Адрес

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad (\cdot) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \quad (*) \end{cases}$

(*) $-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \sin 2\beta(\cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha\sin 2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin^2 2\beta\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta\left(\sin 2\beta\cos 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \sin 2\alpha\underbrace{(1-\sin^2 2\beta)}_{\cos^2 2\beta} = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta\left(\sin 2\beta\cos 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha\cos 2\beta\right) = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta\left(\sin(2\alpha+2\beta) - \frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{2}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$(\cdot)$ $\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{\operatorname{tg} 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\cos 2\alpha}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} \pm \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$

$\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha + 4(2\cos^2\alpha - 1) = -1}$

$\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha - 3 = 0}$

$8\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3 = 0$

$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$; $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ (У.Т.П)

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} \pm \frac{4(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} = -1$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha \pm (4-4\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} = -1$

$2\operatorname{tg}\alpha \pm (4-4\operatorname{tg}^2\alpha) = -(\operatorname{tg}^2\alpha+1)$

(+)

$-4\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha + 4 + \operatorname{tg}^2\alpha - 1 = 0$

$-3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha + 3 = 0$

$3\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$

$D = 4 + 4\cdot 9 = 4\cdot 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\pm 2\sqrt{10}}{6} = \frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$

(−)

$2\operatorname{tg}\alpha - 4 + 4\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 1 = 0$

$5\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 5 = 0$

$D = 4 + 4\cdot 25 = 4\cdot 26$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-2\pm 2\sqrt{26}}{10} = \frac{-1\pm\sqrt{26}}{5}$

Ответ: $\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$; $\frac{-1\pm\sqrt{26}}{5}$

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-6x=\sqrt{(y-6)\cdot x-(y-6)} \\ 9x^2-18x+9+y^2-12y+36=45+45 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)} & (1) \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 & (2) \end{cases}$$

Оценим: $(x-1)^2 \le 10 \Rightarrow -\sqrt{10} \le x-1 \le \sqrt{10} \Rightarrow -\sqrt{10}+1 \le x \le \sqrt{10}+1$

$(y-6)^2 \le 90 \Rightarrow -3\sqrt{10} \le y-6 \le 3\sqrt{10} \Rightarrow 6-3\sqrt{10} \le y \le 6+3\sqrt{10}$

$(y-6)(x-1) \ge 0 \Rightarrow$ ~~$(y;x) \ge 6$ (имею ввиду оба)~~ ; ~~$(y;x) < 6$~~

$(y \ge 6;\ x \ge 1)$; $(y \le 6;\ x \le 1)$

(2) $9(x-1)^2+6(x-1)(y-6)+(y-6)^2=90-6(x-1)(y-6)$

$(3x-3+y-6)^2=90-6(x-1)(y-6)$

$(3x-y-9)^2=90-6(x-1)(y-6)$

Сделаем замену: $y-6=a$; $x-1=b \Rightarrow y=a+6$; $x=b+1$

$$\begin{cases} a+6-6b-6=\sqrt{ab} \\ 9b^2+a^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \ (1) \Rightarrow a \ge 6b;\ a \ge 0;\ b \ge 0 \\ 9b^2+a^2=90 \quad (2) \end{cases}$$

Подставим $a=6b$ в (2) $\Rightarrow 45b^2=90 \Rightarrow b^2=2 \Rightarrow b \in (0;\sqrt{2}]$

$a \ge 6\sqrt{2} \Rightarrow 0 \le \sqrt{ab} \le 2\sqrt{3}$

$\cancel{(3b+a)^2=90+6ab \Rightarrow (3b+a)^2-6(a-6b)^2=90}$

$\cancel{9b^2+6ab+a^2-6(a^2-12ab+36b^2)=90 \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow 9b^2+6ab+a^2-6a^2+72ab-108b^2=90 \Rightarrow -99b^2+78ab-5a^2=90}$

$\cancel{5a^2-78ab+99b^2+90=0}$

(1) $a^2-13ab+36b^2=0 \Rightarrow D=169b^2-144b^2=(5b)^2 \Rightarrow a=\frac{13b\pm 5b}{2}=\left[\begin{array}{ll} 9b & (*) \\ 4b & (\cdot) \end{array}\right.$

