 2 =$

$= 143 + 50 + 5 = 143 + 55 = 198$

т.к. $(x;y)$ и $(y;x)$ – различны, то домножим на 2

$198 \cdot 2 = 396$

$\boxed{\text{Ответ: } 396}$

№3 (продолжение)

$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$t\left(t^{\log_{12}(5)-1} - t^{\log_{12}(13)-1} + 1\right) \geq 0$

$t\left(t^{\log_{12} \frac{5}{12}} - t^{\log_{12} \frac{13}{12}} + 1\right) \geq 0$, т.к. $t > 0$ то можно сократить

$t^{\log_{12} \frac{5}{12}} - t^{\log_{12} \frac{13}{12}} + 1 \geq 0$

$t^{\log_{12} \frac{5}{12}}\left(1 - t^{\log_{12} \frac{2}{3}}\right) + 1 \geq 0$

№6.

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$

на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$

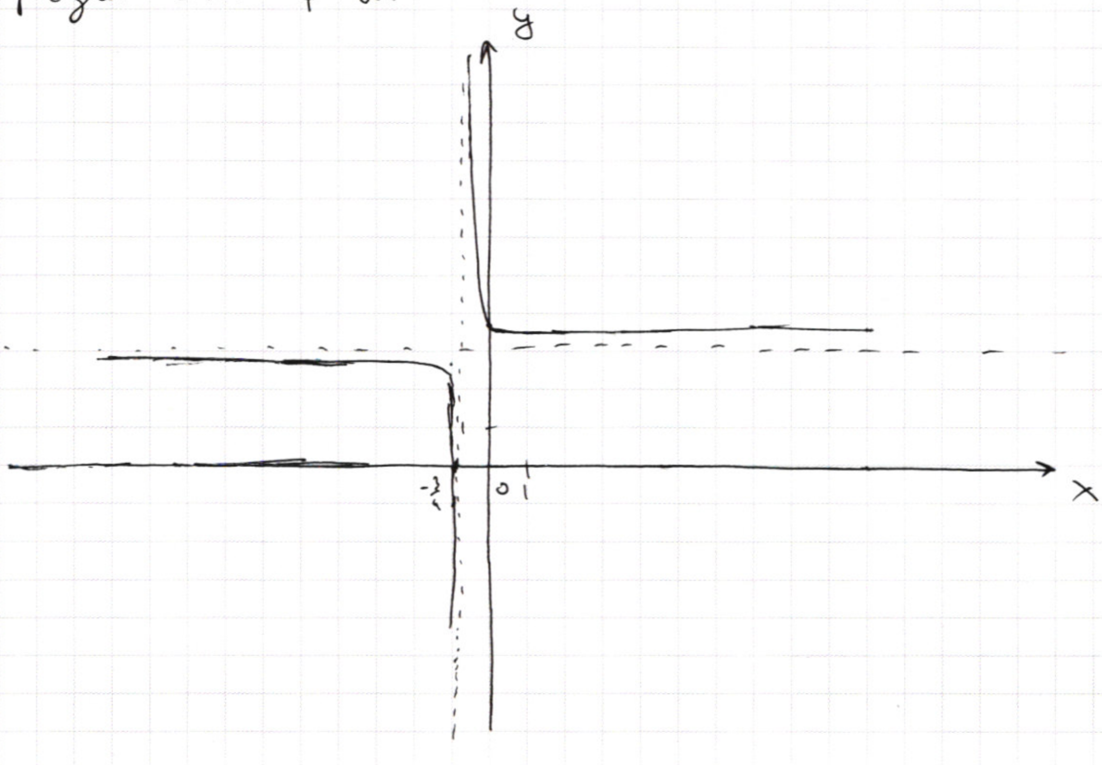
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x) = \frac{12x+4}{4x+3} = \frac{3(4x+3)+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$ - гипербола

$g(x) = -8x^2 - 30x - 17 = 2\left(4x^2 + 15x + \left(\frac{15}{4}\right)^2\right) - \frac{225}{8} - 17 =$

$= 2\left(4x + \frac{15}{4}\right)^2 - \frac{461}{8}$ - парабола

Изобразим эти ф-ии



$a^2 - ab + 4b^2 \cdot 4ab = a(a - b) + 4b(b - a)$

5.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + (x^2+18x) \geqslant |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13}$ $\quad t \geqslant 0$

$\cancel{5^{\log_{12} t} + t \geqslant t^{\log_{12} 13}}$ $\quad t = \log_{12}(x^2+18x)$

$\cancel{a = \log_{12} t \Rightarrow t = 12^a}$ $\quad x^2+1$ $\quad t \geqslant 0$

$5^t + t^{12} \geqslant t^{12\log_{12} 13}$

$\cancel{5^t \geqslant t^{12} \cdot t}$ $\quad 5^t \geqslant t^{12\log_{12} 13} - t^{12}$

$5^t \geqslant (t^{12})^{\log_{12} 13} - t^{12}$

$t = 5^{\log_{12}(x^2+18x)} \Rightarrow \log_{12}(x^2+18x) = \log_5 t$

$x^2 + 18x = 12^{\log_5 t}$

$t + 12^{\log_5 t} \geqslant 12^{\log_{12} 13 \log_5 t}$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha$ - ?

