МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

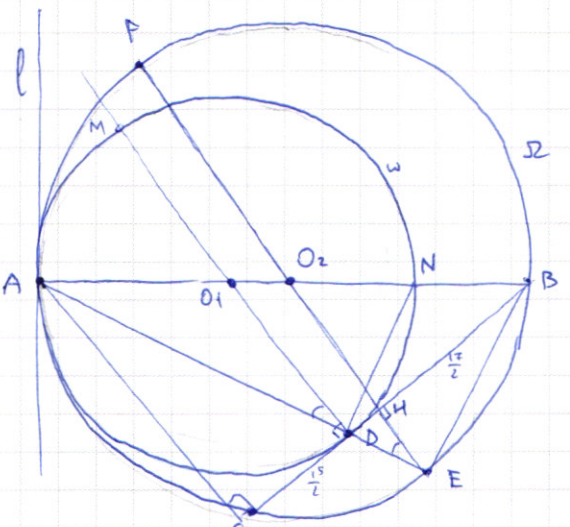
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Дано: $\omega \cap \Omega = A$

AB – диаметр Ω

BC касается ω в D, $C \in \Omega$

$AD \cap \Omega = E$

$EF \cap BC$, $F \in \Omega$ | $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$

Найти: r и R (для ω и Ω соотв.)

$\angle AFE$, S_{AEF}.

Решение:

Пусть $DM \perp BC$, $M \in \omega$

Тогда $DM \cap AB = O_1$ (центр ω), т.к. является перпендикуляром к касательной BC

Пусть $N = AB \cap \omega$. Т.к. $AB \perp l$, где l – общая касательная Ω и ω, то $AN \perp l$ и AN – диаметр (перпендикулярен к касательной).

$\angle ADN = \frac{1}{2} \smile AN_\omega = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ $\angle AEB = \frac{1}{2} \smile AB_\Omega = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ADN \sim \Delta AEB$ по общему $\angle A$ (острому) – (признак подобия для 2-х прямоугольных Δ) $k = \frac{AN}{AB} = \frac{d}{D} = \left(\frac{r}{R}\right)$ (d и D – диаметры)

Пусть $O_2 = EF \cap AB$. $DO_1 \parallel EO_2$ т.к. перпендикулярны BC

$\Rightarrow \angle ADO_1 = \angle AEO_2$ как соответственные при секущей DE и $DO_1 \parallel EO_2$

$\Rightarrow \Delta AO_1D \sim \Delta AO_2E$ по 2 углам ($\angle A$ – общий, $\angle ADO_1 = \angle AEO_2$)

$k = \frac{AD}{AE}$. Из предыдущего подобия $\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{AO_1}{AO_2} = \frac{r}{R}$.

Т.к. $AO_1 = r$, то $AO_2 = R$ и O_2 – центр Ω.

Пусть $EF \cap BC = H$. Диаметр делит перпендикулярную хорду на равные части ($O_2C = O_2B = R \Rightarrow \Delta CO_1B$ – равнобедренный $\Rightarrow O_2H$ – медиана)

$CH = HB = \frac{CB}{2} = \frac{\frac{32}{2}}{2} = 8$. $DH = CH - CD = 8 - \frac{15}{2} = \frac{1}{2}$

~~Из ранее полученного~~ $\cancel{\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{AD}{A}}$

Т.к. $\angle ACB = 90^\circ$ (опирается на диаметр AB), то

$\Delta ACB \sim \Delta O_1DB \sim \Delta O_2HB$ по острому $\angle B$. Запишем из подобия отношения: $\cancel{\frac{AO_1}{AO_2}} = \frac{BO_2}{BO_1} = \frac{BH}{BD}$; $\frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC}$

$$\begin{cases} \dfrac{BO_2}{BO_1} = \dfrac{BH}{BD} \\ \dfrac{BO_1}{BA} = \dfrac{BD}{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{R}{R+(R-r)} = \dfrac{17-1}{17} \\ \dfrac{R+(R-r)}{R+(R-r)+r} = \dfrac{17}{17+15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{R}{2R-r} = \dfrac{16}{17} \\ \dfrac{2R-r}{2R} = \dfrac{17}{32} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ 17R = 16(2R-r) \Leftrightarrow 17R = 32R - 16r \Leftrightarrow 15R = 16r \Leftrightarrow \right.$$

$\Leftrightarrow \dfrac{r}{R} = \dfrac{15}{16}$. Пусть $R = \dfrac{16}{15} r$

Тогда из $\triangle ADN \sim \triangle AEB$: $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{r}{R} = \dfrac{15}{16} \Rightarrow \dfrac{AD}{DE} = \dfrac{15}{16-15} = 15$

Пусть $AD = 15x$ и $DE = x$.

По свойству пересекающихся хорд в Ω:

$AD \cdot DE = BD \cdot DC \Leftrightarrow 15x^2 = \dfrac{255}{4} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{17}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow AE = AD + DE = 16x = 8\sqrt{17}$.

Из свойства касательной и секущей из точки B для ω:

$AB \cdot BN = BD^2 \Leftrightarrow \underset{(D(D-d))}{4R(R-r)} = \dfrac{289}{4} \Leftrightarrow \dfrac{16}{15} r \left(\dfrac{1}{15} r\right) = \dfrac{289}{16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{16}{225} r^2 = \dfrac{289}{16} \Leftrightarrow r^2 = \dfrac{289}{16} \cdot \dfrac{225}{16} \Leftrightarrow r = \dfrac{17 \cdot 15}{4 \cdot 4} =$

$= \dfrac{255}{16}$ $\quad R = \dfrac{16}{15} r = \dfrac{17 \cdot 15}{16} \cdot \dfrac{16}{15} = 17$.

