МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -2/5$

$tg\alpha - ?$

Решение:

1) Пусть $2\alpha = x$; $2\beta = y$, тогда ($\cos\alpha \neq 0$, иначе $tg\alpha$ неопределен)

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5}$ и $\sin(x+2y)+\sin x = -2/5$

$\sin(x+2y)+\sin x = \overbrace{2\cdot\sin(x+y)}^{= -\frac{1}{\sqrt5}\cdot 2}\cdot\cos y = -2/5 \Rightarrow$

$\cos y = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin y = \pm\frac{2}{\sqrt5}$.

2) $\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5} = \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y = \sin x\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \cos x\cdot\sin y$

а) пусть $\sin y = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5}\cos x = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin x + 2\cos x = -1$

$1 + 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 1$

$\cos x\cdot(3\cos x + 4\sin x) = 0$

$\cos x = 0$ $\varnothing$ $\quad 3\cos x + 4\sin x = 0$

$3\cos x = -4\sin x$

$3 = -4\frac{\sin x}{\cos x}$

$\boxed{-\frac{3}{4} = tg x}$

б) Пусть $\sin y = -2/\sqrt5$

$\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt5} - \frac{2}{\sqrt5}\cos x = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin x - 2\cos x = -1$

$1 - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 1$

$\cos x(3\cos x - 4\sin x) = 0$

$\frac{\sin x}{\cos x} = 3/4$

$\boxed{tg x = 3/4}$

3) $tg 2\alpha = -3/4 = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ (замена $tg\alpha = t$)

$tg 2\alpha = 3/4 = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\frac{2t}{1-t^2} = -3/4$

$2t\cdot(-4) = 3\cdot(1-t^2)$

$-8t = 3-3t^2$

$3t^2 - 8t - 3 = 0$

$D_1 = 4^2 + 3\cdot 3 = 25 = 5^2$

$t_1 = \frac{4+5}{3} = 3$

$t_2 = \frac{4-5}{3} = -1/3$

$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{3}{4}$

$8t = 3-3t^2$

$3t^2 + 8t - 3 = 0$

$D_1 = 4^2 + 9 = 5^2$

$t_1 = \frac{-4+5}{3} = \frac13$

$t_2 = \frac{-4-5}{3} = -3$

Ответ: $\{-3; -\frac13; \frac13; 3\}$

задача 2

ОДЗ: $x \geq 12y$

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$$

(1): $x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)} = \sqrt{(2y-1)(x-6)}$

(2): $x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

~~So~~ $\begin{cases} (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \\ (x-12y)^2=(2y-1)(x-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6+3(2y-1))^2 = 90+6(2y-1)(x-6) \ (\cdot) \\ (x-12y)^2=(2y-1)(x-6) \end{cases}$

(•) $\cancel{(x-6+3(2y-1))^2 = 90+6(x-12y)^2}$

$\cancel{(x+6y-9)^2 = 90+6(x-12y)^2}$

• $x-12y = x-6-6(2y-1)$.

Пусть $x-6=a$, $2y-1=b$, тогда

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{a\cdot b} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+36b^2-12ab=ab \ \big|: a^2 \text{ (если } a\neq0) \Leftrightarrow \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$

$\cancel{\begin{cases} (a+3b)^2=90+6ab \\ (a-6b)^2=ab \end{cases} \Rightarrow (a+3b)^2=90+6(a-6b)^2}$

$1+36\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 12\frac{b}{a} = \frac{b}{a}$

Замена: $t=\frac{b}{a}$ ⇒ $36t^2-13t+1=0$

$D = 13^2-36\cdot4 = 13^2-12^2=1\cdot5^2$

$t_1 = \frac{13+5}{2\cdot36}=\frac{18}{2\cdot36}=\frac14$

$t_2=\frac{13-5}{2\cdot36}=\frac{8}{72}=\frac19$ ⇒

а) $\frac{b}{a}=\frac14 \Rightarrow 4b=a$

б) $\frac{b}{a}=\frac19 \Rightarrow 9b=a$

а): $16b^2+9b^2=90 \Rightarrow 25b^2=90 \Rightarrow b=\pm\sqrt{\frac{18}{5}} \Rightarrow 2y-1=\pm\sqrt{\frac{18}{5}} \Rightarrow$

$2y=1\pm\sqrt{\frac{18}{5}} \Rightarrow y=\frac12\pm\frac32\sqrt{\frac25}$

$x-6=4\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{18}{5}}\right) \Rightarrow x=6\pm4\cdot3\sqrt{\frac25}=6\pm12\sqrt{\frac25}$

б): $90b^2=90 \Rightarrow b=\pm1 \Rightarrow 2y-1=\pm1 \Rightarrow y_1=0$, $y_2=1$

$x-6=\pm9$

$x_1=-3$ ∅ (не удовл. одз)

$x_2=15$

Если $a=0$, то $x=6 \Rightarrow 9b^2=90 \Rightarrow b_{1,2}=\pm\sqrt{10}$; $a\geq6b \Rightarrow b=\sqrt{10}$ – не удовл.одз; $b=-\sqrt{10} \Rightarrow y=\frac12-\frac12\sqrt{10}$. ∅

Ответ:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение 2!