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

a

~~tg~~ $\sin(2(\alpha+\beta) + 2\beta) = \sin(2(\alpha+\beta))\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cos(2(\alpha+\beta)) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\quad b = \sin(2(\alpha+\beta))$

$a.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x^2 - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 12 = 0 \end{cases}$$

$x^3 +$

$D =$ $x^2 - 4x + (9y^2 - 18y - 12) = 0$

$D = \cancel{16}$ $\frac{D}{4} = 1 - 9y^2 + 18y + 12 =$

$= -9y^2 + 13$

$(y-1)^2 = y^2 - 2y + 1$

$-\frac{189}{18}\,\big|\,\frac{9}{21}$

$9 \cdot 21$

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4x^2 y = xy - x - 2y + 2 \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 12 = 0 \end{cases}$$

$12 \times 9 = 108$, $108 + 81 = 189$

$9y^2 - 18y + (x^2 - 4x - 12) = 0$

$\frac{D}{4} = 81 - 9x^2 + 36x + 108 = -9x^2 + 36x + 189 =$

$= 9(-x^2 + 4x + 21)$

$D =$

$x^2 - 2y = \sqrt{x(y-1) - 2(y-1)}$

$x^2 - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$9(y-1)^2 = 9y^2 - 18y + 9$ (+) $\Rightarrow x^2 + 9y^2 - 18y - 4x + 12$

$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$\cancel{a = x - 2y}$

$\cancel{b =}$

$$\begin{cases} a = x - 2 \\ b = y - 1 \end{cases}$$

$a - 2b = x - \cancel{2} - 2y + \cancel{2} =$

$= x - 2y$

$25 - 9b^2 - 5ab + 4b^2 = 0$

$\cancel{5b}$ $5b^2 + 5ab - 25 = 0 \Rightarrow b^2 + ab - 5 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

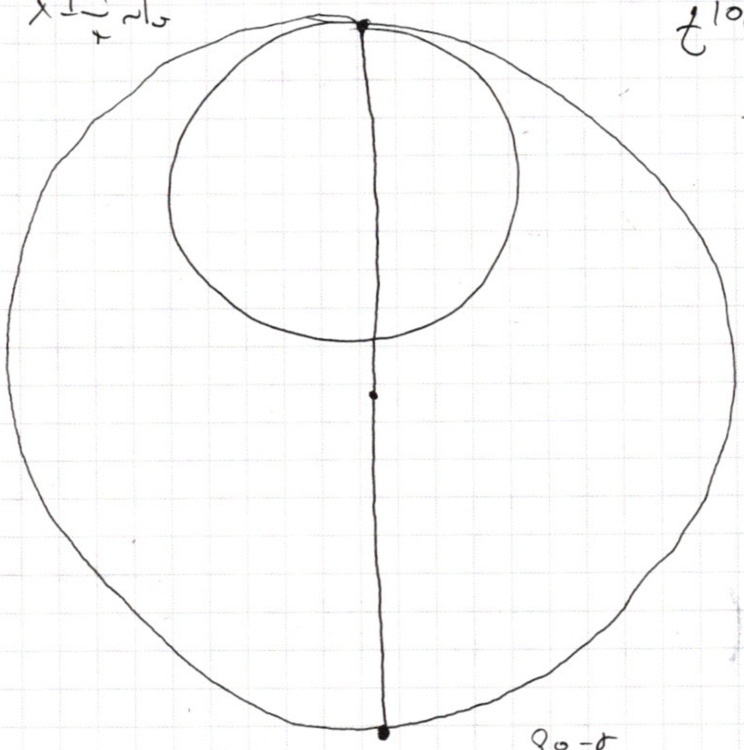
$t^{\log_{12} 60} \geq 2\sqrt{}$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq 2\sqrt{t^{\log_{12} 60}}$