$\sin \angle ABE = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AE}{2R} = \dfrac{8\sqrt{17}}{34} = \dfrac{4\sqrt{17}}{17}$

$\angle ABE = \arcsin\left(\dfrac{4\sqrt{17}}{17}\right)$

$S_{\triangle ABE} = \dfrac{1}{2} AE \cdot BE \qquad BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} =$

$= \sqrt{289 \cdot 4 - 64 \cdot 17} = \sqrt{17(17 \cdot 4 - 64)} = \sqrt{17 \cdot 4(17-16)} =$

$= \sqrt{17 \cdot 4 \cdot 9} = 2\cancel{6}\sqrt{17} = 2\sqrt{17}$

$S_{\triangle ABE} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot 8\sqrt{17} = 8 \cdot 17 = 136$ (кв.ед.)

$\angle AFE = \angle ABE = \dfrac{1}{2} \smile AE_{\Omega} \qquad FE = AB$ (диаметры Ω)

$\angle FAE = \angle BEA = 90^\circ$ (опираются на диаметры)

$\Rightarrow \triangle AFE = \triangle EBA$ по острому $\angle$ и гипотенузе.

$\Rightarrow S_{\triangle AEF} = S_{\triangle EBA} = 136$ кв.ед.

Из равенства также $\angle AFE = \angle EBA = \arcsin\left(\dfrac{4\sqrt{17}}{17}\right)$

$r, R = \dfrac{255}{16}, 17$

Ответы:
1) $\arcsin\left(\dfrac{4\sqrt{17}}{17}\right) = \angle AFE$
2) $r = \dfrac{255}{16}$; $R = 17$
3) 136 кв.ед.

№6.

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

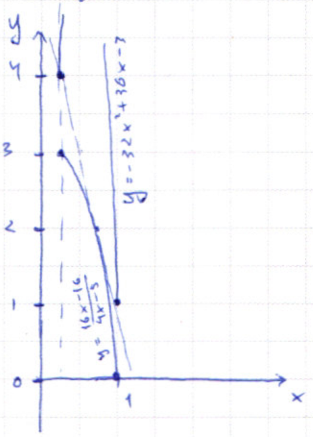
$y = \frac{16x-16}{4x-5}$ (ОДЗ: $x \ne 1,25$) $= \frac{4(4x-5)+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$ (на $[\frac{1}{4}; 1]$)

$y = \frac{1}{x}$, смещённый на $4\uparrow$ и на $1,25 \rightarrow$ — график.

$\Rightarrow$ Имеет вид выпуклой гиперболы с $y(\frac{1}{4}) = 3$, $y(1) = 0$.

$y = -32x^2+36x-3$ — парабола с вершиной в $x = \frac{9}{16}$

$y(\frac{1}{4}) = 4$ $y(1) = 1$, ветви направлены вниз.



~~Пусть $f(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$~~

~~$f'(x) = g'(x-1,25)$, где $g(x) = \frac{1}{x}$~~

~~$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{x-1,25}\right)' = -\frac{1}{(x-1,25)^2}$~~

~~$f'(1) = -\frac{1}{(1-1,25)^2} = -\frac{1}{(-\frac{1}{4})^2} = -16$~~

Пусть $f(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$, а $g(x) = ax+b$

Докажем, что $a = -4$ и $b = 5$ — единственные

$(-4x+5)' = -4$

$f(0,75) = g(0,75) = 2$

$f'(0,75) = \cancel{F'(2)}$, ~~где F~~ $F'(x-1,25)$, где $F(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'(0,75) = F'(-0,5) = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4 = (-4x+5)' = g'(0,75)$.

Значит, графики $y = -4x+5$ и $y = \frac{16x-16}{4x-5}$ касаются в $(0,75; 2)$.

Это значит, что если $\begin{cases} g(0,25) < 4 \\ g(1) < 1 \end{cases}$, то

графики $g(x)$ и $f(x)$ пересекутся из-за выпуклости $f(x)\uparrow$

„Поднять" график $g(x)$ выше не позволяет ограничение, вызванное минимальными значениями квадратичной функции на $[\frac{1}{4}; 1]$.

Значит, единственная $g(x)$ задается уравнением $g(x) = -4x+5$.

Ответ: $(-4; 5)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = [p/4]$ для простых.

Пусть $x = k \cdot y$. Т.к. x и y – натуральные, то $k = \frac{x}{y}$ рациональное

$\Rightarrow f(x) = f(k \cdot y) = f(k) + f(y)$ $\quad f(\frac{x}{y}) = f(k) = f(k) + f(y) - f(y) =$

$= f(k \cdot y) - f(y) = f(x) - f(y)$ $\quad f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$.

Воспользовавшись свойством для простых получим:

x	2	3	5	7	11	13	17	19	23
f(x)	0	0	1	1	2	3	4	4	5

Любое число из $[2;25] \in \mathbb{N}$ – произведение этих простых

Если $n = p_1 \times \ldots \times p_n$, то $f(n) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_n)$

В таком случае:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
f(x)	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

Возможные $(f(x); f(y))$: $(0;1)$; $(0;2)$; $(0;3)$; $(0;4)$; $(0;5)$; $(1;2)$; $(1;3)$; $(1;4)$, $(1;5)$; $(2;5)$; $(2;4)$; $(2;3)$; $(3;4)$; $(3;5)$; $(4;5)$, то есть, это все пары с различными значениями $f(a)$ и $f(b)$ для $(a;b)$

Всего пар чисел с различными $f(x)$:

$k = C_{25}^2 - C_{10}^2 - C_7^2 - C_3^2 - C_2^2 - C_1^2 =$

$= \frac{25 \cdot 24}{2} - \frac{10 \cdot 9}{2} - \frac{7 \cdot 6}{2} - \frac{3 \cdot 2}{2} - 1 - 0 =$

$= 300 - 45 - 21 - 3 - 1 = 255 - 25 = 230$

(Каждое вычитаемое – количество пар с одинаковыми значениями f в наборе для 0, 1, 2, 3, 4, 5 соответственно).

