МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$x^2+36y^2-12x-36y=45.$

$(x^2-12x+36)+(36y^2-36y+9)=45+36+9.$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$

$x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{x-12y\geq 0,\quad (x-6)(2y-1)\geq 0.}_{ОДЗ}$

$(x-12y)^2=(x-6)(2y-1).$

$(x-6-12y+6)^2=(x-6)(2y-1)$

$((x-6)-6(2y-1))^2=(x-6)(2y-1)$

Сделаем замену: $(x-6)=s$ $(2y-1)=t$. Система имеет вид:

$$\begin{cases} s^2+9t^2=90 \\ (s-6t)^2=st \end{cases} \Rightarrow s^2-13st+36t^2=0.$$

ОДЗ: $st\geq 0$ $s-6t\geq 0.$

$(s-9t)(s-4t)=0.$

$s=9t$ $\quad$ $s=4t.$

$81t^2+9t^2=90$

$t^2=1$

$\begin{cases} t=1 \\ s=9 \end{cases}$ $\begin{cases} t=-1 \\ s=-9. \end{cases}$

$\begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$ не подх. по одз

$16t^2+9t^2=90$

$t^2=\frac{90}{25}=\frac{18}{5}=3{,}6$

$\begin{cases} t=\sqrt{3{,}6} \\ s=4\sqrt{3{,}6} \end{cases}$ $\begin{cases} t=-\sqrt{3{,}6} \\ s=-4\sqrt{3{,}6}. \end{cases}$

$\begin{cases} x=4\sqrt{3{,}6}+6 \\ y=0{,}5+\sqrt{0{,}9} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-4\sqrt{3{,}6}+6 \\ y=0{,}5-\sqrt{0{,}9} \end{cases}$

№2 (ответ)

Ответ: $(15; 1)$, $(-4\sqrt{3,6}+6;\ -\sqrt{0,9}+0,5)$.

№3.

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \ge x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}.$$

$$10x-x^2 \ge -(10x-x^2)^{\log_3 4}+5^{\log_3(10x-x^2)}.$$

ОДЗ: $10x-x^2 \ge 0$

$\Downarrow$

$|x^2-10x| = 10x-x^2$.

$10x-x^2>0$, сделаем замену

$10x-x^2=3^q$. Тогда

$$3^q \ge -3^{q\log_3 4}+5^{\log_3 3^q}$$

$$3^q \ge 5^q-4^q$$

$$3^q+4^q \ge 5^q.$$

~~Найдя производные графиков функций $f_1(q)=3^q+4^q$~~
~~$f_2(q)=5^q$, получим:~~

~~$f_1'(q)=(3^q+4^q)'=(3^q)'+(4^q)'=\ln 3\cdot 3^q+\ln 4\cdot 4^q$~~

Построив графики 3^q, 4^q, 5^q, получим, что при $q\in(-\infty;0]$

$3^q \ge 4^q \ge 5^q$, $\Rightarrow$ $(-\infty;0)\subset$ множество q.

Начиная от $q=2$ заметим, что 5^q растет быстрее, чем 3^q+4^q, т.к. 3^q+4^q растет не быстрее, чем $2\cdot 4^q$, а она растет медленнее, чем 5^q, откуда $3^q+4^q=5^q$ имеет не более одного решения (т.е. $(5^q-4^q-3^q)'=\ln 5\, 5^q-\ln 4\cdot 4^q-\ln 3\, 3^q \ge$ $\ge \ln 5(5^q-4^q-3^q)>0$ для $q>2$). $q=2$ – решение, значит $q<2$ подходит, а $q>2$ – не подходит. $q\in(-\infty;2]$ $3^q\in(0;9]$

$10x-x^2\in[0;9]$ $\underline{x\in(0;1]\cup[9;10)}$ $\Leftarrow$ ОТВЕТ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

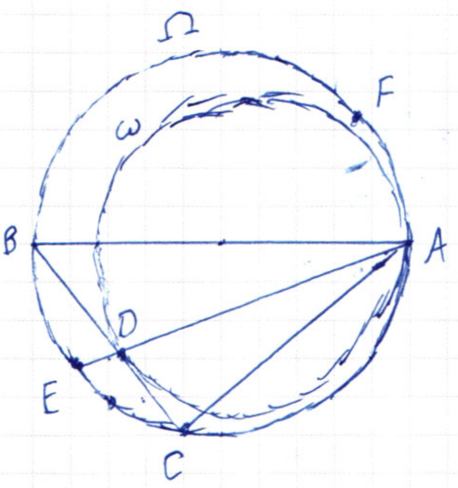
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Поскольку A - точка внутреннего касания окружностей, D - точка (ω и Ω) касания ω и хорды Ω - E - середина дуги BC.

