МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\boxed{\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha$

$=2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=$

$=2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt5}}\cdot\cos(2\beta)=-\frac{4}{5}$

$+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta=+\frac{4}{5}$

$\boxed{\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}}$ $\qquad \sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{4}{5}}=$

$=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin x+\sin y=$

$=\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)$

$+\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)=$

$=\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\cancel{+\cos\ \sin}$

$+\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$-\cancel{\cos\frac{x-y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}}$

$=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}\ \Big|\cdot\sqrt5\\ \sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}-\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}\ \Big|\cdot\sqrt5\end{array}\right.$ $\qquad \left[\begin{array}{l}2\cdot\sin(2\alpha)+\cos 2\alpha=-1\\ 2\sin(2\alpha)-\cos 2\alpha=-1\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha-\cancel{1}=-\cancel{1}\\ 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha-(1-2\sin^2\alpha)=-1\end{array}\right.$ $\qquad \left[\begin{array}{l}4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha=0\\ 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\sin^2\alpha=0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha\notin\mathbb{R}\\ \operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}\\ \operatorname{tg}\alpha=0\\ \operatorname{tg}\alpha=-2\end{array}\right.$ $\qquad \left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0\\ 2\sin\alpha+\cos\alpha=0\\ \sin\alpha=0\\ 2\cos\alpha+\sin\alpha=0\end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№2

$165+144=$
$=2313$

$(x-2)(y-1)=$
$=xy-1x-2y+2$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$\boxed{x\geq 2y}$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9-4-9=12 \end{cases}$$

$1+4+9$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$\cancel{x^2-5xy}+4y^2$
$\cancel{+x}$

$x^2+x+4y^2+2y-5xy=2$

$x'=x-2$ $\quad x=x'+2$

$y'=3(y-1)$

$(y-1)=\frac{y'}{3}$ $\quad y=\frac{y'}{3}+1$

$x'\cdot y'>0$

$$\begin{cases} x'^2+y'^2=5^2 \\ x'-\frac{2y'}{3}=\frac{\sqrt{x'y'}}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$x'>\frac{2y'}{3}$

$x-2y=x'+2-\frac{2y'}{3}-2=x'-\frac{2y'}{3}$

$x'^2-\frac{4}{3}x'y'+\frac{4y'}{5}$
$=\frac{x'y'}{3}$

$$\cancel{\begin{cases} x'^2+y'^2=5^2 \\ \left(x'+\frac{y'}{2}\right)^2+\frac{5}{32}y'^2=0 \end{cases}}\Rightarrow$$

$y'^2=0$

$x'+\frac{3}{2}=0$

$x'^2-\frac{5}{3}x'y'+\frac{4}{9}y'^2=0$

$\cancel{x'^2+x'y'+\frac{1}{4}y'^2}$
$\cancel{+\frac{4}{9}y'^2-\frac{1}{4}y'^2=0}$

$$\begin{cases} x'^2+y'^2=5^2 \\ \left(x'-\frac{5}{6}y'\right)^2=\frac{y'^2}{4} \end{cases}$$

$\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$

I

$x'>0$
$y'>0$
$x'>\frac{2y'}{3}$

$x'-\frac{5}{6}y'>\frac{2y'}{3}-\frac{5}{6}y'=-\frac{y'}{6}$

$x'-\frac{5}{6}y'=\frac{y'}{4}$

$x'=y'\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\right)=y'\left(\frac{13}{12}\right)$

$\frac{5}{6}y'-x'=\frac{y'}{4}$

$x'=\frac{5}{6}-\frac{1}{4}y'=\frac{7}{12}y'<\frac{8}{12}y'$

$x'^2-\frac{5}{3}x'y'+\frac{25}{36}y'^2$
$+\left(\frac{4}{9}-\frac{25}{36}\right)$

$\frac{16-25}{36}=$
$\frac{-9}{36}=-\frac{1}{4}$

$\frac{13^2+12^2}{12^2}y'^2=5^2$

$y'=\frac{5\cdot 12}{\sqrt{13^2+12^2}}=\frac{60}{\sqrt{313}}$

$x'=\frac{5\cdot 13}{\sqrt{13^2+12^2}}=\frac{65}{\sqrt{313}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y' = \frac{60}{\sqrt{313}}$