Ответ: 230.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

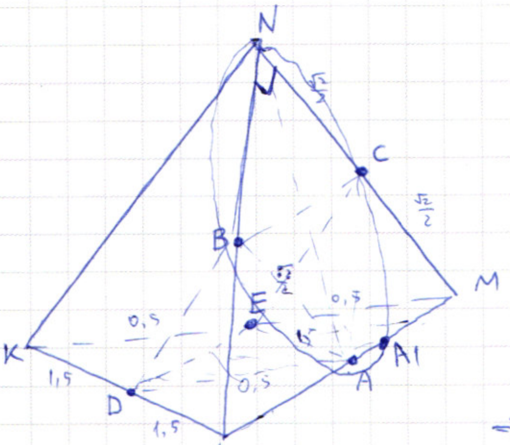
N 7.

Дано: пирамида $KLMN$. N – на сфере со всеми, кроме KN, серединами рёбер.

$KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$

R сферы min – ?

Найти: LM.



Решение:

Назовем середины ребер A, B, C, D, E как на рисунке

Если N, B, C, A лежат на сфере и лежат в одной плоскости, то лежат на окружности, являющееся границей сечения сферы этой плоскостью (сечение сферы всегда круг)

$\Rightarrow BNCA$ – вписанный и выполняется условие $\angle BNC + \angle BAC = 180°$,

По св-ву средней линии в $\triangle MLN$: $AB = \frac{1}{2} MN = NC$ и $AC = \frac{1}{2} NL = BN$;

$AB \parallel NC$ и $AC \parallel BN$ по этому же признаку.

$\Rightarrow ABNC$ – параллелограмм, $\Rightarrow \angle BNC = \angle BAC$.

Из $\angle BNC + \angle BAC = 180°$ получим $\angle BNC = \angle BAC = 90°$

$\Rightarrow ABNC$ – прямоугольник.

Пусть $\omega_{опис}\ ABNC$ пересекает LM в A_1 (вторично.

Т.к. A_1 тоже на сфере, то

DEA_1A – равнобокая трапеция (вписана в сечение сферы).

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№ 3.

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-10x + (10x-x^2)^{\log_3 5} - |x^2-10x|^{\log_3 4} \leqslant 0$$

По ОДЗ: $(10x-x^2) > 0 \Rightarrow |x^2-10x| = 10x-x^2$.

$$(10x-x^2)^{\log_3 5} - (10x-x^2)^{\log_3 4} - (10x-x^2)^{\log_3 3} \leqslant 0$$

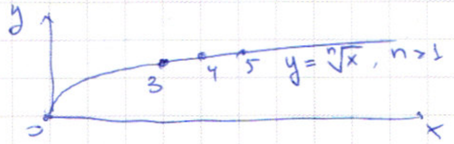
$$10x - x^2 = t$$

$$t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4} - t^{\log_3 3} \leqslant 0 \Leftrightarrow t^{\frac{\log_t 5}{\log_t 3}} - t^{\frac{\log_t 4}{\log_t 3}} - t^{\frac{\log_t 3}{\log_t 3}} \leqslant 0$$

$(t>1)$.

При $t=1$ нер-во верно.

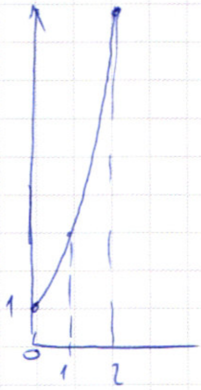
$$\sqrt[\log_t 3]{5} - \sqrt[\log_t 3]{4} - \sqrt[\log_t 3]{3} \leqslant 0.$$



Для $\log_t 3 > 1$ $(t\in(1;3))$ нер-во верно.

Для $\log_t 3 = 1$ тоже верно

Если $t>3$:



$$\log_3 3 < \log_3 4 < \log_3 5 < 1{,}5.$$

$\Rightarrow$ Из-за выпуклости функции $y = t^x$

$$t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4} < \frac{y(2)-y(1)}{6} =$$

$z = \cancel{3}, 5, 6, 7, 8, 9$ для $\log_3 z$

$$= \frac{t^2-t}{6}$$

Для $t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4} > t$ необходимо

$$\frac{t^2-t}{6} \geqslant t \Leftrightarrow \frac{t-1}{6} \geqslant 1 \Leftrightarrow t \geqslant 7.$$

Тоесть, при $t \geqslant 7$ неравенство точно не верно.

$$x^2-10x < 7 \Leftrightarrow x^2-10x-7<0 \Leftrightarrow$$

$$D = 100 - 28 = 72 = (6\sqrt{2})^2$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad f(p) = [p/4]$

$f(a) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(3) = 0 \qquad f(2) = 0$

$f(5) = 1 \qquad f(7) = 1 \qquad f(11) = 2 \qquad f(13) = 3$

$f(17) = 4 \qquad f(19) = 4 \qquad f(23) = 5$

$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{4(4x-4)}{4x-5} = \frac{4(4x-5)+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5} =$