если $a=0$, то $x-12y=0$
$x=12y$
$6=12y \Rightarrow y=\frac{1}{2}$

$0^2+9\cdot(2\cdot\frac{1}{2}-1)^2 \ne 90$

~~Ответ: $(15;1)$; $(6+12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{1}{2})$; $(6-12\sqrt{\frac{2}{5}}$~~

при $b=\sqrt{\frac{18}{5}}$ и $a=4\sqrt{\frac{18}{5}}$: $x-12y=2\cdot\sqrt{\frac{18}{5}}$

$6+12\sqrt{\frac{2}{5}}-12\cdot(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}})=2\cdot3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$6+6\sqrt{\frac{2}{5}}-6-18\sqrt{\frac{2}{5}}\ne 0$

при $x=6-4\cdot\sqrt{\frac{18}{5}}$ и $y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}$ $\quad 6\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\cancel{6}-4\cdot3\sqrt{\frac{2}{5}}-\cancel{12\cdot\frac{1}{2}}+12\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}=\sqrt{\frac{18}{5}}\cdot2$

$0=0$

Ответ: $(6-4\sqrt{\frac{18}{5}}; \frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}})$; $(15;1)$

Задача 5.

$f(ab)=f(a)+f(b)$
$f(p)=[\frac{p}{4}]$
$2\le x\le 25$
$2\le y\le 25$
$f(\frac{x}{y})<0$

Решение:

$f(2)=[\frac{2}{4}]=0$
$f(3)=[\frac{3}{4}]=0$
$f(2\cdot3)=f(2)+f(3)=0$
$f(6)=0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача N 3.

ОДЗ:
$10x-x^2>0$
$x(10-x)>0$
$x\in(0;10)$

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$10x-x^2+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

Замена! $t=10x-x^2$, $t\in(0;10) \Rightarrow$

$$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$$

$$t+t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5} \Big| : t^{\log_3 4}$$

$$t^{1-\log_3 4}+1 \geq t^{\log_3 5-\log_3 4}$$

$$t^{1-\log_3 4}+1 \geq t^{\log_3 \frac{5}{4}}$$

$$t^{\log_3 \frac{3}{4}}+1 \geq t^{\log_3 5/4}$$

$\log_3 5/4>1$, т.к. $\frac{5}{4}$ и 3 расположены по одну сторону на числовой прямой относительно 1.

$\log_3 \frac{3}{4}<1$, т.к. $\frac{3}{4}$ и 3 расположены по разным сторонам относительно 1 на числовой прямой.

$t^{\log_3 \frac{3}{4}}$ – убыв. ф-ция

$t^{\log_3 5/4}$ – возр ф-ция $\Rightarrow$ уравнение:

$t^{\log_3 3/4}+1 = t^{\log_3 5/4}$ имеет не более 1 корня.

при $t=9$: $9^{\log_3 \frac{3}{4}}$ – единств. корень:

$$9^{\log_3 \frac{3}{4}}+1 = 3^{\log_3 5/4}$$

$$\frac{9}{16}+1=\frac{25}{16}$$

$0=0 \Rightarrow t\in(0;9]$

$10x-x^2\leq 9$ $\Rightarrow$ ~~$t\in(0;4)$~~

$x^2-10x+9\geq 0$

$(x-9)(x-1)\geq 0$ $\quad t\in(0;10)$

$\begin{cases} x\in(-\infty;1]\cup[9;+\infty) \\ x\in(0;10) \end{cases}$ ~~$0<10x-x^2<10$~~

Ответ: $(0;1]\cup[9;10)$.

~~$\begin{cases} 10x-x^2<10 \\ 10x-x^2>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-10x+10>0 \\ x\in(0;10) \end{cases}$ $\begin{cases} D_1=5^2-10=15 \Rightarrow x_{1,2}=5\pm\sqrt{15} \quad x\in(-\infty;5-\sqrt{15})\cup(5+\sqrt{15};+\infty) \\ x\in(0;10) \end{cases}$~~

~~Ответ: $(0;5-\sqrt{15})\cup(5+\sqrt{15};10)$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

задача 6. $x \in [\frac{1}{4}; 1]$

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$$\frac{16x-20+4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$f(x) = 4+\frac{4}{4x-5}$ – гипербола

$g(x) = -32x^2+36x-3$ – парабола ветви вниз ($a=-32, a<0$)

$\max g(x) = g(x_в) = g\left(\frac{\cancel{36}\,9}{\frac{2\cdot \cancel{32}}{8}}\right) = -32\cdot\frac{81}{\cancel{16}_8} + \frac{36\cdot 9}{\cancel{16}\,8} - 3 = \frac{81}{8} - 3 = \frac{81-24}{8} =$

$= \frac{57}{-28} = 7\frac{1}{8}$

$g(\frac{1}{4}) = -\cancel{32}\cdot\frac{1}{\cancel{16}} + \cancel{36}\cdot\frac{1}{\cancel{16}_4} - 3 = -\frac{11}{4}$

$g(1) = -32\cdot 1^2 + 36\cdot 1 - 3 = 1$

$f(\frac{1}{4}) = 4 + \frac{4}{4\cdot\frac{1}{4}-5} = 3$

$f(1) = 4 + \frac{4}{4-5} = 0$

при $x=\frac{1}{4}$: $3 \le a\cdot\frac{1}{4}+b \le -\frac{11}{4}$ ~~=> при $x=\frac{1}{4}$~~ $3 > -\frac{11}{4} \Rightarrow \varnothing$

