# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина $A$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $AD$. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра $BC$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} \sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2a+4b) + \sin 2a = -\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2a+2b)\cos 2b = -\frac{4}{5}. \end{cases}$ Подставим первое во второе.

Откуда получаем $\cos 2b = \frac{2}{\sqrt5}$. Тогда $|\sin 2b| = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt5}$.

Рассмотрим первый случай ($\sin 2b = \frac{1}{\sqrt5}$):

Из первого уравнения: $\sin 2a \cos 2b + \sin 2b \cos 2a = -\frac{1}{\sqrt5} \overset{1\text{ случай}}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow 2\sin 2a + \cos 2a = -1$. Пусть $tg\, a = t$. Тогда справедливы равенства $\sin 2a = \frac{2\sin a \cos a}{\sin^2 a + \cos^2 a} = \frac{2t}{t^2+1}$;
$\cos 2a = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a + \sin^2 a} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Тогда $\frac{4t}{t^2+1} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1$.

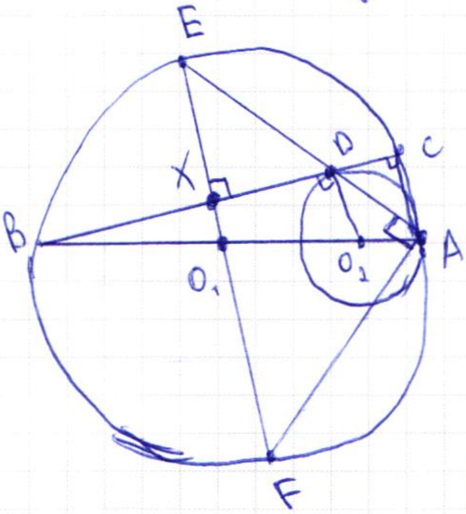
Откуда $4t = -2 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$ (это первый случай — $\sin 2b = \frac{1}{\sqrt5}$)

Второй случай ($\sin 2b = -\frac{1}{\sqrt5}$): $2\sin 2a - \cos 2a = -1$. Аналогичной заменой получаем $\frac{4t}{t^2+1} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1 \Leftrightarrow 4t - 1 + t^2 = -1 - t^2$
$\Leftrightarrow 2t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow 2t(t+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-2 \end{array}\right.$. Заметим что

все что мы сделали, это показали что $tg\, a$ может принимать только эти три значения, но не сделали проверку. Однако она не требуется, т.к. по условию значений не меньше трех и значит мы не получили посторонних корней. Ответ: $tg\, a = -\frac{1}{2}$; $tg\, a = 0$; $tg\, a = -2$.

4) Покажем что $E$ — середина дуги $BC$. Действительно, проведем

общую касательную к двум окружностям в точке $A$. Тогда $\angle CDA = \angle(DA, l)$ (где $l$ - касательная). Но мы знаем что $\frac{\smile CA + \smile BE}{2} = \angle CDA$, $\angle(DA, l) = \frac{\smile EC + \smile CA}{2}$ (из угла между касательной и хордой в $\Omega$), а значит $\smile BE = \smile EC$. Пусть $O_1, O_2$ - центры окружностей $\Omega$ и $\omega$ соответственно.




По доказанному факту $EF \cap AB \equiv O_1$. ~~Как~~ Из симметрии $O_2 \in AB$. Также по доказ. факту $X \equiv EF \cap BC$ - середина $BC$. Заметим что по теор. Фалеса: $\frac{BO_1}{BX} = \frac{O_2A}{DC}$ (далее $BO_1 = R$, $O_2A = r$).

~~BO1~~ $\frac{R}{r} = \frac{BX}{DC} = \frac{\frac{25}{2}}{8} = \frac{25}{16}$. Также по теор. о касательной и секущей: $BD^2 = 2R \cdot (2R - 2r) \Leftrightarrow 289 = 2R(2R-2r)$ $\Leftrightarrow 289 = \frac{25r}{8}\left(\frac{25r}{8} - 2r\right) = \frac{25r}{8} \cdot \frac{9r}{8} = r^2 \cdot \frac{5^2 \cdot 3^2}{8^2} \overset{r>0}{\Leftrightarrow} r = \frac{17 \cdot 8}{5 \cdot 3} =$ $= \frac{136}{15}$. Тогда $R = \frac{25}{16} \cdot \frac{136}{15} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\cancel{34}}{\cancel{4}} \frac{17}{2} = \frac{85}{6}$.