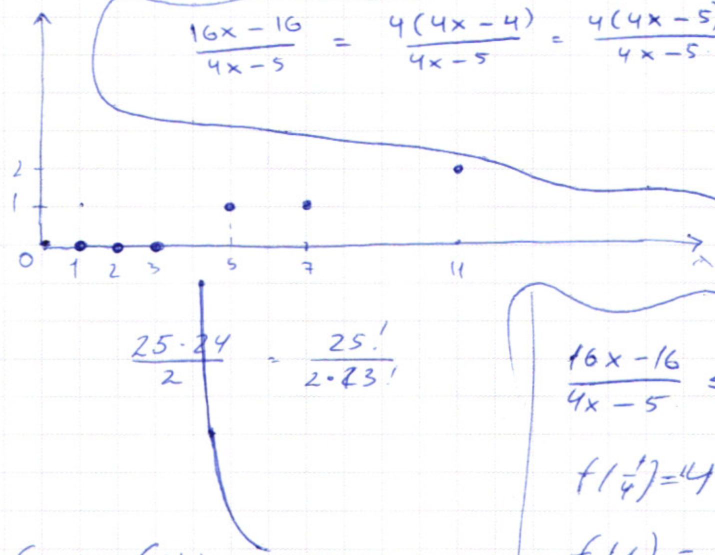
$= 4 + \frac{1}{x-1{,}25}$

$f(2) = 0$

$\times 25$

$25 \cdot 12 =$

$= 250 + 50 = 300$



$\frac{25 \cdot 24}{2} = \frac{25!}{2 \cdot 23!}$

$f(\frac{1}{y}) =$

$f(a)$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(\frac{ab}{b}) = f(ab) - f(b)$

Если $x = ky$

$f(x) = f(ky) = f(k) + f(y)$

$f(\frac{x}{y}) = f(\frac{ky}{y}) = f(k) = f(k) + f(y) - f(y) =$

$= f(ky) - f(y) = f(x) - f(y)$

$\frac{16x-16}{4x-5} \le -32x^2 + 30x - 3$

$f(\frac{1}{4}) = 4 + \frac{1}{-1} = 3.$

$f(1) = 4 + \frac{1}{-0{,}25} = 0$

$-32x^2 + 36x - 3$

$x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{36}{-64} =$

$= \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$

$f(\frac{9}{16}) = -16 \cdot 2 \frac{81}{16^2} + \frac{9^2 \cdot 4}{16} - 3 =$

$= -\frac{81}{8} + \frac{81}{4} - 3 = \frac{81}{8} - 3 = \frac{57}{8}$

a	f
$2 = 2$	0
$3 = 3$	0
$4 = 2^2$	0
$5 = 5$	1
$6 = 2 \cdot 3$	0
$7 = 7$	1
$8 = 2^3$	0
$9 = 3^2$	0
$10 = 5 \cdot 2$	1
$11 = 11$	2
$12 = 2^2 \cdot 3$	0
$13 = 13$	3

	f
$14 = 7 \cdot 2$	1
$15 = 3 \cdot 5$	1
$16 = 2^4$	0
$17 = 17$	4
$18 = 3^2 \cdot 2$	0
$19 = 19$	4
$20 = 2^2 \cdot 5$	1
$21 = 3 \cdot 7$	1
$22 = 11 \cdot 2$	2
$23 = 23$	5
$24 = 3 \cdot 2^3$	0
$25 = 5^2$	2

0: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24

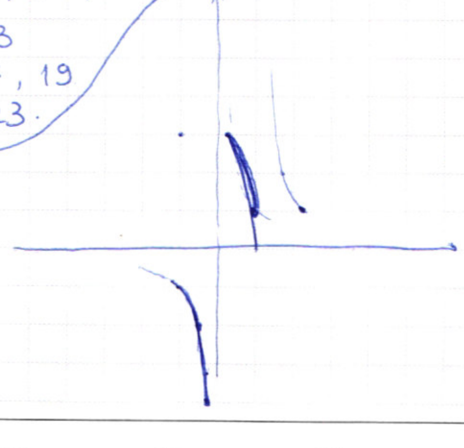
1: 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21

2: 11, 22, 25

3: 13

4: 17, 19

5: 23.



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

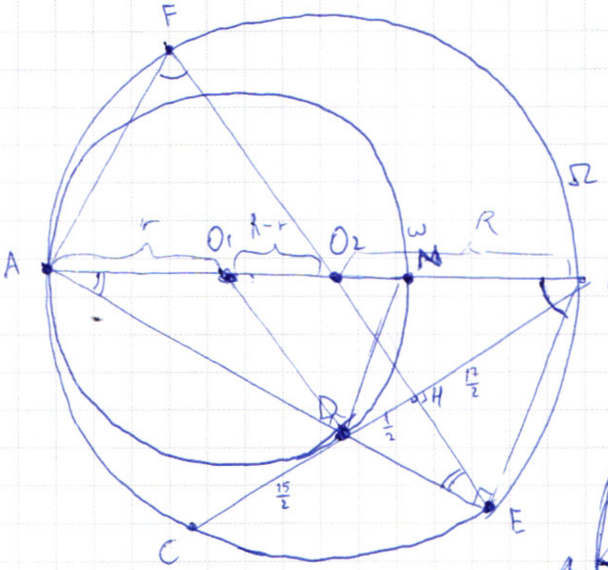
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(6\sqrt{17})^2 + (8\sqrt{17})^2 = (10\sqrt{17})^2$