$x' = \frac{85}{\sqrt{313}}$

$x' = x - 2$

$y' = 3(y - 1$

II

$x' < 0$

$y' < 0$

$x' = \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\right) y' = \cancel{3}\frac{7}{12} y'$

$\frac{7^2 + 12^2}{12^2} y'^2 = 5^2$

$y' = -\frac{5 \cdot 12}{\sqrt{7^2+12^2}}$

$x' = -\frac{5 \cdot 13}{\sqrt{7^2+12^2}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$$5^{\log_{12} y}+y \geq |y|^{\log_{12}13}$$

$y = x^2+18x+81-81$

$y = (x+9)^2-81$

$$y^{\log_{12}5}+y \geq |y|^{\log_{12}13}$$

$5^{\log_{12} y} =$

поскольку "y" должен быть >0, то $|y|=y$

$= 12^{\log_{12}5 \cdot \log_{12} y}$

$= y^{\log_{12}5}$

$$y^{\log_{12}5}+y \geq y^{\log_{12}13}$$

$144^{\log_{12}13} = 13^2 = 169$

$y>0$

$\boxed{y=144}$

$144^{\log_{12}5}+144 = 5^2+12^2 =$

$y \neq 1$

$= 25+144 = 169$

$25+144=169$

$$y \geq y^{\log_{12}13} - y^{\log_{12}5} = y^{\log_{12}13}(1-y^{\log_{12}5-\log_{12}13})$$

$$= y^{\log_{12}13}(1-y^{\log_{12}\frac{5}{13}})$$

$\log_{12}\frac{5}{13}<0$

$f(y) = y^{\log_{12}13} - y^{\log_{12}5}$

$f'(y) = \log_{12}13 \cdot y^{\log_{12}\frac{13}{12}} - \log_{12}5\, y^{\log\frac{5}{12}}$ ~~≥ 1~~

$f'(144) = \log_{12}13 \cdot \frac{13^2}{12}$

$- \log_{12}5 \cdot \frac{25}{12}$

~~$\log_{12}13\, y^{\log_{12}\frac{13}{12}}$~~

$= \frac{\log_{12}13 \cdot 13^2 - \log_{12}5 \cdot 25}{12}$

$y\uparrow$ $f'(y) = \log_{12}(13) \cdot y^{\log_{12}\frac{13}{12}} \uparrow - \log_{12}(5) \cdot y^{\log\frac{5}{12}} \downarrow$

$\log_{12}13>1$ $\quad 13^2>5^2$

$\log_{12}5<1$

$\Rightarrow f'(y)\uparrow$

начиная с 144 не меньше $\Rightarrow$

$\Downarrow$

$f'(144)>1$

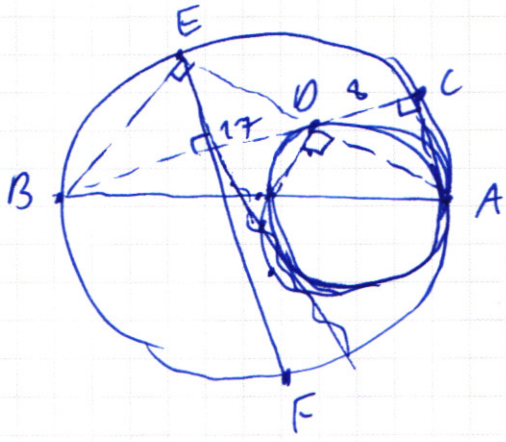
$\Rightarrow$ $y=144$ — единственное решение