Найдем $EA$: $ED \cdot DA = BD \cdot DC$ а также $\frac{ED}{DA} = \frac{XD}{DC} = \frac{\frac{25}{2} - 8}{8} =$ $= \frac{9}{16}$. Значит $DA^2 \cdot \frac{3^2}{4^2} = 17 \cdot 8 \overset{DA>0}{\Leftrightarrow} DA = \frac{4\sqrt{17 \cdot 8}}{3} = \frac{8\sqrt{34}}{3}$.

Тогда $ED = \frac{9}{16} \cdot \frac{8\sqrt{34}}{3} = \frac{3\sqrt{34}}{2}$. Тогда $EA = \frac{3\sqrt{34}}{2} + \frac{8\sqrt{34}}{3} =$ $= \frac{9\sqrt{34} + 16\sqrt{34}}{6} = \frac{25\sqrt{34}}{6}$. Тогда $\frac{EA}{\sin\angle EFA} = 2R \Leftrightarrow \sin\angle EFA = \frac{\frac{25\sqrt{34}}{6}}{\frac{170}{6}} =$ $= \frac{25\sqrt{34}}{170} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$. Итого $\angle EFA = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Площадь треугольника EFA: $S_{EFA}=\frac{\sin\angle EFA\cdot EF\cdot FA}{2}=\frac{\sin\angle EFA\cdot 2R\cdot FA}{2}$

По т. Пифагора (т.к. $\angle EAF=90°$)

$FA=\sqrt{\left(\frac{85}{6}\right)^2-\left(\frac{25\sqrt{34}}{6}\right)^2}=\frac{1}{6}\sqrt{85^2-25^2\cdot 34}=\frac{5}{6}\sqrt{17^2-5^2\cdot 34}=\frac{5}{6}\sqrt{17(68-50)}=$

$=\frac{5}{6}\sqrt{17\cdot 18}=\frac{5\cdot 3}{6}\sqrt{34}=\frac{5}{2}\sqrt{34}$. Тогда

$S_{EFA}=\frac{\frac{5\sqrt{34}}{34}\cdot\frac{85}{3}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{34}}{2}=\frac{2125}{12}$.

Ответ: $R=\frac{85}{6}$; $r=\frac{136}{15}$; $\angle AFE=\arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$; $S_{AEF}=\frac{2125}{12}$.

2) $\begin{cases}x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}\\ x^2+9y^2-4x-18y=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)}\\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25.\\ \cancel{x^2+9y^2-4x-18y=12}\end{cases}$

Сделаем замену $a=x-2$; $b=y-1$. Тогда $x-2y=a-2b$. Значит система выглядит так

$\begin{cases}a-2b=\sqrt{a\cdot b}\\ a^2+9b^2=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2-4ab+4b^2=ab\\ a^2+9b^2=25\end{cases}$. Из

первого уравнения $(a-b)(a-4b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\ a=4b\end{array}\right.$.

1) $a=b$. Тогда $10b^2=25\Leftrightarrow|b|=\sqrt{\frac{5}{2}}$. Значит пут пары $\left(\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ и $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}},-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

2) $a=4b$. Тогда $25b^2=25\Leftrightarrow|b|=1$. Здесь пары $(4,1)$; $(-4;-1)$.

Вернемся к замене, но при этом заметим что пары

~~Из случаев 1 выполняют, т.к. в них $a-2b$~~ $\left(\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ и $(-4,-1)$ выполнены, т.к. в них $a-2b<0$. Значит

1 случай: $\begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$. 2 случай:

$\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$. Под ОДЗ обе пары подходят. Ответ: $(x,y)=(6,2)$ или $(x,y)=\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}, 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

3) Для начала поймем что $x^2+18x\geq 0$, а значит модуль можно убрать (нер-ство верно т.к. это аргумент логарифма). Тогда $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x\geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

Положим $t=x^2+18x$ (тогда $t\geq 0$): $5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$.

Заменим $\log_{12}t$ как $\frac{\log_5 t}{\log_5 12}$. Тогда получим

$5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 12}}+t\geq t^{\log_{12}13} \Rightarrow t^{\frac{1}{\log_5 12}}+t\geq t^{\log_{12}13}$.