~~по~~ ~~т~~

$R(R-r) = \frac{289}{4}$

2

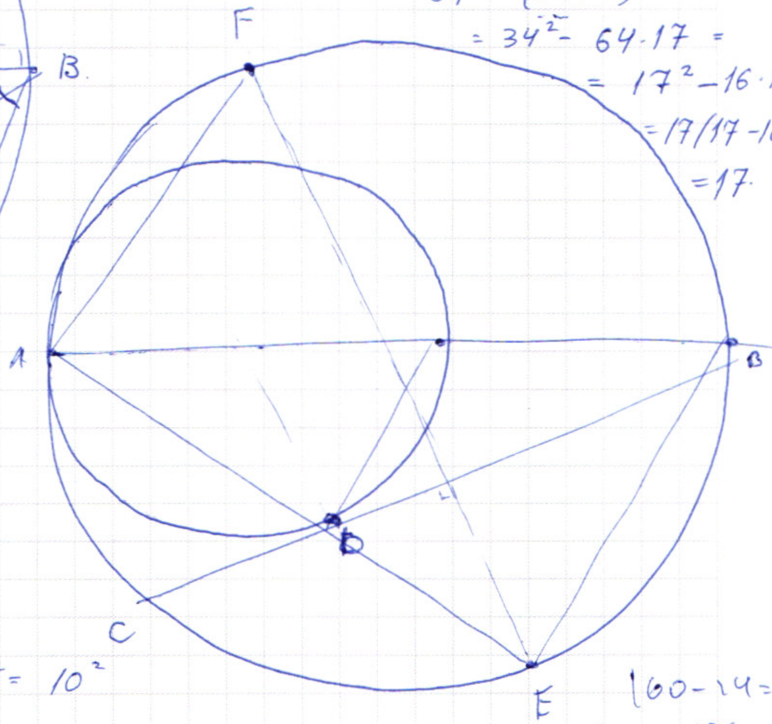
$34^2 - (8\sqrt{17})^2 =$

$= 34^2 - 64\cdot 17 =$

$= 17^2 - 16\cdot 17 =$

$= 17(17-16) =$

$= 17.$

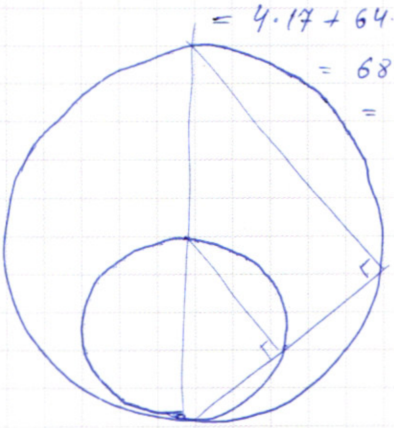


$6\sqrt{17}$ $\quad (2\sqrt{17})^2 + (8\sqrt{17})^2$

$= 4\cdot 17 + 64\cdot 17 =$

$= 68\cdot 17 =$

$= 4\cdot 17^2$



$6^2 + 8^2 = 10^2$

$160 - 24 =$

$= 136$

~~$64 + 64 - 24 = 1$~~

Пусть $R = ar$

$\sin ABE =$

$= \frac{8\sqrt{17}}{34} =$

$= \frac{4\sqrt{17}}{17}$

$170 + 85 =$

$= 255$

$ar(ar - r) = \frac{289}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^2(a(a-1)) = \frac{289}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^2(a^2 - a) = \frac{289}{4}$

Пусть $x = AD$

$\frac{AE}{AD} = a \Leftrightarrow \frac{AE - AD}{AD} = a - 1$

~~Qu~~ $x\cdot(a-1)\cdot x = \frac{255}{4}$

$$\begin{cases} x^2(a-1) = \frac{255}{4} \\ d^2(a-1)\cdot a = \frac{289}{4} \end{cases}$$

$\frac{d^2\cdot a}{x^2} = \frac{289}{255} = \frac{17^2\cdot 1}{17\cdot 15} = \frac{17}{15}$

$d(a-1)\cdot ad$

~~$\frac{R}{R-r} = \frac{15}{}$~~

$$\begin{cases} \frac{r}{R-r} = \frac{15}{1} \\ \frac{R}{R-r} = \frac{16}{1} \end{cases}$$

~~$\frac{R+r}{R-r} = 32$~~ $1 + \frac{2r}{R-r}$

~~Pac~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin2\alpha\cos2\beta + \cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin2\beta + \sin2\alpha = -\frac{2}{5}$

1) $\cos(2\alpha+2\beta)>0$: $\quad \cos = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\beta + \frac{2}{\sqrt5}\sin2\beta + \sin2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\qquad -\frac{3}{\sqrt5} = -\frac{3\sqrt5}{5}$

$-\cos2\beta + 2\sin2\beta + \sin2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin2\alpha =$
$= 2\sin\alpha\cos\alpha =$
$= 2\,tg\alpha\cdot\cos^2\alpha.$

$\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = 1 - \frac{2tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} =$

$= 1 - \frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha(1+tg^2\alpha)} = 1 - \frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} =$

$= 1 - \frac{2\sin^2+2\cos^2-2\sin^2}{\cos^2+\sin^2} = -1 + \frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = -1+2\sin^2\alpha =$

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y = 45 \end{cases}$$

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9 = 45+45$ $\quad 6y \quad 6y\cdot 2 = 12y$

$(x-6)^2+(6y-3)^2 = \cancel{245}\ 90$

$\cancel{(x-x_1)^2+(6y-\frac{y_1}{6})^2} =$

$(x-x_1)^2+(6y-6y_1)^2 = x_1^2+36y_1^2$

☑ черновик ☐ чистовик

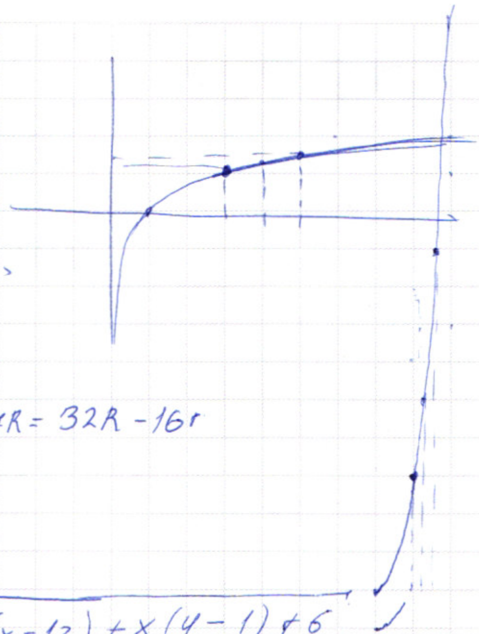
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{x^2 - 24y + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6}$