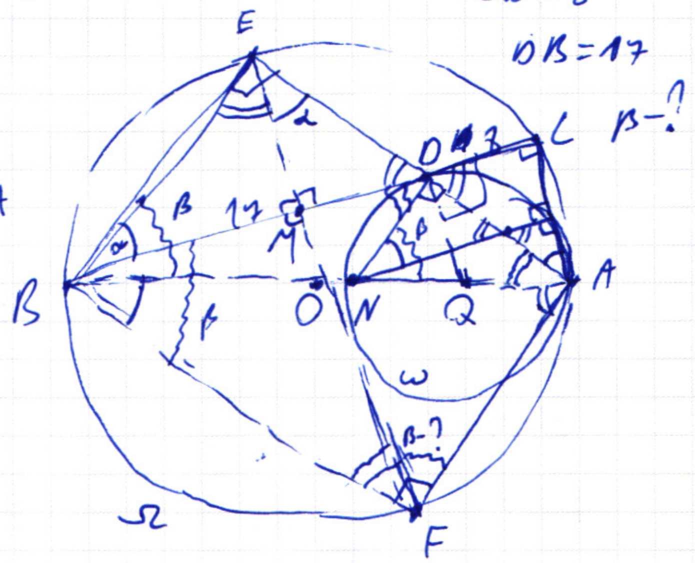
$(x+9)^2-81=144 \qquad (x+9)^2 = 225 = 15^2$

$\left[\begin{array}{l} x+9=15 \\ x+9=-15 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-24 \end{array}\right.$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 8 \\ \hline 136 \end{array}$$

№4





$CD=8$

$DB=17$

$\Omega(R_2)$

$\omega(R_1)$

$\frac{AD}{AE}=\frac{R_1}{R_2}=$

$\frac{AD}{DE}=\frac{R_1}{R_2-R_1}=\frac{CD}{DM}$

$\frac{DM}{DE}=\frac{DE}{DB}$

$\frac{R_1}{R_2-R_1}=\frac{CD}{DM}=\frac{CD\cdot DB}{DE^2}$

$\triangle ADN\sim\triangle AEB\sim\triangle FMB$

$\triangle ACD\sim\triangle BED\sim\triangle BME$

$\sim\triangle EMD$

$EF\parallel CA$

$ND\parallel BE$

$\triangle BCA\sim\triangle BDQ$

$\frac{BD}{BQ}=\frac{BC}{BA}$

$BQ=2R_2-R_1$

$BA=2R_2$

$\frac{17}{2R_2-R_1}=\frac{25}{2R_2}$

$\frac{17}{25}=1-\frac{R_1}{2R_2}$

$\frac{R_1}{2R_2}=1-\frac{17}{25}=\frac{8}{25}$

$\frac{R_1}{R_2}=\frac{16}{25}$ $\qquad R_1=\frac{16}{25}R_2$

$\boxed{R_2=\frac{25}{16}R_1}\boxed{=\frac{CD+DB}{2CD}R_1}$

$\left\{\begin{array}{l} BN=2R_2-2R_1 \\ BA=2R_2 \\ \triangle BDN\sim\triangle BAD \end{array}\right.$

$\frac{BN}{BD}=\frac{BD}{BA}$

$\boxed{4R_2(R_2-R_1)=BD^2=17^2}$

$4R_2\cdot\left(R_2-\frac{16}{25}R_2\right)=17^2$

$4R_2\cdot\frac{9}{25}R_2=17^2$

$R_2^2=\frac{17^2\cdot 25}{4\cdot 9}$

$6\cdot 12=72$

$6\cdot 14=$

$\boxed{R_1=\frac{16}{25}R_2=\frac{16}{25}\cdot\frac{17\cdot 5}{2\cdot 3}=\frac{17\cdot 8}{5\cdot 3}=\frac{136}{15}=9\frac{1}{15}}$

$\boxed{R_2=\frac{17\cdot 5}{2\cdot 3}=\frac{85}{6}=14\frac{1}{6}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$R_2 = \frac{17\cdot 5}{2\cdot 3} = \frac{85}{6} = 14\frac{1}{6}$

$R_1 = \frac{16}{25} R_2 = \frac{8\cdot \cancel{2}\cdot 17\cdot \cancel{5}}{5^{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}\cdot 3} = \frac{8\cdot 17}{5\cdot 3} = \frac{136}{15} = 9\frac{1}{15}$

$\frac{R_2}{R_1} = \frac{85}{6}\cdot\frac{15}{136} = \frac{\cancel{17}\cdot 5}{2\cdot \cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}\cdot 5}{\cancel{17}\cdot 8} = \frac{25}{16}$

$= 1 - \frac{R_1}{2R_1} = 1 - \frac{25}{\cancel{32}}\frac{8}{25} = \frac{17}{25} =$