Пусть $f(t)=t^{\frac{1}{\log_5 12}}+t-t^{\log_{12}13}$. Тогда

$f'(t)=\frac{1}{\log_5 12}t^{\frac{1}{\log_5 12}-1}+1-\log_{12}13\cdot t^{\log_{12}13-1}<0$ при

$t\geq 0$. Значит $f(t)$ - убывает на промежутке $t\in[0;+\infty)$. Но теперь заметим что ~~f~~ при $t=12^2$:

$5^{\log_{12}12^2}+12^2=12^{2\log_{12}13} \Leftrightarrow 25+144=169$. Значит решением нер-ства является промежуток $t\in[0;12^2]$.

Тогда $\begin{cases} x^2+18x\geq 0 \\ x^2+18x\leq 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in \cancel{(-\infty;0]}\cup(-\infty;-18]\cup[0;+\infty) \\ (x+24)(x-6)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x\in(-\infty;-18]\cup[0;+\infty) \\ x\in[-24;6] \end{cases} \Rightarrow x\in[-24;-18]\cup[0;6]$. Ответ: $[-24;-18]\cup[0;6]$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) Заметим что для $\forall$ натурального числа $N$: $f(N)\geq 0$. Действительно, пусть $N=\prod_{i=1}^{n} p_i$, тогда $f(N)=\sum_{i=1}^{n} f(p_i)$ (где $p_i$ - простое число), значит $f(N)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{p}{4}\right]\geq 0$. Теперь рассмотрим произвольное рациональное число $\frac{p}{q}$ (НОД$(p,q)=1$). Докажем ~~что если $|p-q|>4$, то одно из чисел $f(\frac{p}{q})$ и $f(\frac{q}{p})$ - отрицательное. Действительно,~~ что одно из чисел $f(\frac{p}{q})$ или $f(\frac{q}{p})$ неотрицательное, а другое неположительное ~~(кроме случая $p=q$)~~. Действительно, для начала $a=b=1$: $f(1)=f(1)+f(1) \Leftrightarrow f(1)=0$. Значит $0=f(1)=f(\frac{p}{q}\cdot\frac{q}{p})=f(\frac{p}{q})+f(\frac{q}{p})$. Пусть $f(\frac{p}{q})=f(\frac{q}{p})=0$. Тогда $f(\frac{p}{q}\cdot q)=f(q) \Leftrightarrow f(p)=f(q)$. Значит из двух чисел $f(\frac{p}{q})$ и $f(\frac{q}{p})$ есть одно отриц. тогда и только тогда когда $f(p)\neq f(q) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{p_i}{4}\right]\neq \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{q_i}{4}\right]$. Найдем все пары ~~натуральных~~ чисел $(p,q)$ т.ч. $f(p)=f(q)$ $(1\leq p\leq 24; 1\leq q\leq 24)$. Для этого вычислим для каждого $i\in[1;24]$ значение $f(i)$:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(i)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 4 | 0 | 4 | 1 | 1 |

| 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|
| 2 | 5 | 0 |

. Теперь осталось посчитать количество пар $(p, q)$ т.ч. $f(p) \neq f(q)$ и разделить на два (потому что только одно из чисел $f(\frac{p}{q})$ и $f(\frac{q}{p})$ отрицательное). ~~1с~~ 1 случай) ~~$f(p)=0$~~ одно из чисел $\{f(p), f(q)\}$ равно нулю. ~~Тогда случаев~~

Сразу заметим что в таблице 11 нулей, 7 единиц, 2 двоек, одна тройка, две четверки, одна пятерка. Тогда в этом случае $2 \cdot 11 \cdot 13$. Одно из чисел единица: $2 \cdot 7 \cdot 17$. Одно из чисел двойка: $2 \cdot 2 \cdot 22$, одно из чисел 3: $2 \cdot 23$. Одно из чисел четверка: $2 \cdot 2 \cdot 22$, одно из чисел 5: $2 \cdot 23$. Итого вариантов

$$\frac{2 \cdot 11 \cdot 13 + 2 \cdot 7 \cdot 17 + 2 \cdot 2 \cdot 22 + 2 \cdot 23 + 2 \cdot 2 \cdot 22 + 2 \cdot 23}{4}$$

(делим на 4 т.к. каждую пару посчитали 4 раза), значит

$$\frac{11 \cdot 13 + 7 \cdot 17 + 2 \cdot 22 + 23 + 2 \cdot 22 + 23}{2} = \frac{143 + 119 + 44 + 23 + 44 + 23}{2} =$$

$$= \frac{262 + 88 + 46}{2} = \frac{396}{2} = 198.$$ Ответ: 198 пар.