Откуда $\angle BAE = \angle CAE$.

Заметим, что $\angle AFE = \angle ABE = 90^\circ - \angle BAE$.

Поскольку AD - биссектриса $\angle BAC$ в $\triangle ABC$,

$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{17}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{17}{15}$. Значит если $AB = 17x$, то $AC = 15x$.

$BC = \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = 16$. Итого

$(17x)^2 = (16)^2 + (15x)^2$

$64x^2 = 16^2 \quad x = 2, \quad AB = 34, \quad R_\Omega = 17.$

Также мы видим, что $\cos\angle CAB = \frac{15}{17} = \cos 2\angle BAE =$

$= \cos^2\angle BAE - \sin^2\angle BAE = 1 - 2\sin^2\angle BAE = \frac{15}{17}.$

Тогда $\sin^2\angle BAE = \frac{1}{17}$. $\angle BAE < 90^\circ$, $\Rightarrow \sin\angle BAE = \frac{\sqrt{17}}{17}$.

Тогда $\angle BAE = \arcsin\frac{\sqrt{17}}{17}$ $\angle ABE = 90^\circ - \arcsin\frac{\sqrt{17}}{17} = \arccos\frac{\sqrt{17}}{17}$

$\angle AFE = \arccos\frac{\sqrt{17}}{17}$.

№4 (продолжение)

Также посмотрим на степень точки B относит. ω:

$BD^2 = D_\Omega \cdot (D_\Omega - D_\omega)$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = 34 \cdot (34 - D_\omega)$.

$\frac{17^2}{4 \cdot 34} = 34 - D_\omega$

$D_\omega = 34 - \frac{17 \cdot 17}{17 \cdot 8} = 17\left(2 - \frac{1}{8}\right) = 17 \cdot \frac{15}{8} = 31{,}875$.

$R_\omega = \frac{D_\omega}{2} = 15{,}9375$.

Поскольку дуги BE и CE равны, $BE = CE$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ EF – сер.пер. BC, как следствие – диаметр Ω.

Тогда дуги BE и AF равны, $EF = 34$,

$\angle AEF = \angle BAE$, $\cos\angle AEF = \frac{15}{17}$, и

$AE = 34 \cdot \frac{15}{17} = 30$.

$AF = 34 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2} = 34 \cdot \frac{8}{17} = 16$.

$S_{\triangle AFE} = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240$.

Ответ: $R_\Omega = 17$ $R_\omega = 15{,}9375$

$\angle AFE = \arccos \frac{\sqrt{17}}{17}$

$S_{\triangle AEF} = 240$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

1) $f(b) = f(1 \cdot b) = f(1) + f(b)$, $\Rightarrow$ $f(1) = f(b) - f(b) = 0$.

2) $f(1) = f(y \cdot \frac{1}{y}) = f(y) + f(\frac{1}{y}) = 0$, $\Rightarrow$ $f(\frac{1}{y}) = -f(y)$.

3) $f(2) = 0$ $f(3) = 0$ $f(5) = 1$ $f(7) = 1$ $f(11) = 2$
$f(13) = 3$ $f(17) = 4$ $f(19) = 4$ $f(23) = 5$.

4) $f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$.

5) Из п. 3. Найдём $f(a)$ для $2 \leq a \leq 25$:

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = f(2) + f(4) = f(2) + f(2) + f(2) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(11) = 2$.

$f(12) = f(3) + f(4) = f(3) + f(2) + f(2) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$.

№5 (продолжение).