$\cancel{x^2 - 12y + 1}$



$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 26xy + 12y + x - 6 + 144y^2 = 0$

$(x-12y)^2 - 2xy + 12y + x - 6 = 0$ $\quad 17R = 32R - 16r$

$x(x-12) + 36y(y-1) = 45$

$x\ldots \quad \sqrt{y(x-12) + xy - x + 6} = \sqrt{y(x-12) + x(y-1) + 6}$

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{y(x-12) + x(y-1) + 6} \\ x(x-12) + 36y(y-1) = 45 \end{cases}$

$x^2 - 24y + 144y^2$

$\cancel{x(x-y)+y}$

$\begin{cases} (x-12y)^2 = y(x-12) + x(y-1) + 6 \\ x(x-12) + 36y(y-1) = 45 \end{cases}$

$x^2 - 12xy - 12xy + 144y^2 =$

$= x(x-12y) - 12y(\cancel{x} - 12y)$

$10 = \cdot \quad 10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$x^2 - 10x - |x^2 - 10x|^{\log_3 4} + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$(10x - x^2)^{\log_3 5}$

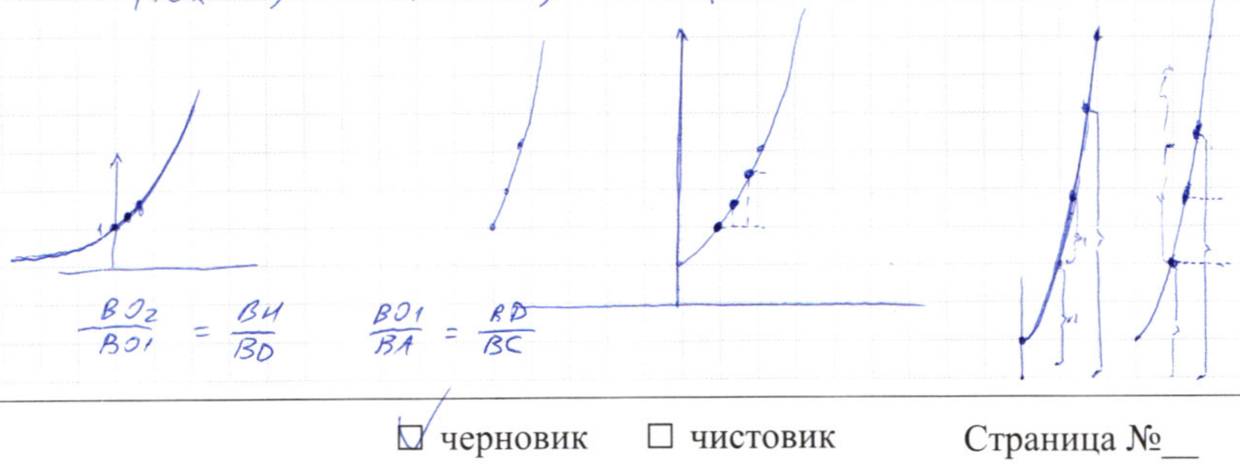
$x^2 - 10x \cancel{=} 11 = 0.$

$\cancel{a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \quad a^{\log_b c} = b^{\log_b a \log_b c} = c}$

$x^2 - 10x - |x^2 - 10x|^{\log_3 4} + (10x - x^2)^{\log_3 5} \leq 0 \quad 10x - x^2 \geq 0$ - точно

$x^2 - 10x - (10x - x^2)^{\log_3 4} + (10x - x^2)^{\log_3 5} \leq 0.$

$(10x - x^2)^{\log_3 5} - (10x - x^2)^{\log_3 4} - (10x - x^2)^{\log_3 3} \leq 0.$



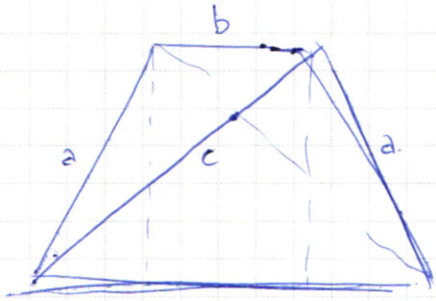
$\frac{BO_2}{BO_1} = \frac{BH}{BD} \qquad \frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC}$

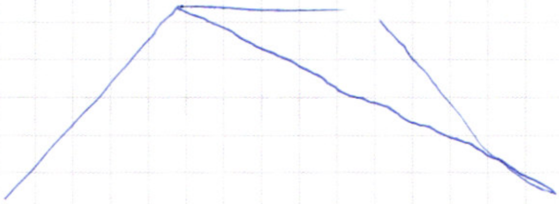
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