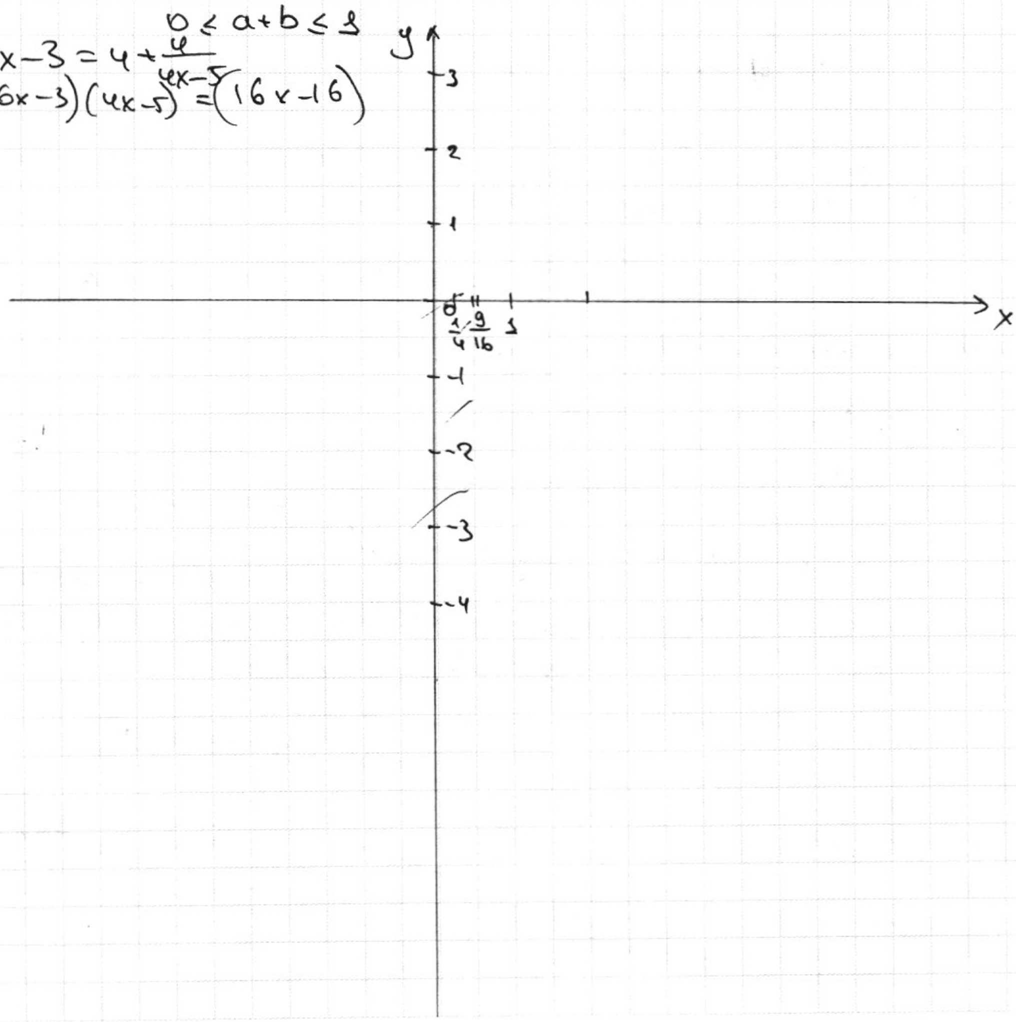
при $x=1$: $0 \le a\cdot 1 + b \le 1$

$0 \le a+b \le 1$

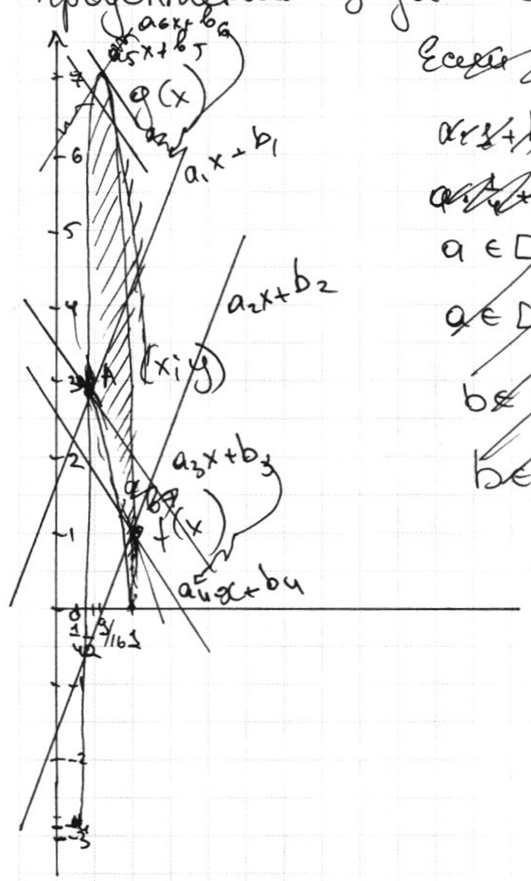
$-32x^2+36x-3 = 4+\frac{4}{4x-5}$

$(-32x^2+36x-3)(4x-5) = (16x-16)$

-3



продолжение задачи 6.