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = f(4) + f(4) = f(2) + f(2) + f(2) + f(2) = 0.$

$f(17) = 4$

$f(18) = f(2) + f(9) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = f(4) + f(5) = 1.$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1.$

$f(22) = f(2) + f(11) = 2.$

$f(23) = 5$

$f(24) = f(8) + f(3) = 0$

$f(25) = f(5) + f(5) = 2.$

10 функций равны 0, 7 функций равны 1, 3 функции равны 2, 1 функция равна 3, 2 функции равны 4, 1 функция равна 5. Соответственно, мы ищем все такие $2 \le x \le 25$, $2 \le y \le 25$, чтобы $f(y) > f(x)$:

Значение $f(y)$	Кол-во возможных $f(x)$.	Кол-во $f(y)$.
0	0	10
1	10	7
2	$10+7 = 17$	3
3	$10+7+3 = 20$	1
4	$10+7+3+1 = 21$	2
5.	$10+7+3+1+2. = 23$	1.

Кол-во пар: $10 \cdot 0 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 17 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 21 + 1 \cdot 23 = 206.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Воспользуемся тем, что $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$:

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt5}{5}\right)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5}$

$\cos(2\beta) = \frac{\sqrt5}{5}$. Заметим, что $\sin(2\alpha+2\beta) = -\cos(2\beta)$.

Откуда ~~$2\alpha+2\beta$~~ $2\beta = \pm\arccos\frac{\sqrt5}{5}$.

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha \overset{+2\pi n}{+} \arccos\frac{\sqrt5}{5} = -\arcsin\frac{\sqrt5}{5} \\ 2\alpha \overset{+2\pi n}{-} \arccos\frac{\sqrt5}{5} = -\arcsin\frac{\sqrt5}{5} \\ 2\alpha \overset{+2\pi n}{+} \arccos\frac{\sqrt5}{5} + 2\pi n = \pi + \arcsin\frac{\sqrt5}{5} \\ 2\alpha \overset{+2\pi n}{-} \arccos\frac{\sqrt5}{5} + 2\pi n = \pi + \arcsin\frac{\sqrt5}{5} \end{array}\right.$$

$\left(-\arcsin\frac{\sqrt5}{5} = \arcsin\frac{-\sqrt5}{5}\right)$

(с учетом кратности)

1) $\alpha = \dfrac{\arccos\frac{\sqrt5}{5} + \arcsin\frac{\sqrt5}{2}}{2} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi n}{2}$. ~~tg определён~~, =>

~~одно из значений = 0~~ $= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. Тангенс определён, значит

2). $\alpha = \dfrac{\arccos\frac{\sqrt5}{5} - \arcsin\frac{\sqrt5}{5}}{2} + \frac{\pi n}{2} =$ $tg\alpha = \pm 1$.

~~Заметим~~

~~cos~~ $= \arcsin\frac{\sqrt5}{5} + \frac{\pi n}{2}$. ~~Заметим~~ tg

Если $\alpha = \arcsin\frac{\sqrt5}{5} + \pi n$, то $tg = \frac12$.

$\alpha = \arcsin\frac{\sqrt5}{5} + \frac{\pi}{2} + \pi n$, то $tg = -2$.

Ответ: ±1, 2, $-\frac12$.

№6.

Вершина правой параболы располагается в точке $\frac{-b}{2a} = \frac{-36}{-64} = \frac{9}{16} \in [\frac{1}{4}; 1]$. Парабола выпукла вверх, а значит на промежутке $(\frac{1}{4}; 1)$ прямая $ax+b$ не будет пересекать параболу (иначе в точках $\frac{1}{4}$ или 1 $ax+b > -32x^2+36x-3$) тогда и только тогда, когда на этом промежутке $ax+b$ не выше прямой, содержащей концы параболы.

$f(x) = -32x^2+36x-3$ $\quad f(\frac{1}{4}) = -2+9-3=4$ $\quad f(1) = -32+36-3=1$

Прямая, содержащая точки $(\frac{1}{4}; 4)$ и $(1; 1)$ — $-4x+5$.

Значит, на промежутке $[\frac{1}{4}; 1]$ $ax+b \le -4x+5$.

Заметим, что в точке $x=\frac{3}{4}$

левая часть принимает значение $\frac{16\cdot\frac{3}{4}-16}{4\cdot\frac{3}{4}-5} = \frac{-4}{-2} = 2$,

а правая (которая равна $-4x+5$) — тоже 2.

