МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

√ 1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

√ 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

√ 4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) - 2\alpha$

Подставим во второе ур-е:

$\sin\left(2\alpha + 2\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) - 4\alpha\right) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cancel{\sin 2\alpha \cos\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)}$

$\sin\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) - 2\alpha\right) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)\cdot\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cos\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)\cdot\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)\cdot\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\left(1 - 2\sin^2\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)\right) + \sin 2\alpha =$
$= -\frac{4}{5}$

$\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = \gamma$; $\quad \sin\gamma = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\quad \sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$

$\cos^2\gamma = 1 - \sin^2\gamma = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\gamma_1 = \frac{2}{\sqrt5}$; $\quad \cos\gamma_2 = -\frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ два случая:

I) $\cos\gamma = -\frac{2}{\sqrt5}$. Тогда:

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\alpha - \sin 2\alpha + 2\cdot\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\frac{4}{5}\cos 2\alpha + \frac{2}{5}\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \quad \Big| \cdot\frac{5}{2}$

$2\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -2 = -2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$

$2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$; $\qquad$ $tg\alpha$ не определён при $\cos\alpha = 0$
однако по усл. $tg\alpha$ определён $\Rightarrow$ $\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow$ можно сократить.

$2\cos\alpha = -\sin\alpha$

$2 = -tg\alpha \Rightarrow tg\alpha = -2$

II) $\cos\gamma = +\frac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда:

$$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos 2\alpha - \sin 2\alpha + 2\cdot\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$-\frac{4}{5}\cos 2\alpha + \frac{2}{5}\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \quad |\cdot\frac{5}{2}$$

$$-2\cos 2\alpha + \cancel{2\sin}\sin 2\alpha + 2 = 0$$

$$2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha + 2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 0$$

$$\cancel{4}^{2}\sin^2\alpha + \cancel{2}\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$\sin\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0\\ 2\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \Rightarrow 2\sin\alpha = -\cos\alpha \Rightarrow 2 = -\operatorname{ctg}\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha_1 = 0$; $\operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha_3 = -2$.

№2. $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} & (1)\\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 & (2)\end{cases}$ ОДЗ: $x \geq 2y$

1) $x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \quad \uparrow^2$

$$(x-2y)^2 = xy - x - 2y + 2$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$$

$$x^2 - 5xy + x + 4y^2 + 2y - 2 = 0$$

$$x^2 + x(1 - 5y) + 4y^2 + 2y - 2 = 0$$

$$D = 1 - 10y + 25y^2 - 16y^2 - 8y + 8 = 9y^2 - 18y + 9 = 9(y^2 - 2y + 1) =$$

$$= 9(y-1)^2$$

$$x_1 = \frac{5y - 1 - \cancel{3y + 3}}{2} = \frac{2y+2}{2} = y + 1$$

$$x_2 = \frac{5y - 1 + 3y - 3}{2} = 4y - 2$$

I) $x = y + 1$

$$(y+1)^2 + 9y^2 - 4(y+1) - 18y - 12 = 0$$

$$y^2 + 2y + 1 + 9y^2 - 4y - 4 - 18y - 12 = 0$$

$$10y^2 - 20y - 15 = 0$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2y^2-4y-3=0$

$D=16+24=40$

$y_1=\frac{4+2\sqrt{10}}{4}=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$ $\quad y_2=\frac{2-\sqrt{10}}{2}$

По ОДЗ $x\geq 2y \Rightarrow y+1\geq 2y \Rightarrow 1\geq y \Rightarrow y\leq 1$; $y=1+\frac{\sqrt{10}}{2}>1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не подх. по ОДЗ.

$x=y+1=\frac{2-\sqrt{10}}{2}+1=\frac{4-\sqrt{10}}{2}$.