(2) $(*)$ $9b^2+81b^2=90 \Rightarrow b=\pm 1 \Rightarrow a=\pm 9$

$(\cdot)$ $9b^2+16b^2=90 \Rightarrow b^2=\frac{90}{25}=\frac{18}{5}=3{,}6 \Rightarrow b=\pm\sqrt{3{,}6} \Rightarrow a=4(\pm\sqrt{3{,}6})$

$x=(\pm 1)+1$; $y=(\pm 9+6)$

$x=(\pm\sqrt{3{,}6})+1$; $y=4(\pm\sqrt{3{,}6})+6$

Ответ: $(2;\ 15)$; $(0;\ -3)$; $(\sqrt{3{,}6}+1;\ 4\sqrt{3{,}6}+6)$; $(-\sqrt{3{,}6}+1;\ -4\sqrt{3{,}6}+6)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

Ограничения: $26x-x^2>0 \Rightarrow x^2-26x<0 \Rightarrow x\in(0;26)$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x\geq x^2+(26x-x^2)^{\log_5 13} \ :$$

Из свойства $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)-(26x-x^2)^{\log_5 13}\geq 0$$

$$(26x-x^2)\left((26x-x^2)^{\log_5\frac{12}{5}}-(26x-x^2)^{\log_5\frac{13}{5}}+1\right)\geq 0$$

нуля 1) ~~$26x-x^2=0 \Rightarrow x=0;\ x=26$~~ Из огр. $\Rightarrow (26x-x^2)^{\log_5\frac{12}{5}}-(26x-x^2)^{\log_5\frac{13}{5}}+1\geq 0$

~~Пусть $26x-x^2=-t$, $t\in(0;26)\leq 0$~~ ~~$(-t)^{\log_5\frac{12}{5}}-(-t)^{\log_5\frac{13}{5}}+1\geq 0$~~

Пусть $26x-x^2=t$, $t>0$

$$t^{\log_5\frac{12}{5}}-t^{\log_5\frac{13}{5}}+1\geq 0$$

$$1\geq t^{\log_5\frac{13}{5}}-t^{\log_5\frac{12}{5}} \Rightarrow 1\geq \frac{13}{5}^{\log_5 t}-\frac{12}{5}^{\log_5 t}$$

$$1\geq \frac{13^{\log_5 t}}{t}-\frac{12^{\log_5 t}}{t} \Rightarrow 1\geq \frac{13^{\log_5 t}-12^{\log_5 t}}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{13^{\log_5 t}-12^{\log_5 t}-t}{t}\leq 0,\quad t>0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 13^{\log_5 t}-12^{\log_5 t}-t\leq 0$, заметим, что при $t=25$:

$13^2-12^2-25 \leq 0$, А функция возрастающая при $t>0$

$\Rightarrow t\in(0;25] \Rightarrow 0<-x^2+26x\leq 25 \Rightarrow$

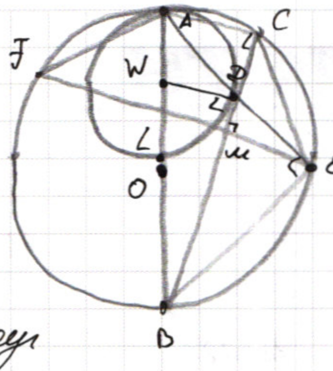
① $x^2-26x<0$, $x\in(0;26)$

② $x^2-26x+25\geq 0$, $x_1=1;\ x_2=25 \Rightarrow x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty)$

Итого:

Ответ: $x\in(0;1]\cup[25;26)$

№4



Рассмотрим $ACEJ$: $\angle ACB = 90^\circ$ т.к опир. на диаметр =>

=> $\triangle ACD \sim \triangle DME$ по $\angle$ углу и верт. углу, но

DC и DM лежат на одной прямой => $AC = ME$ =>

=> $AC \parallel JE$. => $ACEJ$ – трапеция, а раз вокруг

нее можно описать окр. то она равнобедр. => $AJ = CE$

Высота трапеции CM:

$\triangle ADC \sim \triangle DEM$ по 2 углам => $\frac{AD}{DB} = \frac{CD}{DE}$ => $\frac{AD}{13} = \frac{12}{DE}$