Отсюда если $ax+b \not\equiv -4x+5$, то в точке $\frac{3}{4}$ $ax+b < -4x+5$ (в противном случае для точек $> \frac{3}{4}$ или $< \frac{3}{4}$ $ax+b > -4x+5$ и $ax+b$ пересекает параболу), а значит $a\frac{3}{4}+b < 2$ и пересекает гиперболу. Значит $ax+b \equiv -4x+5$

Ответ: $(-4; 5)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

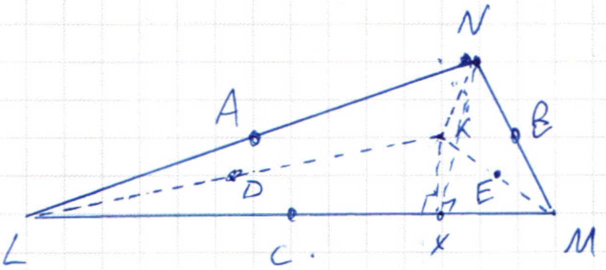
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.



1) Посмотрим на $\triangle LNM$.

Обозначим середины LN, NM, ML за A, B, C соответственно.

$ANBC$ - вписанный параллелограмм $\Leftrightarrow$ прямоугольник. Откуда $\angle ANB = 90°$

2) Обозначим середины KL и KM за D и E соотв.

Тогда из св-ств средней линии $AD \parallel NK \parallel BE$.

$AB \parallel LM \parallel DE$, $\Rightarrow$ $ABED$ - вписанный парал $\Leftrightarrow$ прямоугольник.

Откуда угол между KN и ML равен $90°$.

Значит проекции K и N на LM совпадают, обозначим за X.

3) $KL^2 = XL^2 + KX^2$ $\quad KM^2 = KX^2 + XM^2$ $\quad MN^2 = NX^2 + XM^2$.

$LN^2 = XL^2 + NX^2 = KL^2 + MN^2 - KM^2 = 9 + 2 - 1 = 10$.

$LN = \sqrt{10}$. Тогда $LM^2 = LN^2 + NM^2 = 10 + 2 = 12$

$LM = 2\sqrt{3}$.

4). Поскольку $NM^2 > KM^2$, $MX^2 = MX^2$, $\Rightarrow KX < NX$.

R шара $\geq$ R окружности вокруг $\triangle KLM$: со сторонами $1, 3, 2\sqrt{3}$.

$S_\triangle = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\quad \frac{1}{4R} = \frac{\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}}{1\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}} =$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$= \frac{\sqrt{(4-3)\cdot(3-1)}}{1\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{1\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}$$

$$4R = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{6}.$$

$$R = \frac{3}{4}\sqrt{6}.$$

Значит R шара $\geq \frac{3}{4}\sqrt{6}$.

R шара может быть равен $\frac{3}{4}\sqrt{6}$. Если окружность вокруг $\triangle KLM$ - диаметр. сечение, то мы можем подвинуть точку N, чтоб она легла на сферу (повернуть N отн. LM, вместе с $\triangle LNM$).

Действительно, если $KLMN$ - плоский и K между N и Z ($KZ < NZ$), то N выйдет за сферу. А если $KLMN$ - плоский и Z между K и N, то:

поскольку $KZ < NZ$, $\angle KLM < \angle LNM$, $\angle KML < \angle NML$, $\Rightarrow \angle MKL > KNM > 90°$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\angle LKM + \angle LNM > 180°$ и отсюда N лежит внутри окр. вокруг $KLM \Leftrightarrow N$ внутри сферы.

N была вне сферы, стала внутри сферы, значит существует состояние, когда $N \in$ сфере. Значит, случай подходит.

Ответ: $\overset{LM}{ML} = 2\sqrt{3}$, $R_{min} = \frac{3}{4}\sqrt{6} = 0{,}75\sqrt{6}$.