$BQ = 2R_2 - R_1 = \frac{85}{3} - \frac{136}{15} =$

$= \frac{85\cdot 5 - 136}{15} = \frac{17(25-8)}{15} =$

$= \frac{17\cdot 17}{15} = \boxed{\frac{289}{15}} \boxed{= BQ}$

$DN^2 = 2R_1^2(1-\cos\angle NQD)$

$\cos\angle NQD = \frac{DQ}{BQ} =$

$= \frac{R_1}{2R_2 - R_1} = \frac{136}{\cancel{15}}\cdot\frac{\cancel{15}}{289} =$

$= \frac{8}{17}$

$DN^2 = 2R_1^2\left(1-\frac{8}{17}\right)$

$DN^2 = 2\cdot\frac{8^2 17^2}{\cancel{15^2}\,5^2}\cdot\frac{9}{\cancel{17}} = \frac{2\cdot 8^2\cdot 17}{5^2}$

$DN = \sqrt{34}\cdot\frac{8}{5}$

$\cos\beta = \frac{DN}{2R_1} =$

$= \frac{\frac{8}{5}\sqrt{2\cdot 17}}{2\cdot\frac{8\cdot 17}{\cancel{15}\,3\cdot 5}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{34}} = \cos\beta}$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{34-9}}{\sqrt{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\boxed{\angle AFE = \beta = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)}$

$CA = \sqrt{4R_2^2 - BC^2} =$

$= \sqrt{\frac{4\cdot 17^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 3^2} - 25^2} =$

$= \sqrt{\frac{17^2\cdot 5^2 - 5^2\cdot 5^2\cdot 3^2}{3^2}} =$

$= \frac{5}{3}\sqrt{17^2 - 15^2} =$

$= \frac{5}{3}\sqrt{2\cdot 32} = \frac{5\cdot 8}{3} = \boxed{\frac{40}{3} = CA}$

$S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} AE\cdot EF\cdot\sin\alpha$

$AE = AB\sin\beta = 2R_2\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{2\cdot 17\cdot 5}{2\cdot 3}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} =$

$= \frac{25\sqrt{34}}{6}$

$17^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = EM\cdot 17$

$EM = 17\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$AE = \frac{25\sqrt{34}}{6}$

$R_2 = \frac{17\cdot 5}{2\cdot 3} = \frac{85}{6}$

$tg\alpha = \frac{DC}{CA} = \frac{8}{\frac{40}{3}} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$25+9=34$

$\sin\beta = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$S_{\Delta AEF} = \frac{1}{2} AB^2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta$

$= \frac{1}{2} AB^2 \cdot \frac{15}{34}$

$= 2R_2^2 \frac{15}{34}$

$= \frac{2\cdot 17^2 \cdot 5^2}{2^2\cdot 3^2} \cdot \frac{5\cdot 3}{17\cdot 2} = \frac{17\cdot 5^3}{4\cdot 3}$

$= \frac{2125}{12} \approx 177\frac{1}{12}$

$\Rightarrow \alpha = 90^\circ - \beta \Rightarrow AE\, tg\alpha = AF$

$\Rightarrow S_{\Delta AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF$

$= \frac{1}{2} AE^2 \cdot tg\alpha$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{25^2\cdot 34}{6\cdot 6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{17\cdot 5^3}{12}$

$125 \times 17 = 2125$

$2125 : 12 = 177$ (ост. 1)

Ответ: $R_1 = \frac{136}{15}$

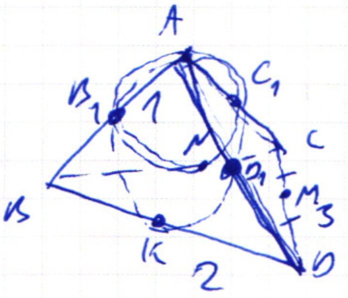
$R_2 = \frac{85}{6}$

$\angle AEF = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)$

$S_{\Delta AEF} = \frac{2125}{12}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 $AB = 1$ $BD = 2$ $CD = 3$
$BC - ?$