$\triangle ADC \sim \triangle DME$ по 2 углам => $\frac{AD}{DE} = \frac{CD}{DM}$ => $\frac{CD}{DM} = \frac{12\cdot 13}{DE^2}$

$\triangle WDB \sim \triangle ACB$ => $\frac{WD}{AC} = \frac{13}{25}$; $WD = r$; $AC = \sqrt{4R^2-25}$

$\frac{r}{\sqrt{4R^2-25}} = \frac{13}{25}$ => $25r = 13\sqrt{4R^2-25}$

По т. о кас. и сек.: $DB^2 = BL\cdot(\cancel{r}+r)$; $(r+BL)^2 = r^2+13^2$

$r^2+2rBL+BL^2 = r^2+169$ => $169 = BL(2r+BL)$

~~$BL = \frac{169}{r}$ => $169 = \frac{169}{r}\left(2r+\frac{169}{r}\right)$ => $1 = 2+\frac{169}{r^2}$ =>~~

~~$\frac{169}{BL} - BL = r$ => $169 = BL\left(2\cdot\frac{169}{BL} - 2BL + BL\right)$ => => $\frac{169}{r^2} = -1$ =>~~

~~=> $169 = 2\cdot 169 - BL^2$ => $BL^2 = 169 = 13$ => $r = 0$~~

$DB^2 = BL(BL+r)$; $(BL+r)^2 = r^2+169$

$169 = BL^2 + BLr$; $BL^2 + 2BLr = 169$

~~$BL^2 = 169 - BLr$ =>~~

$r = \frac{169-BL^2}{BL}$; $BL^2 + 2\cdot 169 - 2BL^2 = 169$ =>

=> $BL^2 = 169$ => $BL = 13$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

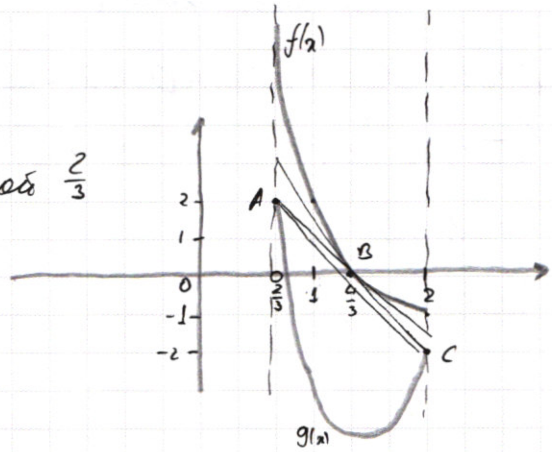
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\overbrace{\frac{8-6x}{3x-2}}^{f(x)} \geqslant ax+b \geqslant \overbrace{18x^2-51x+28}^{g(x)}$$



$f(x) = -2 + \frac{4}{3x-2}$ – гипербола с асимптотой $\frac{2}{3}$

$g(x) = 18x^2-51x+28$ – парабола

$g(\frac{2}{3}) = 2$; $g(2) = -2$

$f(\frac{2}{3}) \to \infty$; $f(2) = -1$; $f(\frac{4}{3}) = 0$; $f(1) = 2$

Рассмотрим 3 прямые:

I) AB: $\begin{cases} \frac{2}{3}a + b = 2 \\ \frac{4}{3}a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3}a = -2 \Rightarrow a = -3;\ b = 4$ (прямая, кас. гипер. и пар. в $\frac{2}{3}$)

II) AC: $\begin{cases} \frac{2}{3}a + b = 2 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3}a = -4 \Rightarrow a = -3;\ b = 4$ (прямая, леж на параб. в 2/3 и 2)

III) BC: $\begin{cases} \frac{4}{3}a + b = 0 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3}a = -2 \Rightarrow a = -3;\ b = 4$ (прямая, кас. гипер. и параб. в 2)

Как видно $a=-3; b=4$ во всех случаях $\Rightarrow$

Прямая только одна.

Ответ: $(-3;4)$

№5

Любое число ab в конце концов состоит из произведения нескольких простых чисел, например $12 = 6\cdot 2 = 2\cdot 2\cdot 3 \Rightarrow$ любое целое число $ab > 0$, т.к.