II) $x=4y-2$

$(4y-2)^2+9y^2-4(4y-2)-18y-12=0$

$16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y-12=0$

$25y^2-50y=0$

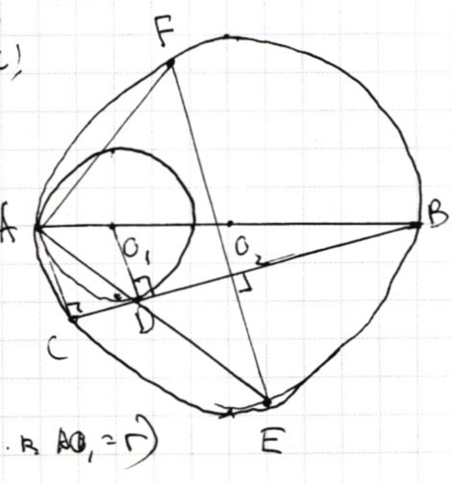
$y(y-2)=0 \quad y_1=0 \quad y_2=2$

По ОДЗ $x\geq 2y \Rightarrow 4y-2\geq 2y \quad 2y\geq 2 \quad y\geq 1 \Rightarrow y=0$ не подх.

$y=2 \Rightarrow x=8-2=6$

Ответ: $(6;2)$; $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}; \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$

№4.



Дано: A – точка касания окр. ω и Ω;
AB – диаметр Ω; BC кас. ω; $EF\perp BC$;
$CD=8$; $BD=17$
Найти: r; R; $\angle AFE$; $S_{AEF}=?$
Решение: Проведём O_1D; т.к. D – точка касания $O_1D\perp BC$; $O_1D=r$
Проведём AC; $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$, т.к. опирается на диаметр

$\triangle O_1DB$ и $\triangle ABC$ – прямоуг.; $\Rightarrow$
$\angle ABC$ – общий $\Rightarrow \triangle ABC\sim\triangle O_1DB$
$k=\frac{BD}{BC}=\frac{17}{17+8}=\frac{17}{25}=\frac{O_1B}{AB}=\frac{2R-r}{2R}$ (т.к. $AO_1=r$)

$\frac{2R-r}{2R}=\frac{17}{25}$ $50R-25r=34R$

$16R=25r \Rightarrow R=\frac{25}{16}r$

По т. Пифаг. в $\triangle BO_1D$:

$O_1B^2=O_1D^2+BD^2$

$(2R-r)^2=r^2+17^2$

$\left(\frac{25}{8}r-r\right)^2=r^2+17^2$

$\frac{17^2}{8^2}r^2=r^2+17^2$

$\left(\frac{289-64}{64}\right)r^2=17^2$

$\frac{225}{64}r^2=289 \Rightarrow \frac{15}{8}r=17 \Rightarrow r=\frac{17\cdot 8}{15}=\frac{136}{15}$

$R=\frac{25}{16}r=\frac{85}{16}\cdot\frac{17\cdot 8}{15}=\frac{5\cdot 17}{6}=\frac{85}{6}$

$\angle CAE=\frac{1}{2}\smile EC$;   ~~∠CA~~ $\frac{AC}{O_2D}=\frac{25}{17} \Rightarrow AC=\frac{25}{17}r=\frac{25}{17}\cdot\frac{17\cdot 8}{15}=\frac{40}{3}$

$tg\angle CAD=\frac{8}{\frac{40}{3}}=\frac{3}{5}=tg\alpha$; $\alpha=\angle CAD$

$\triangle BO_2D$ ~~∠CBA = O₂~~ $tg\angle O_2BD=\frac{r}{BD}=\frac{\frac{17\cdot 8}{15}}{17}=\frac{8}{15}$

$\angle CBA=\frac{1}{2}\smile AC=\beta$

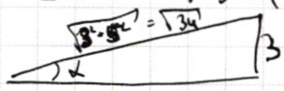
$\angle AFE=\frac{1}{2}\smile AE=\frac{1}{2}(\smile AC+\smile EC)=\angle CBA+\angle CAD=\alpha+\beta$

