МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ №1 (2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=-\frac{4}{5}$

Из (2) по формуле суммы синусов:

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{4}{5}$. Подставим значение $\sin(2\alpha+2\beta)$ из (1)

(из основного тождества $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$)

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{4}{5}$ => $\cos(2\beta)=\frac{2}{\sqrt5}$ => $\sin(2\beta)=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

Распишем (1) как синус суммы

$\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$ $\frac{2}{\sqrt5}\sin(2\alpha)\pm\frac{1}{\sqrt5}\cos(2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$

$2\sin(2\alpha)\pm\cos(2\alpha)+1=0$

(1) когда $\sin(2\beta)=\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin(2\alpha)+\cos(2\alpha)+1=0$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha=0$

$(2\sin\alpha+\cos\alpha)\cos\alpha=0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0 \text{ — нет, т.к. тогда } tg(\alpha) \text{ не определён}\\ 2\sin\alpha=-\cos\alpha \text{ — нормально}\end{array}\right.$

$tg(\alpha)=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{-2\sin\alpha}=-\frac{1}{2}$

(2) когда $\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin(2\alpha)-\cos(2\alpha)+1=0$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\sin^2\alpha=0$

$(2\cos\alpha+\sin\alpha)\sin\alpha=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0 \to tg(\alpha)=0\\ -2\cos\alpha=\sin\alpha\end{array}\right.$

$tg(\alpha)=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-2\cos\alpha}{\cos\alpha}=-2$

В ходе решения были получены три ответа. Также осуществлялся переход к следствиям (равносильность не сохранена) => мы доказали, что других значений (кроме $0; -\frac{1}{2}; -2$) $tg\,\alpha$ принимать не может. Из условия, решений (возможных значений) не менее 3^x => все наши решения подходят. $\boxed{\text{Ответ: } \{-2; -\frac{1}{2}; 0\}}$

№5

Для начала найдём значения функции при натуральных аргументах от 1 до 24. Ниже в таблице приведены эти значения с комментариями, как они получены.

комментарии
- p – простое число, находится как $f(p) = [\frac{p}{4}]$
- $a \times b$ – ранее были найдены $f(a)$ и $f(b)$, а $f(ab) = f(a) + f(b)$
- 1 – $f(1) = 0$ т.к. $f(a) = f(1) + f(a)$

x	f(x)	комм.	x	f(x)	комм	x	f(x)	комм	x	f(x)	комм	x	f(x)	комм	x	f(x)	комм
1	0	1	5	1	p	9	0	3x3	13	3	p	17	4	p	21	1	3x7
2	0	p	6	0	2x3	10	1	2x5	14	1	2x7	18	0	2x9	22	2	11x2
3	0	p	7	1	p	11	2	p	15	1	3x5	19	4	p	23	5	p
4	0	2x2	8	0	2x4	12	0	2x6	16	0	2x8	20	1	4x5	24	0	4x6

Теперь заметим, что $f(y) + f(\frac{x}{y}) = f(x)$, или $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

Нам надо, чтобы $f(\frac{x}{y}) < 0$ => надо, чтобы $f(x) < f(y)$

Т.к. $x, y \in [1; 24]$, воспользуемся таблицей (при таких x, y $f(x)$ и $f(y) \in [0; 5]$)

① $f(x) = 0$ => для $\overbrace{11}^{\text{каждого из}}$ таких x $\exists$ 13 таких y, что $f(y) > f(x)$ и $x, y \in [1; 24]$ (из таблицы) =>

=> всего пар при $f(x) = 0$ $\boxed{11 \cdot 13}$

② $f(x) = 1$ => для 7 таких x $\exists$ 6 таких y

пар $\boxed{7 \cdot 6}$

③ $f(x) = 2$ => для 2 таких x $\exists$ 4 таких y

пар $\boxed{2 \cdot 4}$

④ $f(x) = 3$ => для 1 такого x $\exists$ 3 таких y

пар $\boxed{1 \cdot 3}$

⑤ $f(x) = 4$ => для 2 таких x $\exists$ 1 такой y => пар $\boxed{2 \cdot 1}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) $f(x) = 5$ для 1 такого x $\exists$ 0 таких y