7) Пусть середина $AB - X$, середина $AC - Y$, ср. $BC - Z$. Тогда рассмотрим сечение середин плоск. $(ABC) \Rightarrow AXYZ$ − вписанный, но $AXYZ$ − параллелограм, а значит $AXYZ$ − прямоугольник.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} \sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2a+4b) = -\frac{4}{5} + \sin 2a = -\frac{4}{5} \end{cases}$ $tg\,\alpha - ?$

знам $\geq 3$
$\cos\alpha \neq 0$

$4t + \dots$

$t = -\frac{1}{2}$ $\quad -2$

$\sin(2a+4b) + \sin 2a = 2\sin(2a+2b)\cos 2b$.

$-\frac{4}{5} = -\frac{2}{\sqrt5} \cdot \cos 2b$.

$\sin 2a \cos 2b + \sin 2b \cos 2a = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2a \cos 4b + \sin 4b \cos 2a = -\frac{4}{5}$

$\cos 2b = \frac{2}{\sqrt5}$. $\quad tg\,\alpha = \frac{\sin a}{\cos a}$

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5}$

~~$\sin(x+2y) + \sin x = -\frac{4}{5}$~~

$\sin 2a \cos 2b + \sin 2b \cos 2a = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2a \frac{2}{\sqrt5} + \cancel{\sin}\cos 2a \cdot \frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$.

$2\sin 2a + \cos 2a = -1$. $\quad \sqrt3\left(\frac{2}{\sqrt3}\sin 2a + \frac{1}{\sqrt3}\cos 2a\right) = -1$.

~~$4\sin a\cos a + \cos^2 a - \sin^2 a = -1$.~~

$2\sin 2a + \cos 2a = -1$.

$\sin 2a \cos 4b + \sin 4b \cos 2a + \sin 2a = \sin 2a(\cos^2 2b - \sin^2 2a) + 2\sin 2a\cos 2a(\cos 2a) +$
$+ \sin 2a = \sin 2a\cos^2 2b - \sin^3 2a + 2\sin 2a\cos^2 2a + \sin 2a = -\frac{4}{5}$.

$\sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad 2\cos 2b = \frac{4}{\sqrt5}$. $\quad \frac{\sin a}{\cos a} - ?$

$2\sin(2a+2b)\cos 2b = -\frac{4}{5}$.

$2\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cos 2b = -\frac{4}{5}$. $\quad \cos 2b = \frac{2}{\sqrt5}$.

$\begin{cases} \cos 2b = \frac{2}{\sqrt5} \\ \sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt5}. \end{cases}$

$tg\,\alpha = x$, тогда $\sin 2a = \frac{2\sin a\cos a}{\sin^2 a + \cos^2 a} = \frac{2x}{1+x^2}$

$\cos 2a = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin^2 a + \cos^2 a}$

$\frac{4x}{1+x^2} + \frac{1-x}{1+x^2} = -1$.

$\frac{3x+1}{1+x^2} = -1$. $\quad 3x+1 = -1-x^2 \quad x_{1,2} = \{-1, -2\}$
$x^2 + 3x + 2 = 0$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ОДЗ