$tg\angle AFE=tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta}=\frac{\frac{8}{15}+\frac{3}{5}}{1-\frac{8}{15}\cdot\frac{3}{5}}=\frac{\frac{17}{15}}{1-\frac{8}{25}}=\frac{\frac{17}{15}}{\frac{17}{25}}=\frac{25}{15}=\frac{5}{3}$

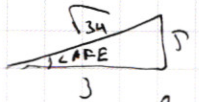
$\angle AFE=arctg\left(\frac{5}{3}\right)$;

$\triangle ACD$ и $\triangle EDM$ − прямоуг; $\angle CDA=\angle MDE$ (т.к. верт.) $\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle DME \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAD=\angle DEM=\alpha$;



$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{34}}$; $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{34}}$



$\sin\angle AFE=\frac{5}{\sqrt{34}}$ $\cos\angle AFE=\frac{3}{\sqrt{34}}$

$\triangle AEF$ − вписан. $\Rightarrow R=\frac{a}{2\sin\varphi} \Rightarrow a=2R\cdot\sin\varphi$

$AE=2R\cdot\sin\angle AFE=2\cdot\frac{85}{6}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}}=\frac{85\cdot 5}{3\sqrt{34}}$

$AF=2R\cdot\sin\alpha=\cancel{2R}\, 2\cdot\frac{85}{6}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}=\frac{85}{\sqrt{34}}$

$\angle FAE=\pi-\alpha-\angle AFE$

$\sin\angle FAE=\sin(\pi-\alpha-\angle AFE)=\sin(\alpha+\angle AFE)=\sin\alpha\cos\angle AFE+\cos\alpha\sin\angle AFE$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin\angle FAE = \frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} + \frac{5}{\sqrt{34}}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{8}{34}+\frac{8}{34} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$

$S_{AFE} = \frac{1}{2}\cdot AF\cdot AE\cdot\sin\angle FAE = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{8}^{4}}{17}\cdot\frac{85}{\sqrt{34}}\cdot\frac{5\cdot 85}{3\sqrt{34}} = \frac{\cancel{20}^{10}\cdot 85^2}{17\cdot 34\cdot 3} = \frac{72250}{867}$

Ответ: $r = \frac{136}{15}$; $R = \frac{85}{6}$; $\angle AFE = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)$; $S_{AFE} = \frac{72250}{867}$

№3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

ОДЗ: $x^2+18x>0$ (т.к. под логарифмом)

$x(x+18)>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

т.к. $x^2+18x>0$ модуль можно раскрыть со знаком „+".

$x^2+18x=t$; $t>0$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$; $v^{\frac{y}{z}} = (v^y)^{\frac{1}{z}}$

$5^{\log_{12}\cancel{(x^2+18x)}t} = 5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 12}} = \left(5^{\log_5 t}\right)^{\frac{1}{\log_5 12}} = t^{\frac{1}{\log_5 12}}$

$t^{\frac{1}{\log_5 12}} \geq t^{\log_{12}13} - t$

$t^{\log_{12}13} - t = t\left(t^{\log_{12}13-1} - 1\right) = t\left(t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)} - 1\right)$

$t^{\log_{12}5} \geq t\left(t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)} - 1\right)$

$t^{\log_{12}5} + t^{\log_{12}12} - t^{\log_{12}13} \geq 0$

~~$t^{\frac{\log_{12}t}{\log_{12}12}} + 12^{\log_{12}t}$~~ $-$

$t^{\log_{12}5} + t^{\log_{12}12} - t^{\log_{12}13} \geq 0$

$12^{\log_{12}t^{\log_{12}5}} + 12^{\log_{12}t} - 12^{\log_{12}t^{\log_{12}13}} \geq 0$

$12^{\log_{12}5\cdot\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} - 12^{\log_{12}t\cdot\log_{12}13} \geq 0$

№6. $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$; $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

I) $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b$

$\frac{12x+11}{4x+3} - (ax+b) \le 0$

$\frac{12x+11-(ax+b)(4x+3)}{4x+3} \le 0$; т.к. $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ $4x+3<0$ при $\forall x \in$ отрезка