~~Если $a>0$, то~~

~~$x+3+b$~~ По рисунку видно, что нам подойдет все множество прямых ~~от~~ a_1x+b_1 до a_5x+b_5 (при $a>0$) и при $a<0$ от a_3x+b_3 до a_6x+b_6

~~a_1x+b~~

$a\in[a_1;a_5]$

~~$a\in[a_3;a_6]$~~

~~$b\in[b_1;b_5]$~~

~~$b\in[b_3;b_6]$~~

$a\geq0$: $b\in(-\infty;b_5]$, $a\in[0;a_5]$

$a<0$: $b\in$ ~~$(-\infty;$~~ ~~$[b_3;+\infty)$~~ ~~$y($~~ $(y;+\infty)$, $a\in[a_3;a_5]$

a_5x+b_5 - кас. к $-32x^2+36x-3$ ⇒

~~$g'(x)=-32\cdot2x+36=-64x+36$ ⇒~~

~~$a_5=-64$~~

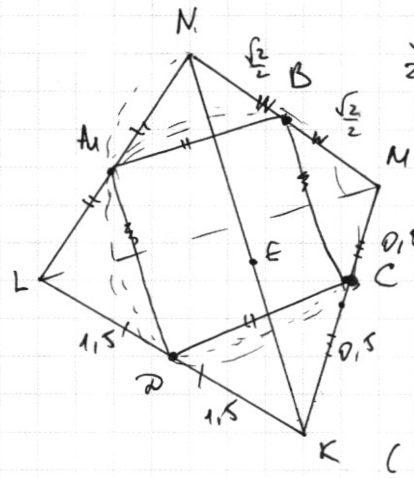
~~$b_5=36$,~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7.
Дано:
KLMN – пирамида
$KL = 3$
$KM = 1$
$MN = \sqrt{2}$
$LM - ?$
$R - ?$

Решение:

1) A_1, B, C, D, E – середины ребер KLMN



2) A_1BCD – п/м, т.к.
$BC \parallel NK$
$A_1D \parallel NK$
BC, AD ср. линии $\triangle LNK$ и $\triangle MNK$, т.о.
$BC = AD$.

3) $ABCD$ – впис. $\Rightarrow$
$ABCD$ – ромб $\Rightarrow$
$AB = BC = CD = DA$.
$\Rightarrow ML = NK$
(CD, AB – ср. линии $\triangle LNM$ и $\triangle LKM$)

4)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{N 4}$

Дано:

A – т.к. ω и W

AB – диаметр W

BC – хорда W

$BC \cap \omega = D$

$AD \cap W = E$

$EF \perp BC$

$F \in W$

$CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$

Найти:

R (радиус W)

r (радиус ω)

$\angle A\cancel{B}FE$

S AEF

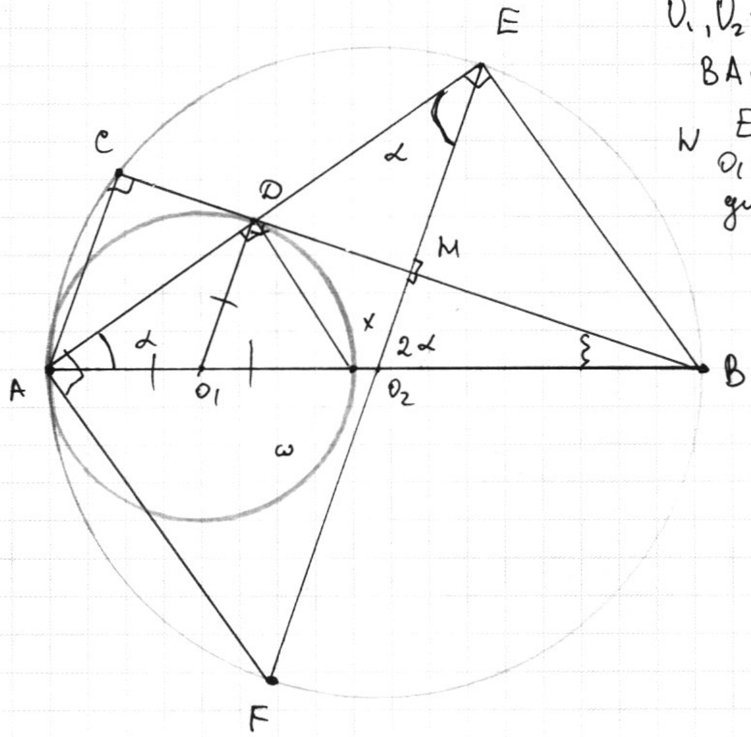
Решение:

O_1, O_2 – центры ω и W

$BA \cap \omega = X$

$EF \cap BC = H$

O_1D, O_1A, O_1X – радиусы ω



1) BC ~~∥AD~~ – касательная к ω => $BC \perp O_1D$

2) $EF \perp BC$ и $O_1D \perp BC$ => $O_1D \parallel EF$.

3) $\angle AEB = \angle ACB = 90°$ – т.к. опираются на диаметр AB

4) $\angle ADX = 90°$, т.к. опирается на диаметр AX.

5) $\triangle ADX \sim \triangle AEB$ по I пр. подобия, => DO_1 – медиана и $DO_1 \parallel EF$ => EO_2 – медиана AB => $O_1 \in E\cancel{B}F$ => EF – диаметр

6) Т.к. EF – диаметр => BH = HC

7) $\triangle DBO_1 \sim \triangle BHO_2$ по I пр. подобия =>

$$\frac{BD}{BO_1} = \frac{BH}{BO_2} = \frac{BC\frac{1}{2}}{BO_2}$$

$$\frac{\frac{17}{2}}{2R-r} = \frac{\left(\frac{17}{2}+\frac{15}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{R} \Rightarrow \frac{2R-r}{R} = \frac{17}{2\cdot 8}$$

$$\frac{2R-r}{R} = \frac{17}{16}$$

$\frac{2R-r}{R}=\frac{17}{16}$

$32R-16r=17R$

$15R=16r$

$R=\frac{16}{15}r$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 15 \\ \hline 85 \\ +\ 17\ \ \\ \hline 255 \end{array}$$