пар $\boxed{1 \cdot 0}$

Всего пар (искомых) $11 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 =$

$= 143 + 42 + 8 + 3 + 2 = 148 + 50 = 198$

$\boxed{\text{Ответ: } 198}$

№ 3

При решении будем пользоваться $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$\log_a b$ определён лишь при $b > 0$ (ну и $a > 0$, $a \neq 1$), чтобы раскрыть модуль)

Замена $t = x^2 + 18x$ ($t \in (0; +\infty)$) и $z = \log_{12} t$

$5^z + t \geq |t|^{\log_{12} 13} \iff 5^z + t^{\log_{12} 12} \geq t^{\log_{12} 13}$

замена l:

$5^z + 12^{\log_{12} t} \geq 13^{\log_{12} t}$ $\quad 5^z + 12^z \geq 13^z$ $\quad z = 2l$

$25^l + 144^l \geq 169^l$ При $l \leq 0$ — верно, т.к:

в $f(x) = x^l$, где l - параметр, $l \in (-\infty; 0]$ $\Rightarrow$ (!) $f(25) + f(144) \geq f(169)$

~~(...)~~

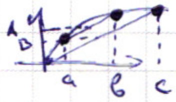
Ну при таких l $f(x) \downarrow \Rightarrow f(25) > f(169)$,

и $f(144) > 0 \Rightarrow f(25) + f(144) > f(169)$ — верно

При $l \in (0; 1)$ $f(x)$ имеет выпуклость

вверх $\Rightarrow \dfrac{\overset{=0}{f(0)} + f(169)}{2} \leq \dfrac{f(25) + f(144)}{2} \Rightarrow f(25) + f(144) > f(169)$

Т.к. при замене участка графика, выпуклого вверх на хорду, выпуклость не меняется (точнее, не пропадает) ~~так~~



$A = \frac{f(a)+f(c)}{2}$

$B = \frac{f(a)+f(c)}{2}$

Видно, что $A > B$

При $l = 1$ $f(x) = x$ и $25 + 144 \geq 169$ - верно (при $x > 0$, $a(x>0)$)

а при $l > 1$ график выпуклый вниз => ~~так~~ ~~что~~

$$=> \frac{f(25)+f(144)}{2} < \frac{\overset{=0}{f(0)}+f(169)}{2} => f(25)+f(144) < f(169)$$

- уже не верно => решение - $\boxed{l \leq 1}$

Обратная замена $\log_{12}(x^2+18x) \leq 2$

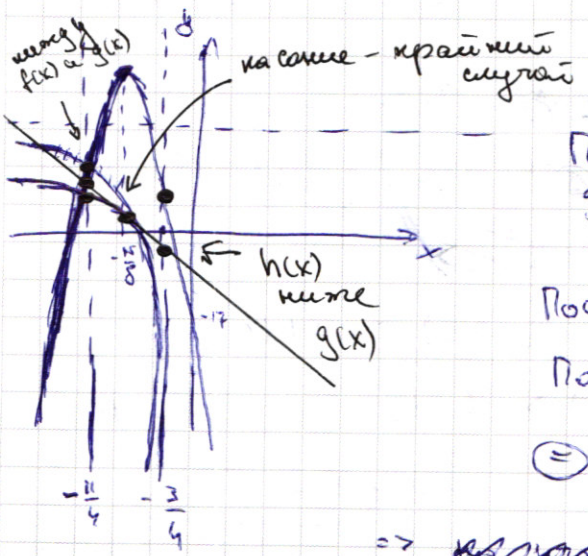
$$\begin{cases} x^2+18x \leq 144 \\ x^2+18x > 0 \end{cases} <=> \begin{cases} x^2+18x-144 \leq 0 \\ x(x+18) > 0 \end{cases} <=>$$

$$<=> \begin{cases} \overset{\text{Т.Н. Виета}}{(x-6)(x+24) \leq 0} \\ x(x+18) > 0 \end{cases} <=> x \in [-24;-18) \cup (0;6]$$

$\boxed{\text{Ответ: } [-24;-18) \cup (0;6]}$

№6

Построим схематически графики $f(x) = y = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4(x+\frac{3}{4})}$



$g(x) = y = -8x^2 - 30x - 17$

Понятно, что прямая $y = ax+b$ должна лежать выше гиперболы и ниже параболы при $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

Посчитаем $f(-\frac{11}{4}) = 3 + \frac{2}{-11+3} = 3 - \frac{2}{8} = 2\frac{3}{4}$

Посчитаем $g(-\frac{11}{4}) = -\frac{8 \cdot 121}{16} + \frac{30 \cdot 11}{4} - 17 =$