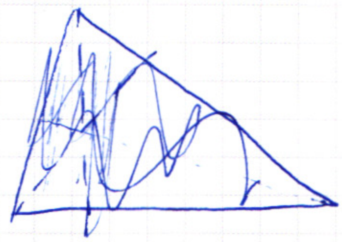


$BB_1 = B_1A$
$CC_1 = C_1A$
$DD_1 = D_1A$

$DM = MC$
$CN = NB$
$BK = KD$

Ω − сфера из условия

$A, B_1, C_1, D_1, M, N, K \in \Omega$
$\Downarrow$
AC_1NB_1 − вписан в окр



~~# по параллельно и по длине в 2 раза меньше~~
$C_1M \overset{2}{\#} AD$ (ср. лин)
~~$B_1K \# AD$ (ср. лин)~~
~~B_1KC_1M лежат в одной плоскости~~

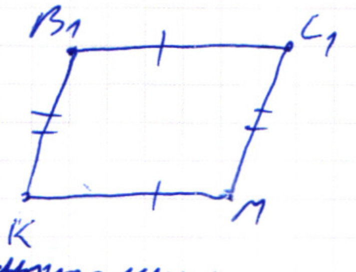
~~AC_1D_1B~~
~~AB_1D_1K~~

B_1C_1MK − вписан в окружность

$$\begin{cases} C_1B_1 \parallel BC \\ C_1B_1 = \frac{BC}{2} \\ KM \parallel BC \\ KM = \frac{BC}{2} \\ B_1K = \frac{AD}{2} \\ \parallel AD \\ C_1M = \frac{AD}{2} \\ \parallel AD \end{cases}$$

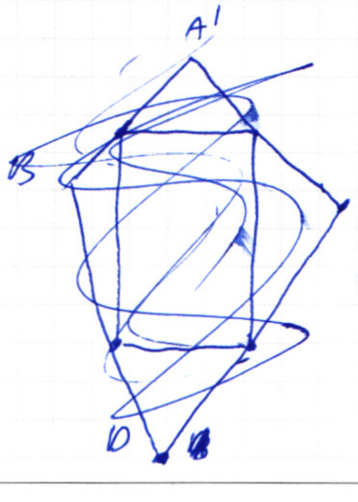
$\Rightarrow$ B_1KC_1M лежат в одной плоскости

$C_1M \# B_1K$ $B_1C_1 \# KM \Rightarrow$
$\Rightarrow B_1C_1KM$ − парал.грам



B_1C_1MK − п/м
B_1C_1MK − вписан в окр } $\Rightarrow B_1C_1MK$ − прямоугольник

$\Rightarrow$ $B_1C_1 \perp C_1M$
$B_1C_1 \parallel BC$
$C_1M \parallel AD$
} $\Rightarrow$ $BC \perp AD$
$\Updownarrow$
$KM \perp AD$



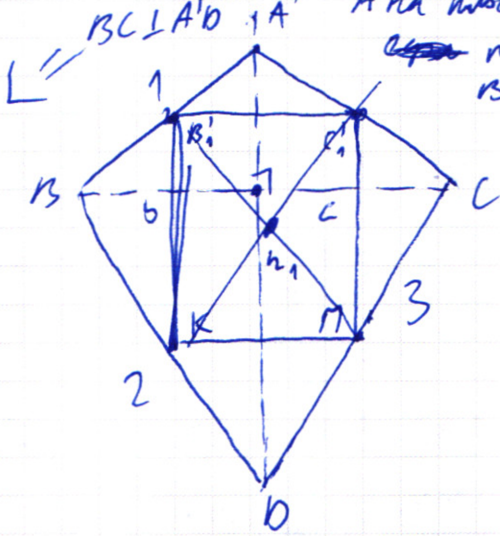
$BC \perp AD$

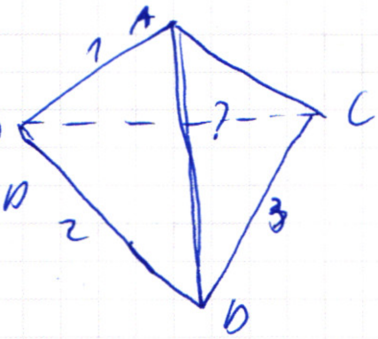
$\Updownarrow$

$BC \perp A'D$

A' - ~~проекция~~ развёртка

A на плоск. BCD по оси BC





$b^2 + h_1^2 = 2^2$

$c^2 + h_1^2 = 3^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

если a - простое, то $f(a) = [\frac{a}{4}] \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для всех целых $a \geq 2$ $f(a) = f(p_1) + f(p_2) \ldots \geq 0$