8) По т. о кас. и секущей: $BD^2 = BA\cdot BX$

$\frac{17^2}{4}=2R\cdot(2R-2r)$

$\frac{17^2}{16}=R(R-r)$

$\frac{17^2}{16}=\frac{16}{15}r\cdot\left(\frac{16}{15}r-r\right)$

$\frac{17^2}{16}=\frac{16}{15}r^2\cdot\frac{1}{15}$

$\frac{17^2}{16^2}\cdot 15^2=r$

$r=\frac{17\cdot15}{16} \Rightarrow R=\frac{\cancel{16}}{\cancel{15}}\cdot\frac{17\cdot\cancel{15}}{\cancel{16}}=17$

9) $DO_1^{\,2}=-BD^2+BO_1^{\,2}$ (Из т. Пифагора для BO_1D)

$DO_1=\sqrt{\left(2\cdot17-\frac{17\cdot15}{16}\right)^2-\frac{17^2}{4}}$

$DO_1=\sqrt{4\cdot17^2+\frac{17^2\cdot15^2}{16^2}-2\cdot2\frac{17\cdot15\cdot17}{16}-\frac{17^2}{4}}=17\sqrt{4+\frac{15^2}{16^2}-\frac{15}{4}-\frac{1}{4}}=$

$=17\cdot\frac{15}{16}$

10) $\cos\angle ABC=\frac{16}{34}=\frac{8}{17}$ $(\alpha\in(0;90^\circ))$

11) $\angle EAB=\alpha=\angle AEO_2 \Rightarrow \angle ABC=90^\circ-2\alpha$

12) $\triangle AEF$ – прям/$\angle$ т.к. $\angle EAF$ опирается на диаметр EF.

$\Rightarrow \angle AFE=90^\circ-\alpha$

13) $\cos\angle ABC=\frac{8}{17}=\cos(90^\circ-2\alpha)=\sin2\alpha$

$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\frac{8^2}{17^2}}=\sqrt{\frac{9\cdot25}{17^2}}=\frac{3\cdot5}{17}=\frac{15}{17}\Rightarrow$

$\cos2\alpha=\frac{15}{17}=2\cos^2\alpha-1$

$\frac{32}{17}=2\cos^2\alpha$

$\frac{16}{17}=\cos\alpha \Rightarrow \alpha=\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) \Rightarrow \angle AFE=\frac{\pi}{2}-\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

13) $\triangle AEB=\triangle AEF$ по гипотенузе и катету $\Rightarrow S_{AEB}=S_{AEF}$

$S_{AEB}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot17^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin2\alpha\cdot17=\frac{8}{17}\cdot17=8$

Ответ: $\frac{255}{16}$; 17; $\frac{\pi}{2}-\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$; 8.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\alpha = x$

$2\beta = y$

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(x+2y) + \sin x = -\frac{2}{5}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\alpha+\beta = x+2y$

$\alpha - \beta = x$

$2\alpha = 2x+2y$

$\boxed{x+y=\alpha}$

$\beta = y$

$\sin(x+2y)+\sin x = 2\cdot\sin(x+y)\cdot\cos y = -\frac{2}{5}$

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\cos y\cdot -\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{2}{5}$

$6\cdot3\cdot2 = 36$

$\cos y = \frac{1}{\sqrt5}$

$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin y = \frac{2}{\sqrt5}$ или $-\frac{2}{\sqrt5}$

$\Rightarrow$ $\sin x\cos y + \cos x \sin y = -\frac{1}{\sqrt5}$ либо

$\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5}\cos x = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\alpha = x$

$\sin x + 2\cos x = -1$

$\sin^2 x + 4\cos^2 x + 4\sin x\cos x = 1$

$3\cos^2 x + 4\sin x\cos x = 0$

$\cos x(3+4\sin x) = 0$

$\cancel{\cos x = 0}$

$3+4\sin x = 0$

$\boxed{\sin x = -3/4}$ подходит

$1-\frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

$\sin x - 2\cos x = -1$

$\sin^2 x + 4\cos^2 x - 4\sin x\cdot\cos x = 1$

$3\cos^2 x - 4\sin x\cos x = 0$

$\cos x(3-4\sin x) = 0$

$\boxed{\sin x = 3/4}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt7}{4}} = -\frac{3}{\sqrt7}$; $\frac{3}{\sqrt7}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{3}{\sqrt7}$

$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{3}{\sqrt7}$

$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{3}{\sqrt7}$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3}{\sqrt7}$

2) $\begin{cases}(x-12y)^2 = (x-6)(2y-1)\\ (x-6)^2 + 3^2(2y-1)^2 = 90\end{cases}$

$\begin{cases} a^2+9b^2 = 90 \\ ab = (x-12y)^2\end{cases}$

$(a+3b)^2 = 90+6ab$

$x \geq 12y$

$x-6 \geq 12y-6$

$a \geq 6b$

$(x-6+6y-3)$

$(x+6y-9)^2 = 90+6(x-12y)^2$

$5x^2$

$x^2 + 9(2y-1)^2 + 6x(2y-1) = 90 + \cancel{6x^2} + 6\cdot12y^2 - 12\cdot12xy$

$3b$

$6ab$ $\cancel{36y^2} + \cancel{9} - 36y + 12xy - 6x = \cancel{90} + 5x^2 + 36y^2 - 144xy$

$a^2+36b^2-13ab = 0$ $36y^2+36y+81+5x^2-156xy+6x = 0$

$a^2+9b^2 = $

$x-6 \neq -6(2y-1)$

$27b^2-13ab = 90a - 6b =$

$b(27b-13a) = -90$

$a \geq 6b$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le \sqrt{-32x^2+36x-3}$$