$2\sqrt{t^{\log_{12} 60}} \vee t^{\log_{12} 13}$

$4t^{\log_{12} 60} \vee t^{\log_{12} 65}$

9



$\frac{r}{}$

$\frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$R; r - ?$

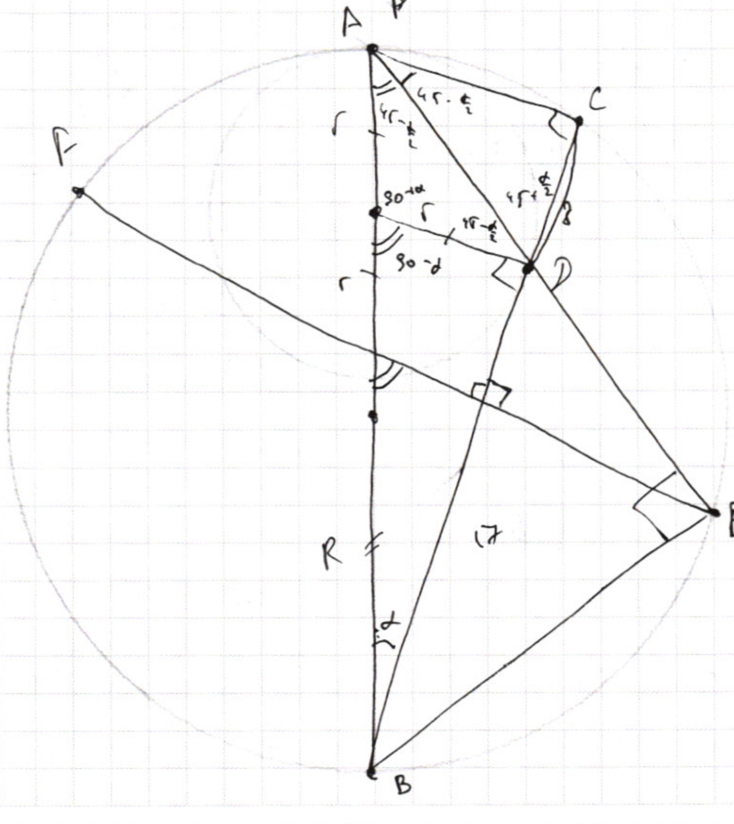
$\angle AFE - ?$

$S(AEF) - ?$

$CD = 8$

$BD = 17$

$90 - \alpha$



$\cos 2\alpha = \frac{17}{R + r}$

$\frac{8}{AC} = \frac{\cancel{2r+R}\ 17}{2r+R\ 2R}$

$\cos\alpha = \frac{25}{\frac{2r+R}{2R}}$

$2 \cdot 2 \cdot 8 = 15 = \frac{15}{4}$

$2 \cdot 2 \cdot \frac{15}{4} = 15$

$\frac{15}{16}$ $\frac{225}{16} \cdot 2 = \frac{225}{8}$

$\cancel{8x^2 + 30x} +$

$2\left(4x^2 + 15x + \left(\frac{15}{4}\right)^2\right)$

$\cancel{-8x^2}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$4\cdot\frac{17^2\cdot 5^2}{6^2}-4\cdot\frac{17\cdot\cancel{8}}{\cancel{8}3}\cdot\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 17}{153}$ —

$\frac{t\cdot \cancel{t^{\log_{12}5}}}{\cancel{t}}$

$=4\left(\frac{17^2\cdot 5^2}{6^2}-\frac{17^2\cdot 4\cdot \cancel{17}}{9}\right)=$

$\frac{t+t^{\log_{12}5}}{2}\geqslant\sqrt{t^{\log_{12}17}}$

$=4\cdot 17^2\left(\frac{5^2}{6^2}-\frac{4}{9}\right)=4\cdot 17^2\cdot\left(\frac{25}{36}-\frac{16}{36}\right)=4\cdot 17^2\cdot\frac{9}{36}$

$\left(t+t^{\log_{12}5}\right)^2\geqslant 2\sqrt{t^{\log_{12}17}}$

$$\begin{array}{r} \times\ 125 \\ 17 \\ \hline 875 \\ +\ 125 \\ \hline 2125 \end{array}$$

$\frac{x}{y}=x\cdot\frac{1}{y}$

$2\ \cancel{\log}\ 2t^{\log_{12}17}\ \vee\ t^{2\log_{12}13}$

$f(1)=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$2t^{\log_{12}17-\log_{12}13^2}\ \vee\ 0$

>0

$f(ab)=f(a)+f(b)$; $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$ $x<7$

$1\leq x,y\leq 24$ $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ $f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(\frac{x^2}{y^2}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)$

$1\leq y$

$f(\cancel{x})+f\left(\frac{1}{y}\right)=$

$a\cdot b=p$; $f(1\cdot p)=f(p)+f(1)$

$f(1)=f(1)+f(1)\Rightarrow f(1)=$

$f(p)=f(p)$

$\cancel{f(1)}$ $f(1\cdot 1)=f(1)+\cancel{f(1)}$

$f(1)=0$.