$p_1 \ldots p_n$ - простые множители a

$\boxed{f(2) = [\frac{2}{4}] = 0}$

$f(2) = f(n) + f(\frac{2}{n})$

$f(\frac{2}{n}) = f(2) - f(n) = -f(n)$

~~$f(4) = [\frac{4}{4}] = 1$~~

$f(4) = f(2) + f(2) = 0 + 0 = 0$

$f(1) = f(2n) + f(\frac{1}{2n}) =$

$= f(2n) + f(\frac{2}{4n}) =$

$= f(2n) + f(2) - f(4n) =$

$= f(2n) - f(4n)$

$= f(2) + \cancel{f(n)} - f(4) - \cancel{f(n)} =$

$= f(2) - f(4) = 0 - 0 = 0$

~~$f(1) = 1$~~ $\boxed{f(1) = 0}$

$f(n) + f(\frac{1}{n}) = f(1)$

$f(\frac{1}{n}) = f(1) - f(n) = -f(n)$

x	f(x)
1	0.
2	0.
3	0.
4	0.
5	1.
6	0.
7	1.
8	0
9	0.
10	1.
11	2.
12	0.
13	3
14	1.
15	1.
16	0.
17	4
18	0.

x	f(x)
19	4
20	1.
21	1.
22	2.
23	5
24	0.

$N(x)$ - кол-во соотв. x

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0$

$\boxed{f(y) > f(x)}$ берём

f(x)	5	4	3	2	1	0
N(x)	1	2	1	2	7	11

кол-во вариантов y при фиксированном $f(y)$ и умножаем это

$N_{xy} = 1 \cdot 23 + 2 \cdot 21 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 18 + 7 \cdot 11$

$= 23 + 42 + 20 + 36 + 77 = 198$

на кол-во "x" для которых $f(x) < f(y)$

$11 + 7 + 6 = 24$

$3 + 2 + 6 + 7 = 13 + 5 = 18$

$23 + 42 + 20 + 36 + 77 = 198$

$\boxed{\text{Ответ: } 198}$

№6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$$

$-4x^2-15x-10$
$= -4\left(x^2+\frac{15}{4}x+\frac{5}{2}\right)$

$\left(2x+\frac{15}{4}\right)^2 = 4x^2+15x+\frac{225}{16}$

$$3+\frac{2}{4x+3} \le -8x^2-30x-17$$

$$\frac{2}{4x+3} \le -8x^2-30x-20 \quad |:2$$

$$\frac{1}{4x+3} \le -4x^2-15x-10$$

$-8\cdot\frac{225}{64} = -\frac{225}{8} = -28\frac{1}{8}$

$-8x^2-30x-20 = -8\left(x+\frac{15}{8}\right)^2+28\frac{1}{8}-20$

$-8x^2-30x-20 = -8\left(x+\frac{15}{8}\right)^2+\frac{65}{8}$

$$\frac{-\frac{11}{4}\cdot 12+11}{4\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)+3} = \frac{-33+11}{-11+3} = \frac{-22}{-8} = \frac{22}{8} = 2\frac{3}{4}$$

$x=-\frac{11}{4}$

$-8\cdot\frac{121}{16}-30\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)-17=$

$= -\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-\frac{34}{2} =$

$= \frac{165-121-34}{2} = \frac{165-155}{2} = \frac{10}{2} = \underline{5}$

$17\cdot 8 = 136$

$-8x^2-30x-17=0$

$D = 15^2-17\cdot 8 = 225-136$
$= 89$

$x=-\frac{3}{4}$

$-8\cdot\frac{9}{16}+30\cdot\frac{3}{4}-17=$

$= -\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-\frac{34}{2} = \frac{45-34-9}{2}$

$= \frac{45-43}{2} = \underline{1}$

$$\begin{cases} a\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+b \le 1 \\ a\left(-\frac{11}{4}\right)+b \le 5 \\ a\left(-\frac{11}{4}\right) \ge 2\frac{3}{4} \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 11 (Нумеровать только чистовики)