$= \frac{30 \cdot 11 \cdot 2 - 121}{8} - 17 = \frac{539}{8} - 17 = \frac{403}{8}$ ~~…~~

=> ~~…~~ $h(x) = ax+b$ => $\left[\begin{array}{l} h(-\frac{11}{4}) \in [\frac{22}{8}; \frac{403}{8}] \text{ - между гипер. и параб.} \\ h(-\frac{3}{4}) < g(-\frac{3}{4}) = \frac{403}{8} \text{ - ниже пароб.} \end{array}\right.$

Добавим к этому условию ограничение на случай касания $h(x)$ с гиперболой

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

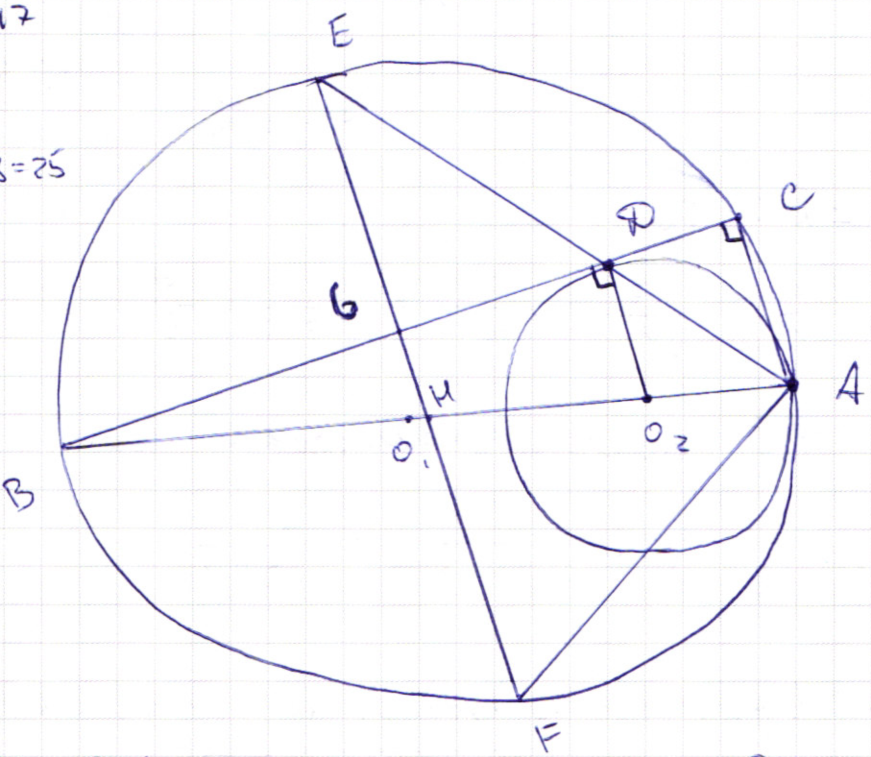
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

$BD = 17$

$CD = 8$

$BC = 17+8 = 25$



Обозначения

O_1 - центр Ω

O_2 - центр ω

$G = EF \cap BC$

$H = AB \cap EF$

R - радиус Ω

r - радиус ω

$\angle BCA = 90^\circ$ (опирается на диаметр) $\angle BDO_2 = 90^\circ$ (BD - касательная)

Тогда $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ по 2м углам (90° и $\angle CBA$)

Тогда $\dfrac{BO_2}{BA} = \dfrac{BD}{BC} \Rightarrow \dfrac{2R-r}{2R} = \dfrac{17}{25} \Rightarrow 1 - \dfrac{r}{2R} = \dfrac{17}{25}$

$\dfrac{r}{2R} = \dfrac{8}{25} \Rightarrow \boxed{r = \frac{16}{25}R}$ (1)

По Th Пифагора для $\triangle BDO_2$

$BO_2^2 = DO_2^2 + BD^2$ или $(2R-r)^2 = r^2 + 17^2$

$4R^2 - 4Rr = 17^2 \overset{\text{из (1)}}{\Leftrightarrow} R^2 - \frac{16}{25}R^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2 \Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{16}{25}}$

$R^2 = \left(\frac{17\cdot5}{2\cdot3}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{R = \frac{85}{6}} \Leftrightarrow r = \frac{16}{25}R = \boxed{\frac{136}{15} = r}$

Заметим, что $\angle AFE = 90^\circ - \angle BAE$, т.к.