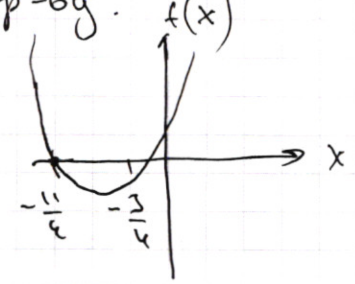
$\Rightarrow$ можно сократить с изм. знака

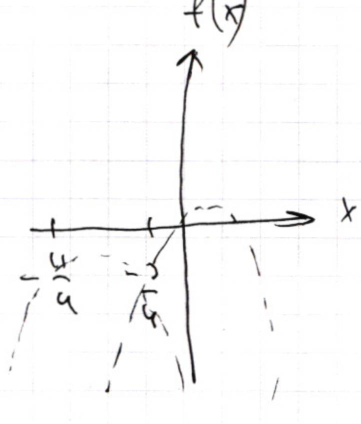
$12x+11-4ax^2-4bx-3ax-3b \ge 0$

$4ax^2+x(4b+3a-12)-11+3b \le 0$ при $\forall x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$.

Это равносильно ~~пер~~-ву:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0 \\ f(-\frac{11}{4}) \le 0 \\ f(-\frac{3}{4}) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\frac{11}{4} \le x_0 < -\frac{3}{4} \\ f(x_0) \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 \in (-\infty; -\frac{11}{4}) \cup [-\frac{3}{4}; +\infty) \\ f(-\frac{11}{4}) \le 0 \\ f(-\frac{3}{4}) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$





II) $ax+b \ge -8x^2-30x-17$

$8x^2+x(30+a)+17+b \le 0$ при $\forall x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} f(-\frac{11}{4}) \le 0 \\ f(-\frac{3}{4}) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 \cdot \frac{121}{16} - \frac{165}{2} - \frac{11}{4}a + \frac{34}{2} + b \le 0 \\ 8 \cdot \frac{9}{16} - \frac{45}{2} - \frac{3a}{4} + \frac{34}{2} + b < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{121-165+34}{2} - \frac{11}{4}a + b \le 0 \\ \frac{9-45+34}{2} - \frac{3}{4}a + b < 0 \end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b$

$\frac{12x+11}{4x+3} - ax - b \le 0$

$\frac{12x+11-(ax+b)(4x+3)}{4x+3} \le 0$

$\frac{12x+11-4ax^2-4bx-3ax-3b}{4x+3} \le 0$

$-4ax^2 - x(4b+3a-12) - 3b \ge 0$

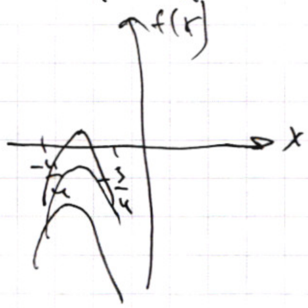
I: $4ax^2 + x(4b+3a-12) - 3b \le 0$ $\qquad x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$

II: $ax+b \le -8x^2-30x-17$

$8x^2 + x(a+30) + b + 17 \le 0$

$D = a^2+60a+900-32b-32\cdot 17$

$f(-\frac{11}{4}) \le 0 \qquad f(-\frac{3}{4}) \le 0$



II) $8\cdot\frac{121}{16} - \frac{11}{4}(a+30) + b + 17 \le 0$

$\frac{121}{2} - \frac{11}{4}a - \frac{165}{2} + b + \frac{34}{2} \le 0$

$-5 - \frac{11}{4}a + b \le 0$

$b \le \frac{11}{4}a + 5$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

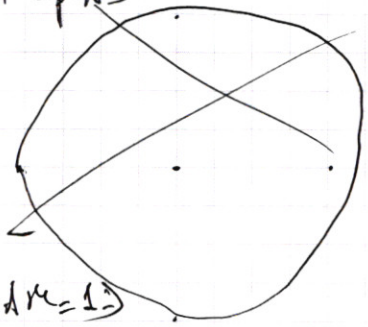
$$\begin{cases} b \le \frac{11}{4}a+5 \\ b \ge \frac{3}{4}a+1 \end{cases}$$