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$x\geq 2y$

$x^2+4y^2-4xy=xy-x-2y+2$

$x^2-3xy+4y^2+x+2y-2=0$

$\cancel{x^2-4x+4 \quad +9y^2-18y+8}$

4 36

$\cancel{(x-2)^2}+(3y-3)^2=25$

$D(x)=(3y-1)^2-4(4y^2+2y-2)=$

$=9y^2+1-6y-16y^2-8y+8\geq 0$

36·7

$-7y^2-14y+9\geq 0$

$y_{12}=\frac{14\pm\sqrt{196+}}{-14}$

$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}=$

$=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$\cancel{D(y)=364}$

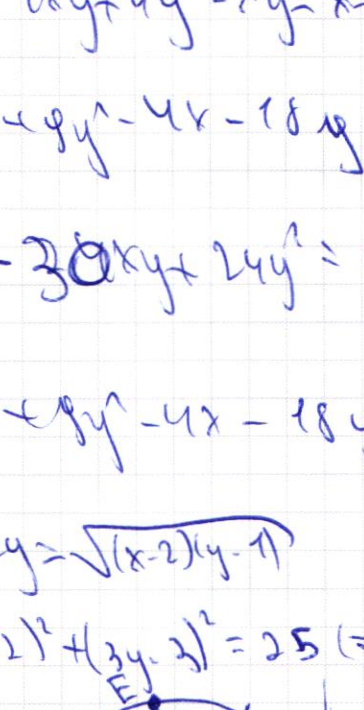
$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x^2-30xy+24y^2=\cancel{6xy}-6x-12y+12 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$\frac{85 \times 25}{425} \quad \frac{170}{212}$ 170-34

$\frac{\frac{25}{2}-8}{8}$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \Leftrightarrow (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$




$CD=8,\ BD=14.$ $r_1, r_2 - ?$ $\angle AFE - ?$

E – сер. дуги. $S_{AEF} - ?$

$$\begin{cases} \frac{R}{r}=\frac{BX}{DC}=\frac{\frac{25}{2}}{8}=\frac{25}{16} \\ BD\cdot BC=2R\cdot(2R-2r) \end{cases}$$

Найду $AF \to \sin\angle AFE$.

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2+18x>0.$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x.$

$\underbrace{x^2+18x}_{t} \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 5^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$\cancel{\log_{12} x^2+18x \geq \log_{12} x^2+18x}$ $t>0.$

$t=xy$

$t \geq t^{\log_{12}13} - 5^{\log_{12}t}.$

$t(1-t^{\log}$ $10^t \geq 10^{t^{\log_{12}13}-5^{\log_{12}t}}$ $= te$ $= \frac{10^{t^{\log_{12}13}}}{10^{5^{\log_{12}t}}}$

$t \geq t^{\log_{12}13} - 5^{\log_{12}t}$

$\cancel{t+5^{\log t}}$ $\log_{12}t = \frac{\log_5 t}{\log_5 12}$ $t^{\frac{1}{\log_5 12}}$

$t \geq t^{\frac{\log_5 t}{\log_5 12}} - t^{\frac{1}{\log_5 12}}$

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$ $5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 12}}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$\cancel{t=12 \quad 5+12 \geq 13}$

$t^{\frac{1}{\log_5 12}}+t \geq t^{\log_{12}13}.$

$t+t^{\log_5 12+1} \geq t^{\log_5 12+\log_{12}13}$

3) $\frac{x}{y}$ - нецелое $f(1)$

нецел $-\infty$ $f(1)=f(1)+f(1)$ $\Rightarrow f(1)=0.$

$f(N)=\sum f(1)$

$\frac{x}{y}$ - нецелые.

$\cancel{x=ky}$

$y<11$ $\frac{a}{b}$ - нецел

$f\left(\frac{10}{6}\right)=f(1).$

24.

$f(\frac{x}{y}\cdot y)=f(\frac{x}{y})+f(y)$

$\left(t^{\frac{1}{\log_5 12}} - t^{\log_{12} 13}\right)' = t^{\log_{12} 13 - 1}$

$= \frac{1}{\log_5 12} t^{\frac{1}{\log_5 12} - 1}$ $t^{\log_{12}13}$

$t c \geq t^{d}$

$c \geq t^{d-1}$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{(y - x - 2y + 2)} = \sqrt{(y-1)(x-2)} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2$

$x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 12 = 0.$

$D(y) = 18^2 - 4 \cdot 9(x^2 - 4x - 12) = 364 - 36x^2 + 144x + 432$

$x(x+18) \geq 0$

$-18 \quad 0$

$x - 2y = a - 2b.$

$\sqrt{y-1} = b$

$$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 4b^2 - 4ab = ab \\ a^2 + 9b^2 = 12. \end{cases}$$