$\angle AFE$ опирается на дугу AE (ACE), а $\angle BAE$

на BE. В сумме получается дуга $AB = 180^\circ$

Вписанные углы = половине дуги $\Rightarrow \angle AFE + \angle BAE = 90^\circ$.

Теперь из окружности ω. $\underset{\text{вписанный}}{\angle BAE} = \frac{1}{2} \underset{\text{центральный}}{\angle DO_2B}$ — на одну дугу

Тогда найдём $\angle DO_2B$

$$tg(\angle DO_2B) = \frac{BD}{DO_2} = \frac{17}{r} = \frac{17 \cdot 15}{136} = \frac{17 \cdot 15}{17 \cdot 8} = \frac{15}{8}$$

$\Rightarrow$ (из $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$ ~~[illegible]~~)

$$\cos^2(\angle DO_2B) = \frac{1}{1 + \frac{15^2}{64}} = \frac{64}{64+225} = \frac{64}{289}$$

т.к. $\angle DO_2B < 90^\circ$ (из прямоуг $\triangle BDO_2$), то $\cos(\angle DO_2B) = \frac{8}{17}$

$$\cos(\angle BAE) = \cos\left(\frac{\angle BDO_2}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1+\cos(\angle BDO_2)}{2}} = \sqrt{\frac{17+8}{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

+, т.к. $\angle BAE \in (0; 90]$ (дуга $BE < 180^\circ$)

т.к. $\angle AFE = 90^\circ - \angle BAE$, то $\cos(\angle BAE) = \sin(\angle AFE)$

$\Rightarrow \angle AFE = \arcsin \frac{5}{\sqrt{34}}$

Ответ: $R = \frac{85}{6}$ $\quad r = \frac{136}{15}$

$\angle AFE = \arcsin \frac{5}{\sqrt{34}}$

13 f опред на $Q>0$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $f(p)=[p/4]$ $\forall p$ - просто

X

$x\in[1;24]$
$y\in[1;24]$
$x,y\in\mathbb{N}$

$f(x/y)<0$ от $\frac{1}{24}$ до 24

$f(2)=0$
$f(3)=0$ $=0$
$f(4)=0$
$f(5)=1$
$f(7)=1$
$f(11)=2$

$f(6)=0$
$f(10)=1$
$f(15)=1$

$f(b)=f(1)+f(b)$

$f(1)=0$

Ответ: 198

$11\cdot13+6\cdot7+2\cdot4+3+2$
$143+42+8+5$
$50+148$
198

При умножении a на 2, 3 или 6 $=k$ $f(ka)=f(a)$

$f(x)\geq0$, если $x\in\mathbb{N}$ т.к. $f(p_1p_2p_3p_4)=f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)+\dots$

$\frac{x}{y}\notin\mathbb{N}$

$f(\frac{1}{4})=2f(\frac{1}{2})$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$

$f(2)+f(\frac{1}{2})=f(1)$

$f(\frac{1}{2})=0$
$f(\frac{1}{3})=0$
$f(\frac{1}{6})=0$

$\frac{x}{y}\notin\{\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{6};\frac{1}{8};\frac{1}{9};\frac{1}{}\}$

3) $f(x)=2$ для 2 x-ов 4 y-ка $2\cdot4$
4) $f(x)=3$ для 1 x 3 y-ка 3
5) $f(x)=4$ для 2 x-ов 1 y 2

1) $f(x)=0 \Rightarrow f(y)>0$ - для 11 x-ов 13 y-ков $11\cdot13$

2) $f(x)=1$ - для 7 x-ов 6 y-ков $6\cdot7$

$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$ $\boxed{f(x)<f(y)}$

x	f(x)		x	f(x)		x	f(x)	
1	0	0	11	2	p	21	1	3×7
2	0	0	12	0	0	22	2	11×2
3	0	0	13	3	p	23	5	p
4	0	0	14	1	2×7	24	0	0
5	1	p	15	1	3×5			
6	0	0	16	0	0			
7	1	p	17	4	p			
8	0	0	18	0	0			
9	0	0	19	4	p			
10	1	2×5	20	1	4×5			