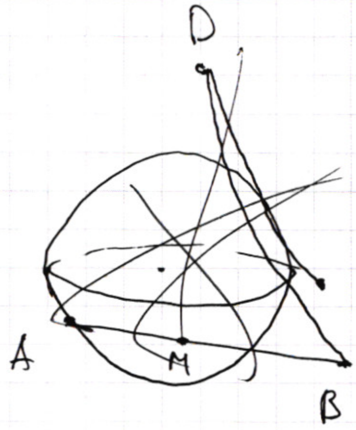
№7.

Дано: $AB=1$; $BD=2$; $CD=3$; $M, N, K, Z, H \in \omega$

Найти: BC

~~Если~~ AB – секущая; M – сер. AB





Если BD касается окружн., то

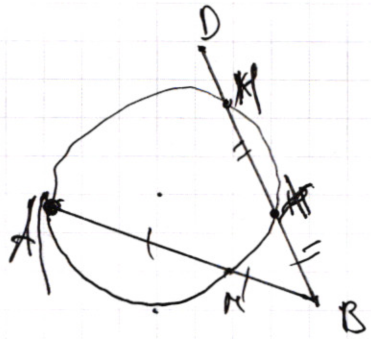
$BH^2 = AM \cdot BM$;

но $BH=1$; $BM=\frac{1}{2}$; $AM=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ BD – секущая

$AB \cdot BM = BX \cdot BH$

$1 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot BX \to BX = \frac{1}{2}$



аналогично для CD;

Если CD – касат., то

$CN^2 = DH \cdot DX$; $\frac{9}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow CD$ – секущая

$CN \cdot CY = DH \cdot DH = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot CY \Rightarrow CY = \frac{1}{2}$

Тогда BC находится из двух ур-й секущих.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad f(p) = [\frac{p}{4}]$

$1 \le x \le 24 \qquad 1 \le y \le 24 \qquad f(\frac{x}{y}) < 0$

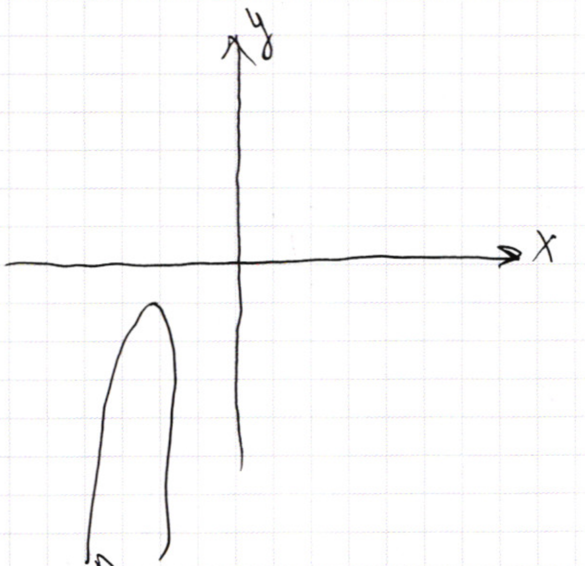
$f(p) = [\frac{p}{4}]$ для $\forall p$ - простого

№6. $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+6 \le -8x^2-30x-17$

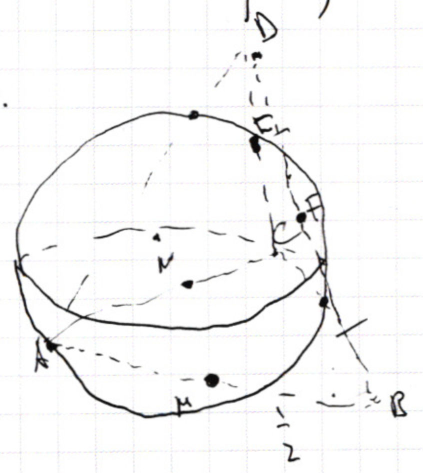
$\forall x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