$ab = p_1 p_2 \ldots p_n \Rightarrow \underbrace{f(p_1)}_{\geqslant 0} + \underbrace{f(p_2)}_{\geqslant 0} + \ldots + \underbrace{f(p_n)}_{\geqslant 0} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{x}{y}$ – нецелое $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \not\vdots\, y$ или $x < y \Leftarrow 25\cdot 24 + 24\cdot 23 + \ldots + 2\cdot 1 = 24\cdot 48 + 22\cdot 44 + 20\cdot 40 + \ldots + 2\cdot 4 =$

$= 24^2\cdot 2 + 22^2\cdot 2 + \ldots + 2^2\cdot 2 = 8(12^2 + 11^2 + \ldots + 1^2) = 5200$; $8: 8; 16; 24$; $9: 9; 18; 27$; $10: 10; 20 \ldots$; $14: 14; 28$

~~Наименьший квадрат, который больше 28~~

числа кратные 4: 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 5: 5; 10; 15; 20; 25; 6: 6; 12; 18; 24; 7: 7; 14; 21; 28

продолжение 5

$y \downarrow$ \ $x \Rightarrow$	4	5	6	7	8	…	28
4	✗	✓	✓	✓	✗	✓ ✓ …	✗
5	✗	✗	✓				
6							
7							
⋮							
28							

Если составить квадрат из чисел
и вычеркнуть все такие числа,
которые мы записали ранее,
+ числа с одинаковыми координатами,
останутся только такие числа $\Rightarrow$: $x < y$ и $x \not\vdots\, y$

$(28-4+1)^2-20-5-(28-4+1)=25^2-25-25=25(25-2)=25\cdot 23=\frac{2300}{4}=$

$=575$

Ответ: 575

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\left|\sqrt{1-\frac{1}{17}}\right| = \pm\left|\frac{4}{\sqrt{17}}\right|$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \sin 2\beta\left(\pm\left|\frac{4}{\sqrt{17}}\right|\right) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

№ 2

$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-6x = \sqrt{x(y-6)-(y-6)} & (1) \\ 9(x^2-2x+1)+(y^2-12y+36) = 0 & (2) \end{cases}$

(1) $y-6x = \sqrt{(x-1)(y-6)}$ $\quad 6-6 = \sqrt{0\cdot 0} = 0$

(2) $9(x-1)^2+(y-6)^2 = 0 \Rightarrow x = 1;\ y = 6$

№ 3

$(x^2-26x)^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

ОДЗ: $26x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2-26x < 0 \Rightarrow x \in (0;26)$

$(26x-x^2)^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$x^2-26x \leq (26x-x^2)^{\log_5 12} - 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \Rightarrow \log_c a\cdot\log_b c \Rightarrow \log_b a \Rightarrow \log_c a\cdot\frac{1}{\log_c b} = \log_b a.$