$x \in [\frac{1}{4}; 1]$

$$\frac{16x-20+4}{4x-5} \le ax+b \le$$

$$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le \frac{55}{8}$$

max при $x = 3/2$

$$4+\frac{4}{4x-5} \le \frac{55}{8}$$

$0 \le ax+b \le \frac{55}{8}$

$[0;3]$

$[0;3] \quad \le ax+b \le [-\frac{11}{4}; \frac{55}{8}]$

$4+\frac{4}{4x-5}$

$\frac{4-16}{1-5} = 3$

$16\cdot\frac{1}{4}-16$ / $4\cdot\frac{1}{4}-5$ $= 3$

$[3;0] \le ax+b \le -\frac{11}{4}$

$-32x^2+36x-3=0$

$32x^2-36x+3=0$

$D_1 = 18^2 - 3\cdot 32 = 324 - 96 = 228$

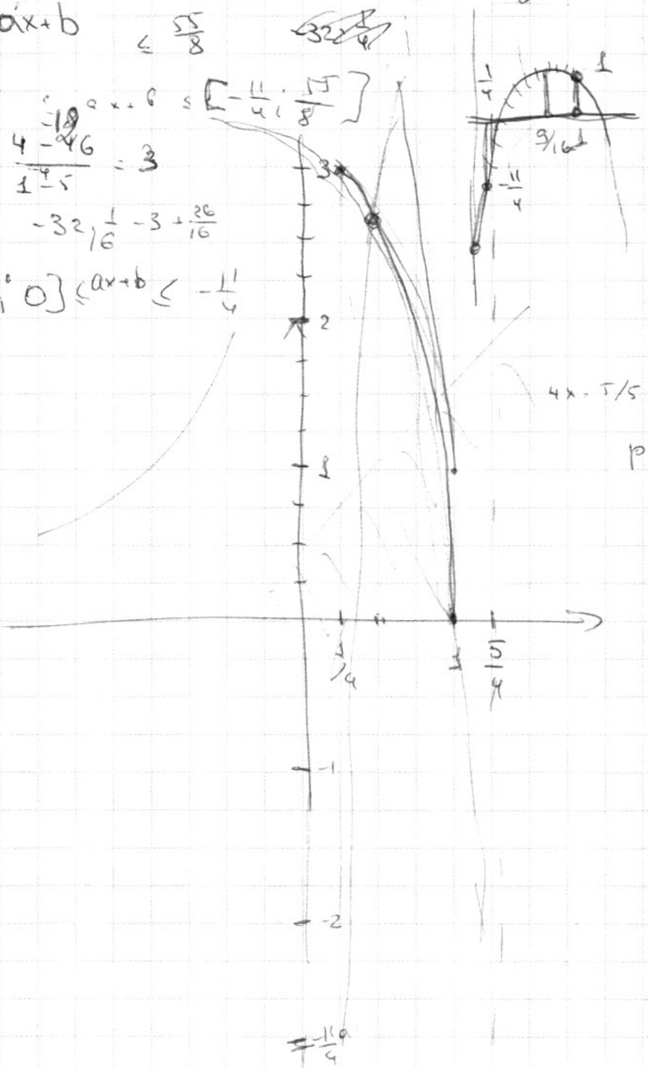
max $= x_в = \frac{36}{32\cdot 2} = \frac{9}{16}$

$y_{max} = -32\cdot\frac{9^2}{16^2} + 36\cdot\frac{9}{16} - 3 = -\frac{9^2}{8} + \frac{9^2}{4} - 3 = \frac{9^2}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{9^2}{8} - 3 = \frac{81-24}{8} = \frac{55}{8}$

$-32+36-3 = 1$

$x = \frac{1}{4}$:

$-32\cdot\frac{1}{16} + 36\cdot\frac{1}{16} - 3 = \frac{9}{4} - 5 = \frac{9}{4} - \frac{20}{4} = -\frac{11}{4}$



4x-5/5

р/и случаи

② $x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$ $\quad 2xy-12y-x+6$ $\quad 2y(x-6)$

$6\cdot 2x \quad 6y^2 \quad 2\cdot 6\cdot 3$

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9=45\cdot 2$

$6\cdot 2 \quad 9(4y^2-4y+1)$

$$\begin{cases}(x-6)^2+(6y-3)^2=90 \\ x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}\end{cases}$$

$x\geq 12y$ $\quad \boxed{x-12y\geq 0}$

$x^2+144y^2-24xy=2xy-12y-x+6$

$2xy-12y-(x-6)$

$2y(x-6)-(x-6)=(2y-1)(x-6)$

$$\begin{cases}x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-12y)^2=(2y-1)(x-6) \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90\end{cases}$$

$\Rightarrow x^2-24xy+144y^2=(2y-1)(x-6)$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$x^2+x-26xy+144y^2+12y-6=0$

$x^2-36y+36y^2-12x-45=0$

$+9(2y-1)^2$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$(x-12y)^2=ab$

$a^2+9b^2=90$

$a^2=90-9b^2$

$x^2+x-26xy+12y+144y^2-6=0$

$x^2-12x-0\cdot xy-36y+36y^2-45=0$

$$\begin{cases}x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \Rightarrow (x-12y)=(2y-1)(x-6) \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90\end{cases}$$

$(a)^2+(3b)^2$

$a^2+9b^2=90$

$a^2+9b^2-6ab=90-6ab$

$(a-3b)^2=90-6ab$

$(x-6-3\cdot 2y+3)^2=90-6(2y-1)(x-6)$

$a^2+(3b)^2=90-6ab$

$(a-3b)^2=90-6ab$

$(x-6-3\cdot 2y+3)$

$$\begin{cases}(x-6y-3)^2=90-6(2y-1)(x-6) \\ (x-12y)^2=(2y-1)(x-6) \quad |\cdot 6\end{cases}$$