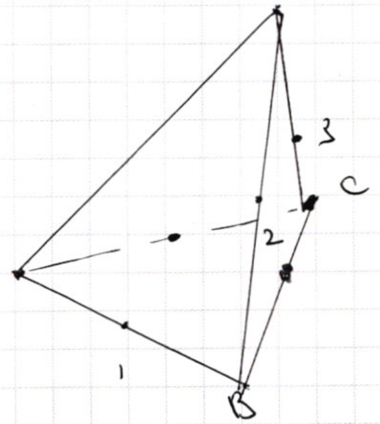
$(-8x^2-30x-17)' = -16x - 30 = 0 \qquad x = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

$1 + \frac{2}{4x+3}$



№7.





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\qquad tg\alpha = ?$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ (1)

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\beta \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ (2)

$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)$ $\qquad 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) - 2\alpha$

$\sin\left(2\alpha + 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) - 4\alpha\right) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) - 2\alpha\right) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cos\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\left(1 - 2\sin^2\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)\right) +$

$+ \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

I) $-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right)\cos 2\alpha \cancel{- \sin 2\alpha} + \frac{2}{5}\sin 2\alpha \cancel{+ \sin 2\alpha} = -\frac{4}{5}$

$\frac{4}{5}\cos 2\alpha + \frac{2}{5}\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -2$

$2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha = -2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$

$2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$\cancel{4}2\cos^{\cancel{2}}\alpha + \cancel{2}\sin\alpha\cancel{\cos\alpha} = 0$ $\qquad \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\cos\alpha = -\sin\alpha$ $\qquad tg\alpha = -2$ $\qquad \sin 4\beta = 2\sin\beta\cos\beta =$
$= -\frac{4}{5}$

II) $-2\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -2$

$2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha = -2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$

$4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$, $\quad \sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = 0$

$2\sin\alpha = -\cos\alpha$ $\qquad tg\alpha = -\frac{1}{2}.$

$$\sim 2.\ \begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

$$(x-2)^2+(3y-1)^2-4-1=12$$

$$(x-2)^2+(3y-1)^2=17$$

2) $x^2-4x+9y^2-18y-12=0$

$$D=16-4(9y^2-18y-12)=16-36y^2+72y+48=-36y^2+72y+64$$

$$t^{\log_{12}\left(\frac{5}{12}\right)}-t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)}\geq -1$$

$$t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)}-t^{\log_{12}\left(\frac{5}{12}\right)}\leq 1$$

$$t^{\log_{12}13}-t^{\log_{12}5}\leq t$$

$$t^{\log_{12}13}\left(\cancel{t^{\log_{12}13-\log}}\ 1-t^{\log_{12}\frac{5}{13}}\right)\leq t$$

$$t^{\log_{12}5}-t^{\log_{12}13}\geq -t$$

1) $x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$$x^2-5xy+x+2y-2+4y^2=0$$

$$x^2+x(1-5y)+4y^2+2y-2=0$$

$$D=1-10y+25y^2-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=9(y^2-2y+1)=$$

$$=9(y-1)^2$$

$$x_1=\frac{5y-1+3y-3}{2}=\frac{8y-4}{2}=4y-2 \qquad y-1\geq 0 \qquad y\geq 1$$

$$x_2=\frac{5y-1-3y+3}{2}=y+1$$

I) $x=3y-1$ $\qquad f(y)=\sqrt{3y^2-y-3y+1-2y+2}=\sqrt{3y^2-6y+3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{(y-1)^2}=\sqrt{3}\,|y-1|\geq 0$

$$(3y-1)^2+9y^2-4(3y-1)-18y=12$$

$$9y^2-6y+1+9y^2-12y+4-18y-12=0$$

$$18y^2-36y-7=0$$

$$D=36^2+7\cdot 18\cdot 4=18^2\cdot 2^2+7\cdot 18\cdot 4=18^2\cdot 4+7\cdot 18\cdot 4=18\cdot 4(18+7)=$$

$$=18\cdot 4\cdot 25=(30\sqrt{2})^2$$

$$y_1=\frac{36+30\sqrt{2}}{36}=\frac{18+15\sqrt{2}}{18} \qquad y_2=\frac{18-15\sqrt{2}}{18}\text{ — не подх.}$$