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

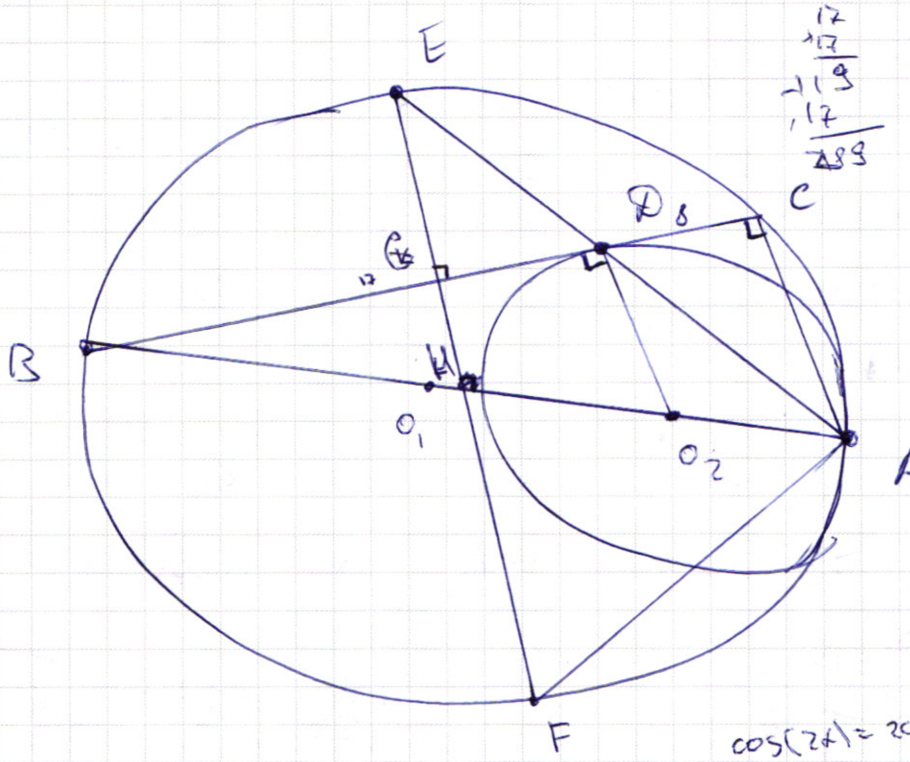
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



R и r

$\angle AFE$

$S_{\triangle AFE}$

$CD = 8$

$BD = 17$

1) подобие

$$\frac{BA}{BO_2} = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{2R}{2R-r} = \frac{17+8}{17}$$

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25} \qquad 1 - \frac{r}{2R} = \frac{17}{25} \qquad \frac{r}{2R} = \frac{8}{25}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{16}{25} \qquad r = \frac{16}{25}R$$

~~Пифагор для BO_2D~~

Подобие $\frac{AC}{r} = \frac{25}{17} \Rightarrow AC = \frac{25}{17}r$

$136 = 17 \cdot 8$

Пифагор для BO_2D $(2R-r)^2 = r^2 + 17^2$

$4R^2 - 4Rr = 17^2$

Из суммы углов и-ке $\angle CAF$

$4R^2 - 4 \cdot \frac{16}{25}R^2 = 17^2$

$\angle AFE = 180° - \angle CAF$

$$R^2 = \frac{17^2}{4\left(1-\frac{16}{25}\right)} = \frac{17^2 \cdot 25}{4 \cdot 9}$$

$$\cos(\angle CAB) = \frac{CA}{BA} = \frac{25r}{17 \cdot 2R} = \frac{25 \cdot 16}{17 \cdot 2 \cdot 25} = \frac{16}{34}$$

$$\cos(\angle CAE) = \sqrt{\frac{1}{1+tg^2(\angle CAE)}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{64 \cdot 17^2}{(25r)^2}}} = \sqrt{\frac{(25r)^2}{(25r)^2+64 \cdot 17^2}} =$$

$$= \frac{5 \cdot \frac{136}{15}}{\sqrt{\frac{25 \cdot 136^2}{9} + 64 \cdot 17^2}} = \frac{\frac{136}{3}}{\sqrt{17^2 8^2\left(\frac{25 \cdot 25 \cdot 4}{9}+1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2500+1}} = \frac{1}{\sqrt{2501}}$$

$$\boxed{R = \frac{17 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{85}{6} \qquad r = \frac{16}{25} \cdot \frac{85}{6} = \frac{8 \cdot 17}{3 \cdot 5} = \frac{136}{15}}$$