$x^2-26x \leq (26x-x^2)^{\log_5 12} - (26x-x^2)^{\log_5 13}$

$(26x-x^2) \geq (26x-x^2)^{\log_5 13} - (26x-x^2)^{\log_5 12}$

$(26x-x^2) \geq (26x-x^2)^{\log_5 12}\left((26x-x^2)^{\log_{12} 13} - 1\right)$

$y = a+6;\ x = b+1$

$(y-6x)^2 = y^2-12xy+36x^2$

$(x-1)(y-6) = \frac{90-(3x-y-9)^2}{6}$

$6y^2-72xy+36\cdot 6x^2 =$

$= 90-(9x^2$

$\frac{90}{6} = 15$

$0 \leq (y-6)(x-1) \leq 15$

$y-6x \geq 0$

$\begin{cases} (a+6)-6b-6 = \sqrt{ab} \\ 9b^2+a^2 = 90 \end{cases}$

$\begin{cases} a-6b = \sqrt{ab} \\ 9b^2+a^2 = 90 \end{cases}$

$a^2-120b+36b^2 = ab$

$9b^2+a^2 = 90$

$36b^2-9b^2-130b = -90$

$25b^2-130b+90 = 0$

$D = 169a^2-9000 \geq 0$

$a^2 \geq \frac{9000}{169}$

$a \geq \sqrt{13}$

$a^2 = 90-9b^2$

$90-9b^2 \geq \frac{9000}{169}$

$10-b^2 \geq \frac{1000}{169}$

$\frac{a+b}{2} \geq a-6b$

$a+6b \geq 2a-12b$

$13b \geq a$

$a^2 = 9(10-b^2)$

$13b \geq 3\sqrt{10-b^2}$

$\frac{169}{9}b^2 \geq 10-b^2 \Rightarrow$

$9b^2+60b+a^2 = 90+60b$

$(3b+a)^2 = 90+60b$

$9b^2+60b+a^2 = 90$

$9b^2+60b+a^2 = 90+a^2-120b+b^2$

$8b^2+180b-90 = 0$

$\frac{690-1000}{169}$

$b^2 \leq$

$\Rightarrow b^2 \leq \frac{690}{169}$

$\Rightarrow \frac{178}{9}b^2 \geq 10$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6

$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$

$\frac{8-6x}{3x-2}$: $8-6x \,|\, 3x-2$; $-6x+4$; 4; -2

$\times\frac{14}{16}$ 84 $+\frac{14}{224}$ $\quad -2+\frac{4}{3x-2}$ $\quad \times\frac{17}{17}$ 119 $+17$ 289 224 55

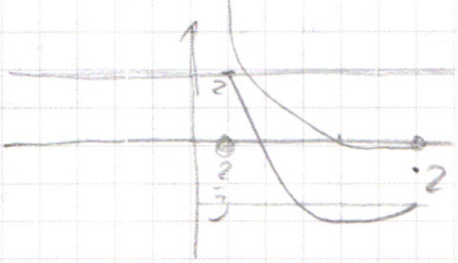
$\left(\frac{8-6x}{3x-2}\right)' = \frac{(-6)(3x-2)-(8-6x)\cdot 3}{(3x-2)^2} = \frac{-18x+12-24+18x}{(3x-2)^2} = \frac{-12}{(3x-2)^2}$

Нолв: Нол $\Rightarrow \downarrow\downarrow$ $\quad$ min:

$D = 17^2\cdot 9 - 4\cdot 9\cdot 2\cdot 7\cdot 4 = 9(\cdot 55)$

$36x-51=0 \Rightarrow x=\frac{51}{36}=\frac{17}{12}$

$-2+\frac{4}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant$



$\frac{2}{3}$ —— 2

$\frac{18\cdot 4}{9} - \frac{51\cdot 2}{3} + 28 = 8 - 34 + 28 = 2$

$18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28 = 72 + 28 - 102 = -2$

$\frac{18\cdot 17^2}{12^2} - \frac{17^2}{4} + 28 =$

$= 17^2\left(\frac{6\cdot 3}{6^2\cdot 2^2} - \frac{1}{4}\right) + 28 =$

$= 17^2\left(\frac{3-6}{24}\right) + 28 =$

$= 17^2\cdot\frac{-1}{8} + 28 =$

$= \frac{-55}{8} \approx -7$

уравнение касательной

$f'(x_0) = \frac{y-f(x_0)}{(x-x_0)} \Rightarrow y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

y : $k = f'(x)$; $b = f(x_0) - f'(x)\cdot x_0$ $\quad \times\frac{28}{8}$ 224

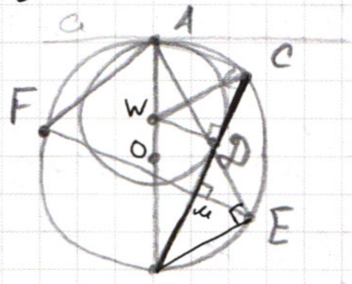
$k = \frac{-12}{(3x-2)^2}$

№5 $\quad D(f) > 0$

$f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow \left[\frac{ab}{4}\right] = \left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{b}{4}\right]$

$9b^2 + ab + a^2 = 90 + a^2 - 12 + ab$

№4



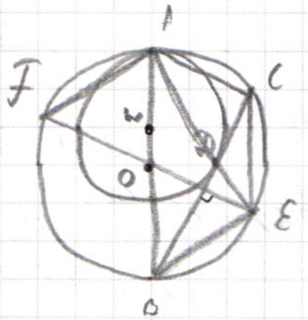
Оба центра лежат на диаметре

$\triangle BWD \sim \triangle ACB$: $\frac{WB}{AB} = \frac{BD}{BD+DC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle DME \Rightarrow AC \parallel ME$