II) $x=2y$ $\qquad \sqrt{2y^2-2y-2y+2}=\sqrt{2}\sqrt{y^2-2y+1}=\sqrt{2}\,|y-1|\geq 0$

$$4y^2+9y^2-8y-18y-12=0$$

$$13y^2-26y-12=0$$

$$D=4\cdot 13^2+4\cdot 13\cdot 12=4\cdot 13(12+13)=4\cdot 13\cdot 25=(10\sqrt{13})^2$$

$y=1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x = t$;

$5^{\log_{12} t} + t \geq |t|^{\log_{12}13}$

$t>0$

$5^{\log_{12} t} \geq t^{\log_{12}13} - t$

$a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\frac{1}{\log_a b}} =$

$= c^{\frac{1}{\log_a b}} -$

$= t^{\frac{1}{\log_5 12}} = t^{\log_{12}5}$

$t^{\log_{12}5} \geq t^{\log_{12}13} - t$

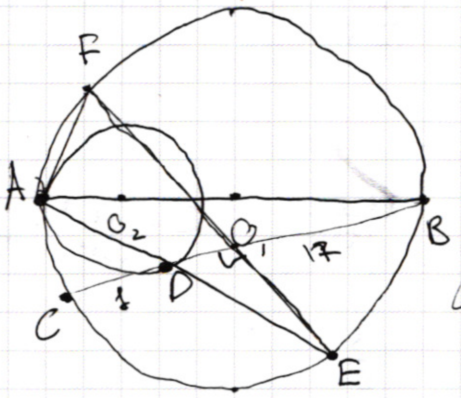
$t^{\log_{12}5} \geq t^{(\log_{12}13 - 1)}$

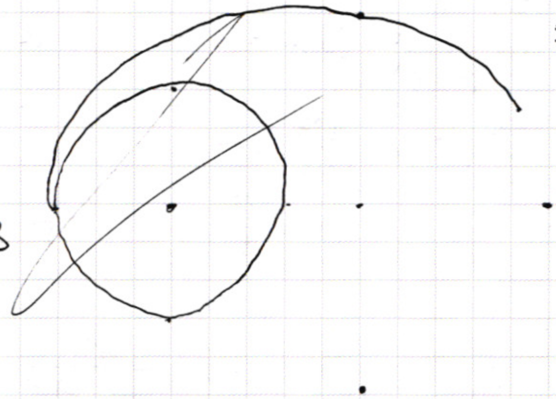
$S_{ABC} = ?$

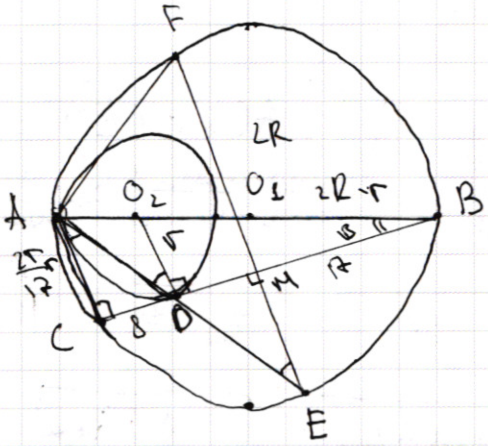
№4. $r=?$ $R=?$ $\angle AFE = ?$ $CD = 8$ $BD = 17$.