$(x-6y-3)^2=90-6(x-12y)^2$

$x-3(2y+1)^2$ $\quad \geq 0$

$(x-6y-3)^2+6(x-12y)^2=90$

$6\cdot x^2+6\cdot 144y^2-6\cdot 12y\cdot 2x=90$

x^2 $\quad 2x\cdot 6y$

~~$x^2+9(2y+1)^2-6(2y+1)\cdot x-12y$~~

$7x^2+36\cdot 13y^2-156xy-6x+36y=81$

$12\cdot 13xy$

$7x^2-6x+13y(36y-12x)+36y=81$

$(x-6y-3)^2=(x-6y-3)(x-6y-3)=x^2-6xy-3x-6xy+36y^2+18y-3x+18y+9=$

$=x^2+36y^2+9-12xy-6x+36y$

$7x^2+(36+6\cdot 144)y^2$

$6\cdot 12\cdot 12 = 6\cdot 12\cdot 3\cdot 4$ $\quad 36\cdot 13$ $\quad -144xy$ $\quad 81$

$x^2+36y^2+\cancel{9}-12xy-6x+36y+6x^2+6\cdot 144y^2-6\cdot 12y\cdot 2x=\cancel{90}$

$7x^2+36\cdot 13y^2-156xy-6x+36y=81$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(\overset{x}{2\alpha+2\beta}) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Big| \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\underbrace{\sin(2\alpha+4\beta)}_{\in[-1;1]} + \underbrace{\sin 2\alpha}_{\in[-1;1]} = -2/5 \Big| \cdot\sqrt{5}$

$tg\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) + \sin 2\alpha = \sin x \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos x + \sin 2\alpha = -2/5$

$-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \sin 2\alpha = -2/5 \Big| \cdot\sqrt{5}$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad -\cos 2\beta + 2\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\beta - \cos 2\beta + \sin 2\alpha$

~~sin2α~~ Пусть $2\alpha+2\beta = x \Rightarrow$

1) $\sin x \cdot \cos x = -\frac{2}{5}$ (при $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$) $\quad$ 2) $\sin 2x = 4/5$

$\sin x \cos x = -2/5$

$\Rightarrow \sin 2x = -\frac{4}{5}$

$\sin x \cos x = \sin 2\alpha + \sin(2\alpha+2\beta+2\beta)$

$\frac{1}{2}\sin(4\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha + \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta)$

$\frac{1}{2}\sin(2(2\alpha+2\beta)) = \sin 2\alpha + \cos 2\beta \sin(2\alpha+2\beta) + \sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha + \cos 2\beta(\sin(2\alpha+2\beta))$

$\cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta)\left(\frac{1}{2}\cos(2\alpha+2\beta) - \cos 2\beta\right) = \sin 2\alpha + \sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta)$

$\sin(2\alpha+2\beta)\left(\frac{1}{2}\cos 2\alpha \cos 2\beta - \frac{1}{2}\cos 2\alpha\right.$

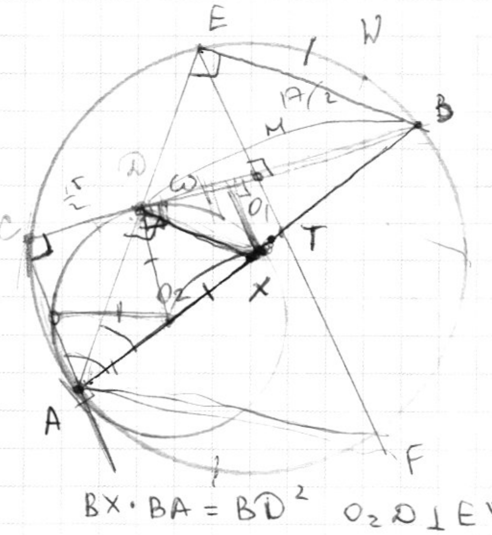
☑ черновик ☐ чистовик

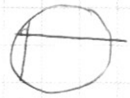
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

④





$EF \perp BC$

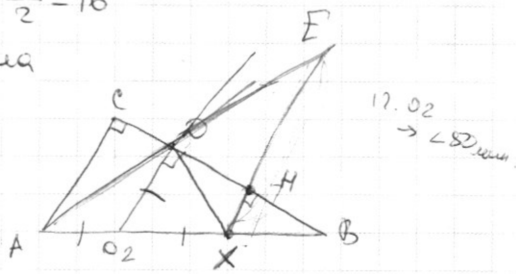
$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$ $\quad \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = \frac{32}{2} = 16$