$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

$2\cos^2\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$

$136 = 17 \cdot 5 \cdot 16$

17 · 17 = 119 + 17 = 289

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{1}$ $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$1-2\sin^2\alpha$

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$2\sqrt{5}\cos(2\beta) = 4$ $\quad \cos(2\beta) = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\beta) = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin(2\alpha) \pm \frac{\cos(2\alpha)}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin(2\alpha) \pm \cos(2\alpha) = -1$

(1) $4\sin\alpha\cdot\cos\alpha \overset{+}{-} 2\cos^2\alpha = 0$

$\cos\alpha(2\sin\alpha \overset{+}{-} \cos\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 0 \text{ — нет, } tg\,\alpha \text{ — неопред.}\\ 2\sin\alpha = -\cos\alpha\end{array}\right.$

(2) $4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha) = 0$

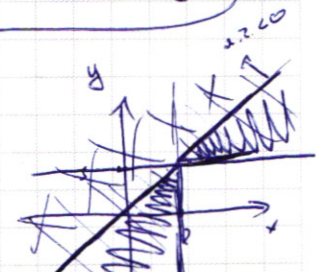
$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0\\ 2\cos\alpha = -\sin\alpha\end{array}\right. \Rightarrow$

~~$\alpha \neq -\frac{\pi}{4}+\pi k \Rightarrow tg\,\alpha = -1$~~

$\left[\begin{array}{l}tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0\\ tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-2\cos\alpha}{\cos\alpha} = -2\end{array}\right.$ $\leftarrow$ 4

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{-2\sin\alpha} = -\frac{1}{2}$

Ответ: $-\frac{1}{2};\ 0;\ -2$



$\boxed{2}$ $\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}\\ x^2+9y^2-4x-18y = 12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}\\ (x-2)^2-4+(3y-3)^2-9 = 12\end{cases}$

$x>2y \qquad y<\frac{x}{2}$

$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}\\ (x-2)^2+(3y-3)^2 = 25\end{cases}$

$x-2y = \sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$x^2-2xy+4y^2 = xy-x-2y+2$

$x^2-2xy+4y^2=xy-x-2y+2$

	1	1	-2
1	1	2	0

$(x-1)(x+2)$

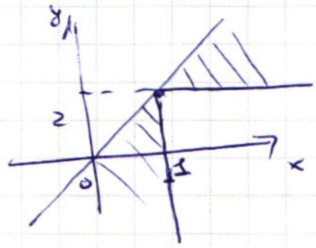
$x^2-3xy+x+4y^2+2y-2=0$

$4y^2+(2-3x)y+x^2+x-2=0$

$D=9x^2-12x+4-8x^2-8x+16$

$D=x^2-20x+20$

$y=\frac{3x-2\pm\sqrt{x^2-20x+20}}{8}$



$x^2+(1-3y)x+4y^2+2y-2=0$ $\qquad y=\frac{3x-2}{8}\pm\frac{\sqrt{(x-10)^2-80}}{8}$

$D=9y^2-6y+1-16y^2-8y+8$

$D=-7y^2-14y+9$

$x\geq10$

$y\geq\frac{3x-2}{8}+\frac{x-10}{8}=\frac{x}{2}-\frac{12}{8}$

$x<10 \quad y\geq\frac{x}{4}+1$

$\boxed{13}$ $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$t=x^2+18x$ $\qquad \frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x$

$2/3 \quad f'(x)$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$f(a)+f(b)\geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$25^l+144^l>169^l : 2^{l-1}$

$\log_{12}t\leq2$

$t\leq144$ $\quad t>0$

$5^{\log_{12}t}+t\geq|t|^{\log_{12}13}$, т.к. $x^2+18x>0$, модуль убрали

$5^{\log_{12}t}+t^{\log_{12}12}\geq t^{\log_{12}13}$ $\qquad z=\log_{12}t$

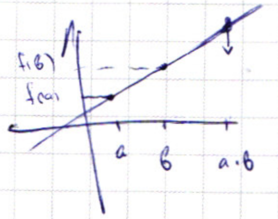
$5^z+12^z\geq13^z$ $\qquad 25^l+144^l\geq169^l$

l - параметр $\quad \forall\, f(x)=x^l$

а у на $f(25)+f(144)\geq f(169)$

$\Downarrow$

$l=1$



$\frac{b-a}{f(b)-f(a)}=\frac{a+b-a}{f(a+b)-f(a)}=\frac{b}{f(b)}=\frac{a}{f(a)}$

$f(a)+f(b)\geq f(a+b)$

$l\leq1$ — точно да

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{6}$ $\begin{cases} \dfrac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \\ ax+b \le -8x^2-30x-17 \end{cases}$ — верно $\forall \ x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$12x+11 \geq (ax+b)(4x+3)$ (т.к. $4x+3<0$)