$85 \times 85 = 425 + 680 = 7225$

$289 \times 3 = 867$







$O_2B = 2R - r$ $\quad$ $O_2D = r$

$(2R-r)^2 = r^2 + BD^2$

$4R^2 - 4rR + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + BD^2$

$\triangle ABC \sim \triangle O_2DB$; $k = \frac{17}{25}$

$AC = \frac{25}{17} r$ $\quad$ $AB = 2R$

$BC = 25$

$4R^2 = 25^2 + \frac{25^2}{17^2} r^2$

$2R = \sqrt{25^2 - \frac{25^2 r^2}{17^2}}$

$\left(\sqrt{25^2 - \frac{25^2 r^2}{17^2}} - r\right)^2 = r^2 + BD^2$

$\left(\frac{25}{17}\sqrt{17^2 - r^2} - r\right)^2 = r^2 + BD^2$

$\frac{25^2}{17^2}(17^2 - r^2) + \frac{50}{17}\sqrt{17^2 - r^2} = 17^2$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\frac{25^2}{17^2}t^2 + \frac{50}{17}t = 17^2$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$ $\begin{array}{r} 17 \\ \times 8 \\ \hline 56 \\ 80 \\ \hline 136 \end{array}$

$25^2 t^2 + 50 \cdot 17 t - 17^4 = 0$

$25^2 t^2 + 50 \cdot 17 t - 17^4 = 0$

$D = 50^2 \cdot 17^2 + 4 \cdot 25^2 \cdot 17^4 = 50^2(1 + 17^2) = 50^2(290)$

$t_1 = \frac{50 \cdot 17 + 50\sqrt{290}}{2 \cdot 25 \cdot 25} = \frac{17}{25} + \frac{\sqrt{290}}{25}$ $\qquad t_2 < 0$

$\sqrt{17^2 - r^2} = \frac{17 + \sqrt{290}}{25}$ $\quad \uparrow^2$

$17^2 - r^2 = \frac{17^2}{25^2} + \frac{17 \cdot 2 \cdot \sqrt{290}}{25^2} + \frac{290}{25^2}$ $\quad | \cdot 25^2$

$17^2 \cdot 25^2 - 25^2 \cdot r^2 = 289 + 290 + 17 \cdot 2 \cdot \sqrt{290}$

$r^2 + 17^2 = (2R - r)^2$

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{17}{25}$ $\qquad 50R - 25r = 34R$

$r^2 + 17^2 = \left(\frac{25}{8}r - r\right)^2$ $\qquad 16R = 25r \qquad R = \frac{25}{16}r$

$r^2 + 17^2 = \frac{17^2}{64}r^2 = \frac{289}{64}r^2$

$17^2 = \frac{225}{64}r^2$ $\qquad 17 = \frac{15}{8}r \qquad r = \frac{17 \cdot 8}{15} \qquad R = \frac{17 \cdot 8}{15} \cdot \frac{25}{16} =$

$= \frac{17 \cdot 5}{6}$

$tg\beta = \frac{8}{15}$ $\qquad tg\alpha = \frac{8}{\frac{25}{17}r} = \frac{8}{\frac{25}{17} \cdot \frac{17 \cdot 8}{15}} = \frac{3}{5}$

$\cup CE = 2\beta$

$\cup AC = 2\beta \qquad \cup CE = 2\alpha \qquad \gamma = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup CE) =$

$= \alpha + \beta; \quad tg\gamma = tg(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \Rightarrow \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} =$

$= \frac{1}{\frac{1}{\sin\alpha\cos\beta}(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)} = \frac{1}{ctg\alpha - tg\beta} = \frac{1}{\frac{1}{tg\alpha} - tg\beta} = \frac{tg\alpha}{1 - tg\alpha tg\beta}$

$\cancel{\cos\alpha\sin\beta} \quad \frac{1}{\frac{1}{\cos\alpha\sin\beta}(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)} = \frac{1}{ctg\beta - tg\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{tg\beta} - tg\alpha} =$

$= \frac{tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} \Rightarrow tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = \frac{\frac{8}{15} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{\frac{17}{15}}{1 - \frac{8}{25}} =$

$= \frac{\frac{17}{15}}{\frac{17}{25}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \gamma = arctg\left(\frac{5}{3}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)