S_{AEF} $\quad$ M - середина

$\angle AFE$

r, R



$BX \cdot BA = BD^2$ $\quad O_2D \perp EF$

$DO_2 \perp AC$ $\quad MT \parallel DO_2$

$\angle ACB = 90^\circ$

$AC^2 + BC^2 = AB^2$

$BA = 2R$

$BX = 2R - 2r$

$\Rightarrow \quad 16^2 + AC^2 = (2R)^2$

$16^2 + AC^2 = 4R^2$

$2R \cdot (2R - 2r) = \left(\frac{17}{2}\right)^2$

$4 \cdot R(R - r) = \frac{17^2}{4}$

$16R(R - r) = 17$

$\boxed{R^2 - Rr = \frac{17}{16}}$

$DX \perp AD$

$EB \perp AE \Rightarrow$

$EB \parallel DX \Rightarrow$

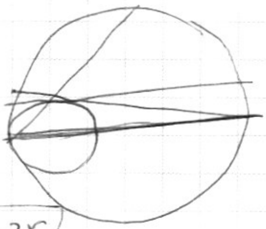
$\Rightarrow H$ - совп. с BC

т.к. $EF \parallel DO_2$

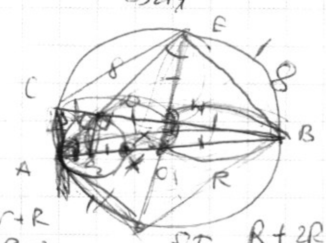
EO_1 - мед. $\parallel DO_2$

$O_1 \in EB$,

$\Rightarrow$



$\boxed{X = R - 2r}$



$\frac{17}{4} = (3R - 2r) \cdot (2R)$

$\frac{17^2}{4} = 2R(3R - 2r)$

$BX = x + R$

$x + 2r = 2R$

$x = 2R - 2r$

$x + R = 2R - 2r + R$

$= BD^2 \quad 3R - 2r$

$\begin{cases} 6R^2 - 4Rr = \frac{17^2}{4} \\ 2R \end{cases}$

$(2R - r - r)(2R - r + r)$

$2R \cdot (2R - 2r) = BD^2$

FF $\quad R + 2R - 2r$

$\Rightarrow$ диаметр $\Rightarrow$

$\cancel{(2R - r)^2 + BD^2} =$

$(2R - r)^2 - r^2 = BD^2$

$\cancel{2R}(3R - 2r) = \cancel{2R}(2R - 2r)$

$R \cdot R - 2rR = 2R^2 \quad 3R - 2r = 2R - 2r$

R^2

$\Rightarrow R = 0 \Rightarrow$

$x = 0$ $\quad (R + r)^2 - r^2 = BD$

$\angle EAF = 90^\circ$

$2R \cdot R = BD$

$R \cdot (R - 2r) = BD$

$R + Rr - x$

$(2R - 2r) \cdot 2R = BD^2$

$OM = \frac{1}{2}AC \quad \Rightarrow \triangle AEB = \triangle AEF$ $\quad 2R^2$

$\frac{BH}{BD} = \frac{R}{2R - r} = k$

т.к. $AC \perp AB$

$\Rightarrow \angle AF = CE$

$\boxed{\cancel{AC = CD}} \Rightarrow$

$(2R - r)^2 - r^2 = BD^2$

$(2R - r - r)(2R - r + r) = 2R(2R - 2r)$ V

$\boxed{AB} = 2R$ V

$2R$

$\begin{cases} R = 2R \cdot k - r \cdot k \\ \end{cases}$

V

$4R^2 - 4Rr = BD^2$

☑ черновик $\quad$ ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(5) $\underbrace{\overset{>0}{10x} + |x^2-10x|^{\log_3 4}}_{>0} \geqslant \underbrace{\underset{>0}{x^2} + 5^{\log_3(10x-x^2)}}_{>0}$

$\Rightarrow \boxed{x>0}$ $\quad x^2+10$

$10x - x^2 > 0$
$x(10-x)>0$
$x \in (0;10)$

$10x + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x - x^2 + (0x-x^2)^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$\frac{a}{2} - \frac{20}{e} = -\frac{11}{2}$

$10x - x^2 = t,\ t \in (0;10)$

$t + t^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3 t}$

$t + t^{2\log_3 2} \geqslant 5^{\log_3 t} = t^{\log_3 5}$

$t + t^{\log_3 4} \geqslant t^{\log_3 5}$

$t^1 + t^{\log_3 4} \geqslant t^{\log_3 5} \ \Big|\, : t^{\log_3 4}$

$t \geqslant t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$

t^0

$\frac{t}{t^{\log_3 4}} + 1 \geqslant t^{\log_3 5}$

$\underbrace{t^{\overset{<0}{(1-\log_3 4)}}}_{\downarrow <} + 1 \geqslant t^{\overset{>0}{\log_3 5}}$

$\Rightarrow$ не более одного пересечения

$1^{(1-\log_3 4)} + 1 \geqslant 1$

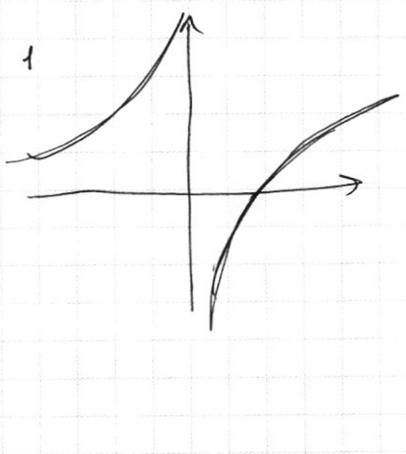
$\boxed{t=1}$ (V) $\Rightarrow$ $t \geqslant 1$ $\quad 9^{1-\log_3 4} + 1 \geqslant 9^{\log_3 5}$?

$0 < t \leq 1$ $\qquad \Rightarrow 10x - x^2 \leq 1$

$\hookrightarrow 0 < 10x - x^2 \leq 1 \Rightarrow$

$x^2 - 10x + 1 \geqslant 0$
$D_1 = 5^2 - 1 \cdot 1 = 24$
$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{24}$
$x \in (5+\sqrt{24}; 10)$
$x \in (0; 5-\sqrt{24})$.

1



t^{-x} $\frac{1}{2}$

D