$\frac{x}{4y} < 1$

$\left[\frac{ab}{4}\right] = \left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{b}{4}\right]$



Тк $\quad x < 4y \Rightarrow y > \frac{x}{4}$

$28 \geqslant y > \frac{x}{4} \geqslant 1$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{1}{4y}\right] < 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{4}\right] \leqslant 0$; $\left[\frac{1}{4y}\right] \leqslant 0$

5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; $\qquad x \leqslant 4$; $\frac{1}{4y} \leqslant 1 \Rightarrow 4y \geqslant 1$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ $\qquad \cancel{f(x)} = f(4) = f(3) + f(1) = 0 + 0$

$f(5) = f(2) + f(3) =$

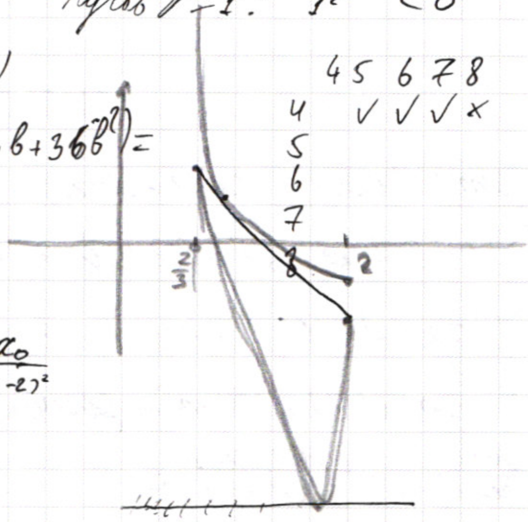
☑ черновик $\quad$ ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

№6 $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$\frac{-6(3x-2)-3(8-6x)}{(3x-2)^2} = \frac{-18x+12-24+18x}{(3x-2)^2} = \frac{-12}{(3x-2)^2}$ Пусть $x=1$: $\frac{-12}{1^2} < 0$

Функция убывает на всей своей $D(f)$



45678
4 ✓✓✓✗
5
6
7

т.е при x:

$3b^2 \mp 60b + a^2 + 6(a^2 - 120b + 36b^2) =$

$= 3$

x	$\ldots \leq y \leq \ldots$
2	$-2 \leq \quad \leq -1$
$\frac{2}{3}$	$2 \leq \quad \leq +\infty$

$\Rightarrow \begin{cases} -2 \leq 2a+b \leq -1 \\ \frac{2}{2} \leq \frac{2}{3}a+b \end{cases}$

Уравнение касательной: $y = \frac{-12}{(3x_0-2)^2}x + \frac{8-6x_0}{3x_0-2} + \frac{12x_0}{(3x_0-2)^2}$

$a \leq \frac{-12}{3x_0-2}$, $b \leq \frac{8-6x_0}{3x_0-2} + \frac{12x_0}{(3x_0-2)^2}$

$b \geq a$ $\quad b \geq 2-\frac{2}{3}a \Rightarrow -2-2a \leq b \leq -1-2a$

$-2-2a \quad\quad -1-2a$

$-2 \leq \frac{4}{3}a \leq +\infty \Rightarrow$

$2-\frac{2}{3}a \leq -1-2a \Rightarrow$

$-2-2a \leq b \Rightarrow$

$\Rightarrow a \geq \left(\frac{b+2}{-2}\right)$

$3 \leq \frac{2}{3}a - 2a \Rightarrow 3 \leq -\frac{4}{3}a \Rightarrow a \leq -\frac{9}{4}$

$-\frac{9}{4} \geq \frac{b+2}{-2} \Rightarrow$

$b \leq -1-2a \Rightarrow b+1 \leq -2a \Rightarrow a \leq \frac{b+1}{-2}$

$\frac{9}{2} \leq b+2 \Rightarrow$

$\frac{b+1}{-2} \leq -\frac{9}{4} \Rightarrow b+1 \geq \frac{9}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow b \geq 3{,}5$ $\quad 9 \leq 2b+4 \Rightarrow 2b \geq 5$

$b \geq 2{,}5$

$\sin 2\alpha =$ $\quad k(y-6x)$

$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$\cos^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{1+\cos 2\alpha}{2} =$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} =$

$\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} =$ $\quad a^2 + 9b^2 - 90 = 0$