$\cancel{2(-16x^2+18x}$

$0{,}5(-64x^2+72x-6)\cdot 3 =$ — $\frac{4}{-1}$ $4\cdot\frac{3}{4}$

$3-5=-2$

$\frac{1}{4}\cdot 4$ $1-5$ $4-1=3$

$4+\frac{4}{4x-5}$ $2-$ $4-\frac{4}{3}=2\frac{1}{3}$

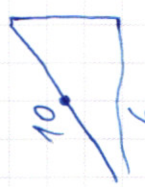
$-\frac{32}{16}=-2+9-3$

$-\frac{32}{4}+$

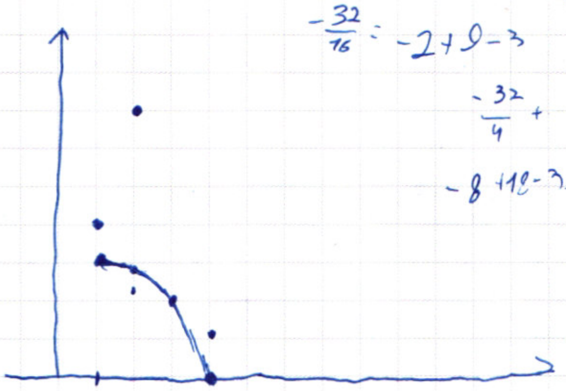
$-8+12-3$ 7

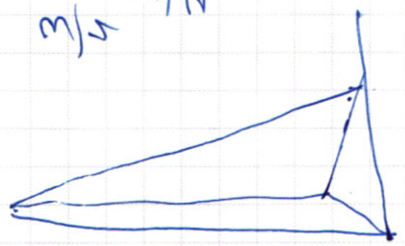
$P=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})(4+\sqrt{3})$

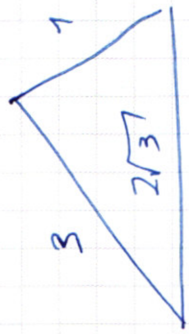
$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{2}$ $2{,}4$ $3{,}6$ $\frac{3}{2}\sqrt{6}$



$24=\frac{10\cdot 48}{20}$







$-32x^2+36x$

$-8x^2+9x$

10 12

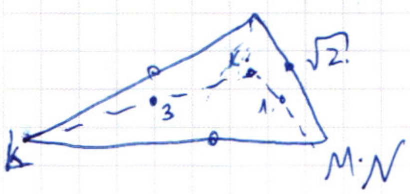
$x(9-8x)$ $4+\frac{4}{4\cdot\frac{3}{4}-5}=\cancel{4+\frac{4}{}}$

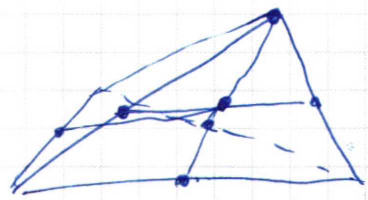
$x=0$ $x=\frac{9}{8}$

2.

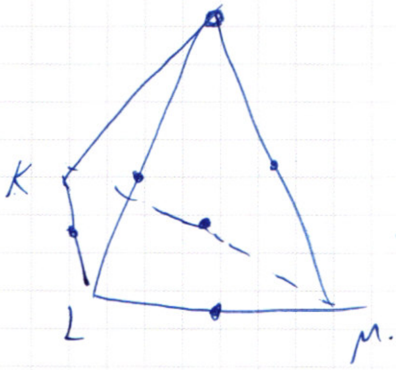
$x=\frac{9}{10}$

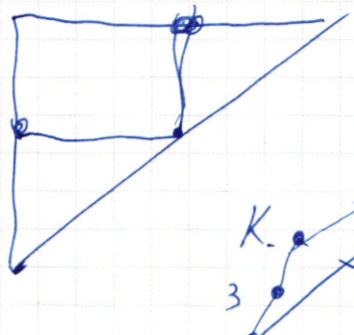
$\left(\frac{3}{4};2\right)$

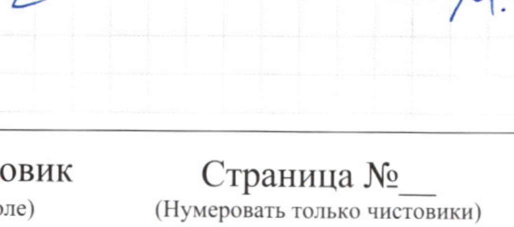




M·N







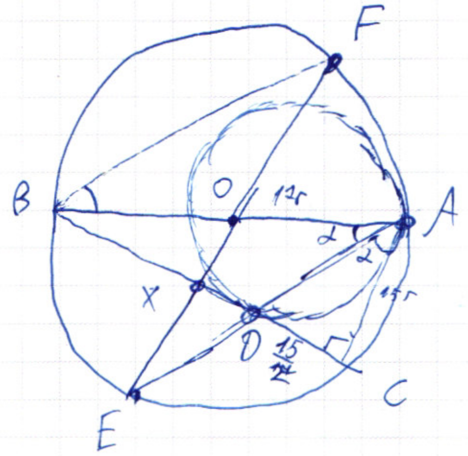
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{AC}{AB} = \frac{15}{17}$.