$\frac{364 + 4 \cdot 144}{25b^2 - 16b^2} = 364 + 576.$

$5b^2 + 5ab = 12$

$a_{12} = \frac{5b \pm 3b}{2} = \{4b, b\}.$

$(a-b)(a-4b)$ $\frac{-18 \pm 30}{2} = \{-24, 6\}.$

$\boxed{940}$

$5^{\log_{12} t}$

$t^{\frac{1}{\log_5 12}}$

$(5^{\log_{12} t})' =$

$= e^{x \ln 5}.$

$25 + 144 = 169$

$t^{\log_{12} 13}$

3) $5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$t^{\frac{1}{\log_5 12}} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

корни

$t^{\frac{1}{\log_5 12}} + t = t^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} t} + t = t^{\log_{12} 13}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

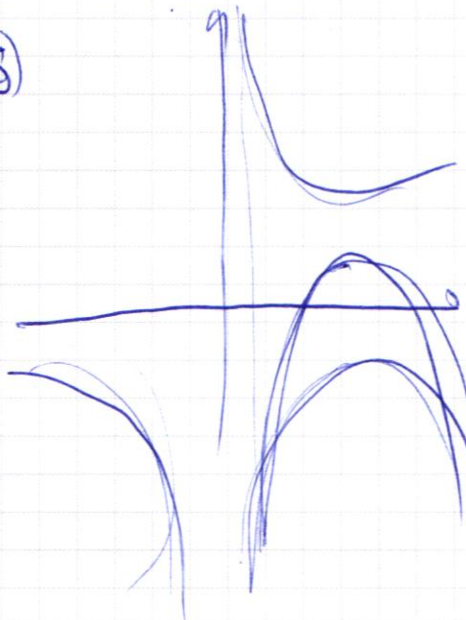
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б)



$3+\quad \frac{2}{4x+3}$

$f\left(\frac{p}{q}\right) = \cancel{f(p)\,f(}\,f(p)+f\left(\frac{1}{q}\right)$

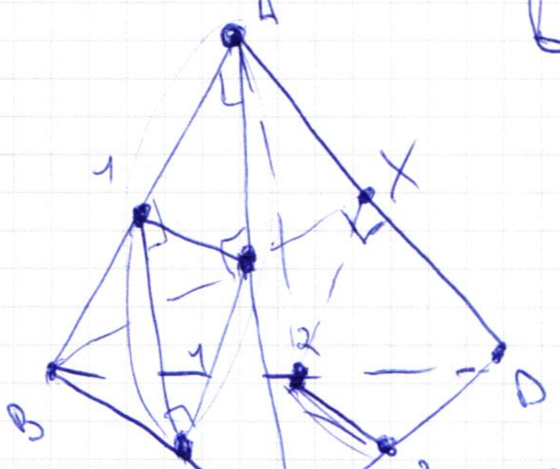
$f\left(\frac{pq}{r}\right) = f(p)+f(q)+f(r)$

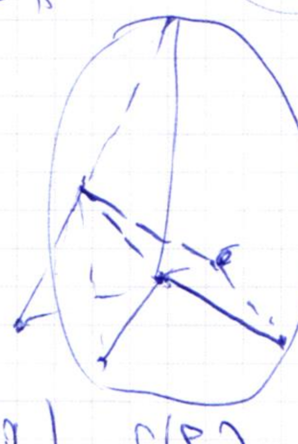
$f\left(\frac{p}{q}\right) > 0$, $(p,q)=1$.

$f\left(\frac{p}{q}\cdot q\right) = f(q)+f\left(\frac{p}{q}\right)$

$f(p)$

$f(q)<f(p)$



$f\left(\frac{q}{p}\cdot p\right) = f\left(\frac{q}{p}\right)+f(p)$

$= f(q)$

$f\left(\frac{q}{p}\right)$ и $f\left(\frac{p}{q}\right)$ одно отриц.,

$\cancel{f\left(\frac{p}{q}\right)\quad f\left(\frac{q}{p}\right)}$

$f\left(\frac{p}{q}\cdot\frac{q}{p}\right) = f(1)$

$f\left(\frac{pq}{r}\right)\quad f\left(\frac{r}{pq}\right)$

$f(r) = f(pq)$

$11\cdot 13 =$
$= 121+22 =$
$= 143$

$7\cdot 17$
$70+49$

$262+88+46 = 350$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)