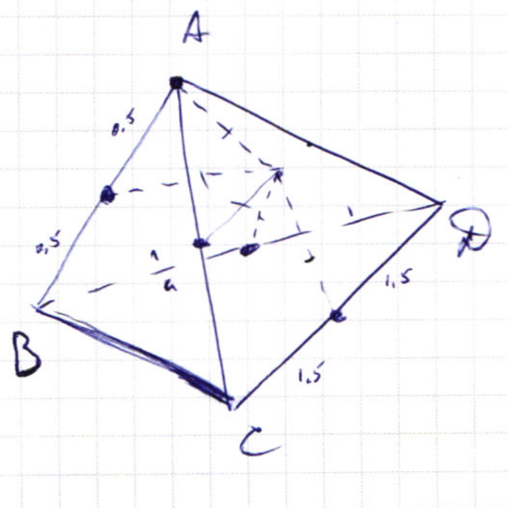
$12x+11 \geq 4ax^2+(3a+4b)x+3b$

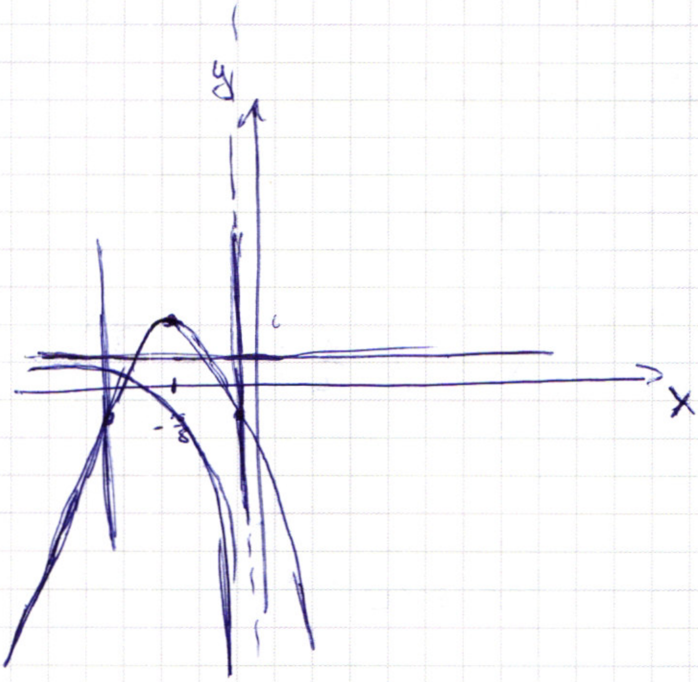
$f(x)$ $\begin{cases} 4ax^2+(3a+4b-12)x+3b-11 \le 0 \\ 8x^2+(30+a)x+17+b \le 0 \end{cases}$ $\Leftarrow \forall x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$
$g(x)$

~~1) $-15-\frac{a}{2}>0$ $\frac{a}{2}<-15$ $a<-30$ => ка K $g(x)\downarrow$~~

$\Leftrightarrow$ н.и.д. $\begin{cases} f\left(-\frac{11}{4}\right) \le 0 \\ f\left(-\frac{3}{4}\right) \le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{121}{2}+(30+a)\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)+17+b \le 0 \\ \frac{9}{2}+(30+a)\left(-\frac{3}{4}\right)+17+b \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 242-330-11a+68+4b \le 0 \\ 18-90-3a+68+4b \le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4b-11a-20 \le 0 \\ 4b-3a-4 \le 0 \end{cases}$





$3+\frac{2}{4(x+\frac{3}{4})}$

$-\frac{15^2}{8}+\frac{15^2}{8}2=\frac{15^2}{8}-17>$

$\frac{225}{8}-17>6$

$-\frac{8\cdot 9}{16}+\frac{30\cdot 3}{4}-17=-\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-17=18-17=1$

$-11/4$ $\qquad 3+\frac{2}{-11+3}=3-\frac{2}{8}=3-\frac{1}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)