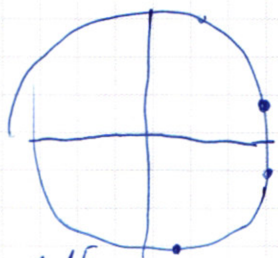
1

$17r^2 =$

$289r^2 = 225r^2 + (16)^2$

289

170 $\quad 17 \cdot 7 = 119 \quad 15+1 \quad 16$



$289 - 225 = 64$

$64r^2 = 16^2$

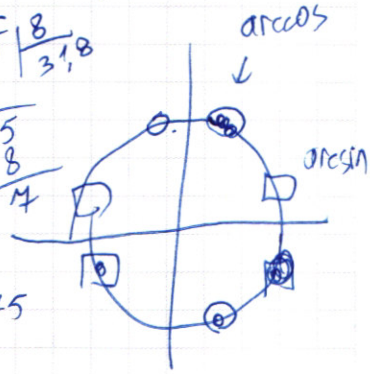
$17 \cdot r \quad 17 \cdot 15$

$34. \quad 17 \cdot 15 = 85 \ldots 255 \quad \frac{17}{2}$

$\sin\frac{\pi}{4}$

34.

$255 : 8 = 31,8 \quad -24 \quad 15 \quad -8 \quad 7$



$1 - 2\sin\alpha = \frac{15}{17}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = -2 \quad 1.$

$\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$31,875 : 2 = 15,9375 \quad -30 \quad 18 \quad 07 \quad 15$

$3^{a+da} \cdot 4^{a+da}$

$34 \cdot 2,125.$

0

$\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \sin$

$\underset{0}{\sin\pi} + \underset{1}{\sin\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \underset{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\frac{3\pi}{4}} \quad 17 \cdot 4,25.$

$(5^a \cdot 4^a - 3^a)' = \ln 5 \; 5^a - \ln 4 \; 4^a - \ln 3 \; 3^a.$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha =$

25

$= 2 \sin(2\alpha+2\beta) \cdot \cos 2\beta$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

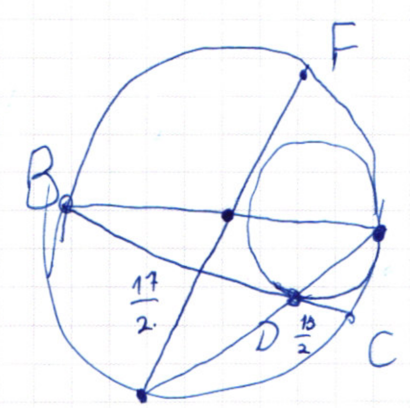
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

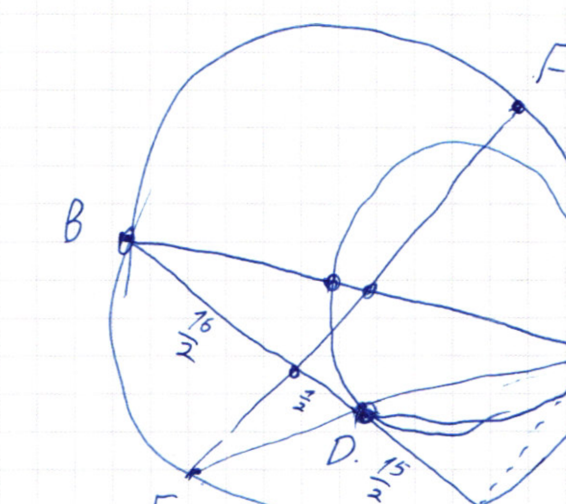
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