$\sin 2\alpha = \cancel{\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}} = 2\sin\alpha\cos\alpha =$

$= \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$

$\cos 2\alpha = 2\cos 2\sin^2\alpha =$

$= \left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 2\operatorname{tg}^2\alpha\right)\cos^2\alpha =$

$= (\operatorname{tg}^2\alpha + 1 - 2\operatorname{tg}^2\alpha)\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} =$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \cancel{\cos^2\alpha = \frac{1}{}}$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} \Rightarrow \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{2-\operatorname{tg}^2\alpha-1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$

$= 1-\operatorname{tg}^2\alpha$

$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha+1-1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow$

$3+27-9 = 3(3^{1-1}+3^{3-1}-3^{2-1}) = 3\cdot(1+9-3)$

$13^{\log_5 x_1} - 12^{\log_5 x_1} - x_1 - 13^{\log_5 x_2} + 12^{\log_5 x_2} + x_2 = (x_2-x_1) + 13^{\log_5 x_1} - 13^{\log_5 x_2} +$

$+ 12^{\log_5 x_2} - 12^{\log_5 x_1}$

$(13-12)(13^2+13\cdot12+12^2) =$

$9b^2+36b^2 = 90 \Rightarrow 45b^2 = 90 \Rightarrow b^2 = 2 \Rightarrow b \in [-\sqrt{2};\sqrt{2}]$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha (1+\cos 4\beta) + \cos 2\alpha \sin 4\beta = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ tg 2\alpha (1+\cos 4\beta) + \sin 4\beta = -\frac{2}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg 2\alpha + tg 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ tg 2\alpha \frac{1+\cos 4\beta}{\cos 4\beta} + tg 4\beta = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 1}$$

$$\frac{BD}{DC} \quad \frac{BD}{AD} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow BD \cdot DC = DE \cdot AD$$

$$\frac{CD}{D\,\,} = \frac{AD}{DE}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha \cos 2\beta - \sin 2\beta \sin 2\alpha \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$\cos 2\beta\left(-\frac{1}{\sqrt{17}} + \sin 2\beta \cos 2\alpha\right) - \sin 2\alpha(\sin^2 2\beta - 1) = -\frac{2}{17}$$

$$\cos 2\beta\left(-\frac{1}{\sqrt{17}} + \sin 2\beta \cos 2\alpha\right) - \sin 2\alpha\,(-\cos^2 2\beta) = -\frac{2}{17}$$

$$\cos 2\beta\left(\sin 2\beta \cos 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha \cos 2\beta\right) = -\frac{2}{17}$$

$$\cos 2\beta\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{2}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{\frac{16}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{4\cos 2\alpha}{\pm\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1 \Rightarrow tg 2\alpha(1 \pm 4) = -1 \Rightarrow tg 2\alpha = \frac{-1}{1\pm 4}$$

$$tg 2\alpha = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}. \quad \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} = \frac{2tg\alpha}{2 - \frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{-1}{1 \pm 4} \Rightarrow$$

5; 7; 11; 13; 17; 19; 23

$$\frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = -\frac{1}{5} \qquad\qquad \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{1}{3}$$

$23 \cdot 22 + 22 \cdot$

$144 + 9 + 16 = 30$

$$10 tg\alpha = -1 + tg^2\alpha \qquad\qquad 6 tg\alpha = 1 - tg^2\alpha$$

$$tg^2\alpha - 10 tg\alpha - 1 = 0 \qquad\qquad tg^2\alpha + 6 tg\alpha - 1 = 0$$

$$D = 100 + 4 = 4 \cdot 26 = (2\sqrt{26})^2 \qquad\qquad D = 36 + 4 = 4 \cdot 10 = (2\sqrt{10})^2$$

$$tg\alpha = \frac{10 \pm 2\sqrt{26}}{2} = 5 \pm \sqrt{26} \qquad\qquad tg\alpha = \frac{-6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -3 \pm \sqrt{10}$$

$$\sin 2\alpha \pm 4(1 - 2\sin^2\alpha) = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha + 4 - 8\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

144 + 121 = 265; + 100 = 365; + 81 = 446; + 64 = 510; + 49 = 559; + 36 = 595; + 25 = 620; + 30 = 650; 5200

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)