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f(p)\cdot\left[\frac{p}{4}\right]$

$f(2)=\left[\frac{1}{2}\right]=0$

$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

f

1) $f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(4)=0$;

$f(4)=f(2)+f(2)$; $f(5)$

$$\begin{array}{r} +\ 13 \\ 13 \\ \hline 149 \end{array}$$

$f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(4)=0$; $f(5)=1$

$f(6)=0$; $f(7)=1$; $f(8)=0$; $f(9)=0$; $f(10)=1$; $f(11)=2$;

$f(12)=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha$ -?

$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$X-$

$0{,}5^x$

$\begin{cases} \sin(2\alpha)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha)\cos(4\beta) + \sin(4\beta)\cos(2\alpha) + \sin(2\alpha) = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot \sin\cos(2\beta) = -\frac{4}{8}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos(2\beta) = \frac{2\sqrt5}{5}$

$t^{\log_{12}13} - t^{\log_{12}5}$

$t^{\cancel{\log_{12}13}}($

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cancel{\sin y\cos x}$

$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cancel{\sin y\cos x}$

$\log_{12}5 + \log_{12}13 =$

$= \log_{12} 75$

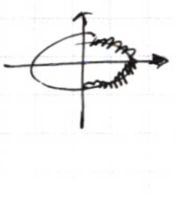
$\sin(x+y) + (\sin(x-y)) = 2\sin x\cos y$

$\frac{8\cdot 17}{5\cdot 3} = \frac{136}{15}$

$x+y=\alpha$

$x-y=\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$



$t^{\log_{12}13} - t^{\log_{12}5} =$

$= t(\log_{12}13 - \log_{12}5)(t-1)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

IV

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad tg2\alpha = \frac{2\,tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ $\qquad \log_{12} 5 \cdot t^{\log_{12}\frac{5}{12}} + 1$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \cancel{2}$ $\qquad \frac{\cos^2 x - \sin x}{\sin x} = \qquad \log_{12} 13 \cdot t^{\log_{12} 13}$.

$2\sin^2\alpha - 1$ $\qquad 25+16 = 41 \qquad t \qquad t>0 \qquad 0^0 = 1$

$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ $\qquad t = 0$

$\cancel{\log_{12} 5 + 1 \vee \log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$ $\qquad t\left(t^{\log_{12}(13)-1} - 1\right) =$ $\qquad \log_{12} 5 + 1 \vee \log_{12} 13$

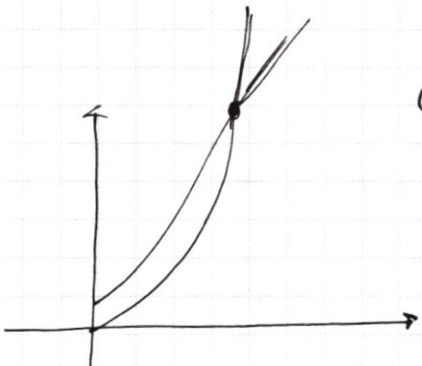
$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ $\qquad = t\left(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1\right)$

$5^{\log_{12} t} = \underline{t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}}$ $\qquad t^{\log_{12}\frac{5}{12}}$ $\qquad \log_{12} 5 + \log_{12} 12 \vee \log_{12} 13$

$0{,}001^1 = 0{,}001$

$t\left(1 + t^{\log_{12} 5 - 1}\right) \geq t^{\log_{12} 13}$

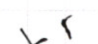
$1 + t^{\log_{12} 5 - 1} \geq t^{\log_{12} 13 - 1}$ $\qquad t^{\log_{12}\frac{13}{5}} - t^{\log_{12}\frac{12}{5}} \leq 1$



$a^x = \cancel{e^{\log_a x}}\ e^{x\ln a} =$

$e^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a \qquad 2^x$

$x' \qquad x^5$



$t^{\log_{12} 13} - t^{\log_{12} 5} = t^{\log_{12} 5}\left(t^{\log_{12} 13 - \log_{12} 5} - 1\right) =$

$= t^{\log_{12}\frac{13}{5}} - 1 = t^{\log 1 - \log_{12} 5} =$

$\log_{12} 12 - \log_{12} 5 = \log.$

$t^{\log_{12}\frac{12}{5}} \geq t^{\log_{12}\frac{13}{5}} - 1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)