$t^2 - t$

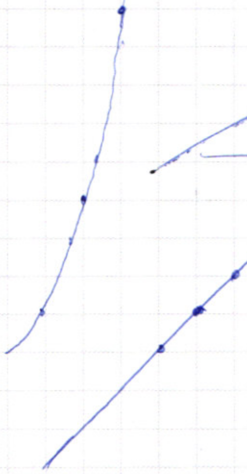
$\frac{t(t-1)}{6} > t \Leftrightarrow$

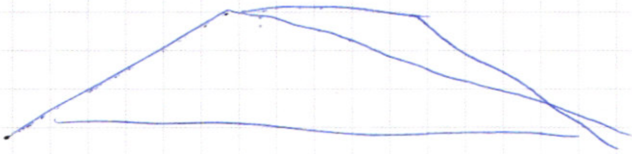
$\frac{t-1}{6} > t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t-1 > 6t \Leftrightarrow$

$5t < -1$

$\Leftrightarrow t < -\frac{1}{5}$



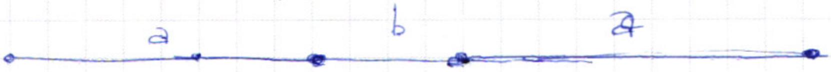


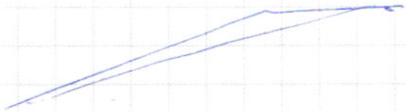
$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)} \Leftrightarrow$

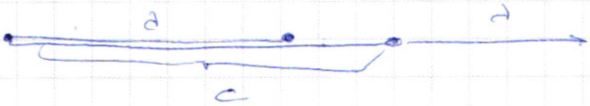
$x^2 - 10x + \cancel{5}(10x-x^2)^{\log_3 5} - (10x-x^2)^{\log_3 4} \leq 0.$

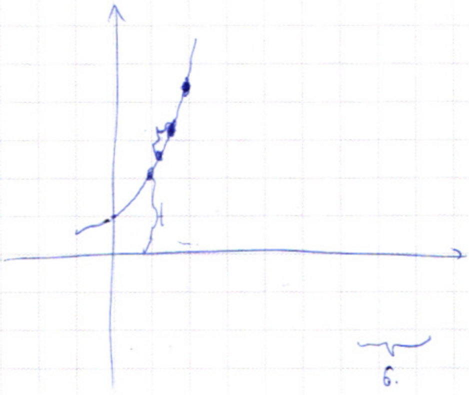
$(10x-x^2)^{\log_3 5} - (10x-x^2)^{\log_3 4} - (10x-x^2)^{\log_3 3} \leq 0$

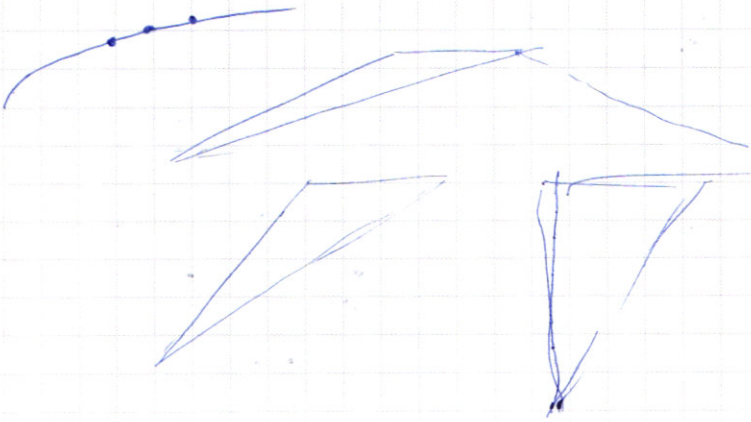
$t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4} - t \leq 0$

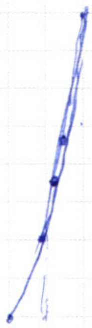












$\log_t 3 = k$

$t^{\frac{\log_t 5}{\log_t 3}} - t^{\frac{\log_t 4}{\log_t 3}} - \log t^{\frac{\log_t 3}{\log_t 3}}$

$\sqrt[\log_t 3]{t^{\log_t 5}} - \sqrt[\log_t 3]{t^{\log_t 5}} - \sqrt[\log_t 3]{\log_t 3} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt[k]{5} - \sqrt[k]{4} - \sqrt[k]{3} \leq 0$

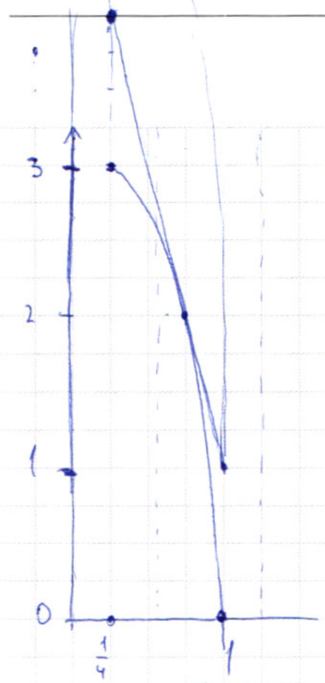
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$(-32x^2+36x-3)' = -32\cdot 2x + 36 = -64x+36$

$(f(\frac{1}{4}))' = -16+36 = 20$

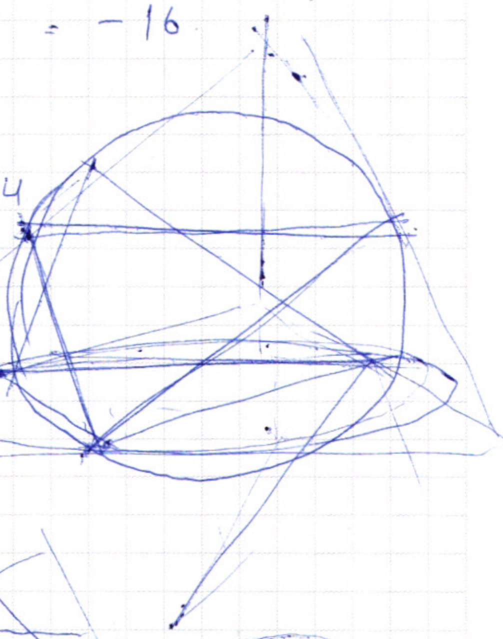
$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = x^{-2}\cdot -1 = -\frac{1}{x^2}$