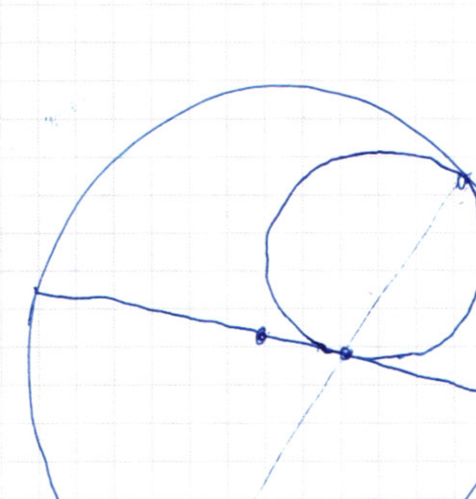




$3 \cdot 17 = 51$

$70 + 51 + 20 + 42 + 23$

$90 + 51 + 65 = 141 + 65 = 206$



$4 - \frac{4}{5-4x} \leq ax + b$

$\frac{4 \cdot 16}{1-5} = \frac{-12}{-4} = 3$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$-2 + 9 - 3 \quad -8 + 18 - 7$

$f(5) = 1 \quad a + b \leq 1.$

$f(x/y) =$

$0 \leq a + b \leq 1$

$\frac{8}{3} \leq \frac{1}{2}a + b \leq 7$

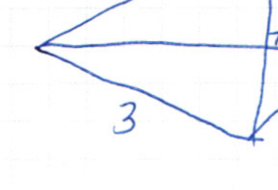
$f(1 \cdot b) = f(1) + f(b)$

$= f(x) + f(\frac{1}{y}) = 3 \leq \frac{1}{4}a + b \leq 4.$

$0.$

$= f(x) +$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \frac{-2}{5}$



$= -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad f(y \cdot \frac{1}{y}) = f(y) + f(\frac{1}{y}) = 0.$

$f(y) = -f(\frac{1}{y}).$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$

$36y^2 - 36y + 9$

$= 45.$

$S^2 - 12st + 36t = st.$

$S^2 - 13st + 36t^2 = 0$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6.$

$S^2 + 9st + 9t^2 = 90$

$27t^2 - 13st = 90.$

$(x^2 - 2x + 1) = (144y^2 - 24y + 1)$

$(x-1)^2 \qquad (12y-1)^2$

$90 = 81 + 9.$

$x > 12y. \qquad 12y < x < 16$

$x =$

$S^2 - 13st + 36t^2 = 0.$

$(x-12y)^2 = -x - 12y$

$2yx - 2y \cdot 6 - x + 6$

$(x-12y)^2 = (2y-1)(x-6).$

$x^2 - 10x < 0$

$x \in (0; 10)$

$((x-6)+3(2y-1))^2 - 6(x-12y)^2 = 90$

$(x \quad 4 + \frac{4}{4x-5}. \quad \left(\frac{4}{4x-5}\right)' = 4 \cdot \left(\frac{1}{4x-5}\right)' = -16 \frac{1}{(4x-5)^2} = -4.$

$x - 6 - 12y + 6 =$

$= (x - 6 - 3(2y-1))^2$

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}.$

$10x - x^2 \geq 5^{\log_3(10x-x^2)} - (10 - x^2)^{\log_3 4}.$

$3^9 \qquad p \geq 5^{\log_3 p} - p^{\log_3 4}.$

$(4x-5)^2 = 4$

$4x - 5 = \pm 2.$

$4x = 3$

$3^9 \geq 5^{\log_3 3^9} - 3^{9\log_3 4}.$

$x = \frac{3}{4}. \qquad x = \frac{3}{4}.$

$3(x-12y)^2 =$

$3^9 \geq 5^9 - 4^9$

$a + b = 1$

$\frac{1}{4}a + b = 4.$

$a = -4 \quad b = 5.$

$3^9 + 4^9 \geq 5^9.$

$(x - 6 + 6y - 3)^2 =$

$= (x + 6y - 9)^2 - 90.$

$3^{9\ln 3} + 4^{9\ln 4} < 2\ln 4 \cdot 4^9$

$\ln 5 \cdot 5^9 \quad \left(\frac{5}{4}\right)^9 \cdot \frac{\ln 5}{2\ln 4}$

2^{29+1}

$3^9 \cdot 4^9$

$3^9 + 4^9 \quad (2 \cdot 4^9)^2$

$9 \ln 5.$

$\ln 2 + 9 \ln 4$

$\ln(3^9 + 4^9) \leq$

$\leq \ln(2 \cdot 4^9) =$

≤ 1

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)