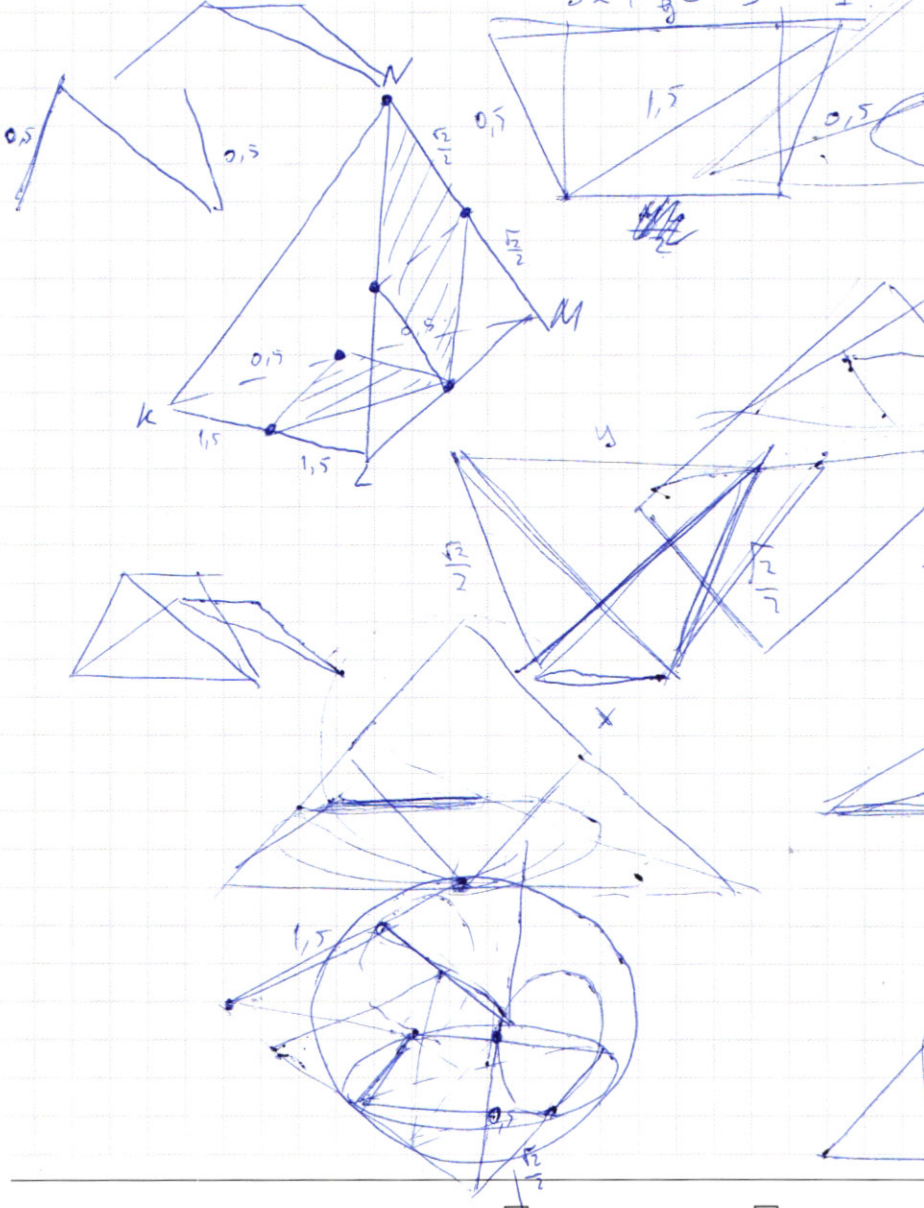
$\left(\frac{1}{-0{,}25}\right)' = -\frac{1}{\frac{1}{16}} = -16$

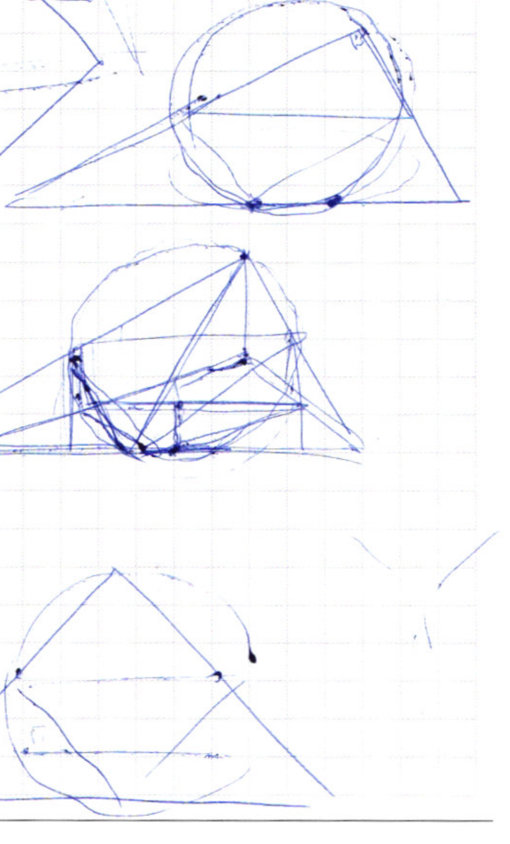
$-32\cdot\frac{1}{16} + \frac{36}{4} - 3 =$

$= -2+9-3 = 4$

$-32+36-3 = 1$







☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)