## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6},\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина $Y$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $TY$. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра $XZ$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right)=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{\sqrt{17}}$ $\cos(2\beta)=-\frac{2}{17}$

$\cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{17}}$

тогда по основному тригонометрическому $\sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{1}{17}}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

2) $\sin(2\alpha+4\beta)=\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos(2\alpha+2\beta)$

$\cos(2\alpha+2\beta)$ по основному триг $\pm\sqrt{1-\frac{1}{17}}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

тогда $\sin(2\alpha+4\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\pm\frac{16}{17}$;

значит, т.к $\sin(2\alpha)=-\frac{2}{17}-\sin(2\alpha+4\beta)$, то $\sin(2\alpha)=-\frac{2}{17}+\frac{1}{17}\pm\frac{16}{17}$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha=-1\\ \sin 2\alpha=\frac{15}{17}\end{array}\right.$

а) Если $\sin 2\alpha=-1$, то $\cos 2\alpha=0$, значит $\operatorname{tg}2\alpha$ неопределён, тогда

т.к $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, ~~$\operatorname{tg}^2\alpha=\pm1$~~ $\operatorname{tg}\alpha=\pm1$

значит $\operatorname{tg}\alpha$ принимает только 2 значения (?!)

б) Если $\sin 2\alpha=\frac{15}{17}$, то $\cos 2\alpha$ по осн. триг. $\pm\sqrt{1-\frac{225}{289}}=\pm\frac{8}{17}$

тогда $\operatorname{tg}2\alpha=\pm\frac{15}{8}$, тогда т.к $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, то

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{15}{8}$ или $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\frac{15}{8}$

1) $|\operatorname{tg}\alpha|\neq1$

$16\operatorname{tg}\alpha=15-15\operatorname{tg}^2\alpha$

$15\operatorname{tg}^2\alpha+16\operatorname{tg}\alpha-15=0$

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha=-\frac{25}{15}\\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{9}{15}\end{array}\right.$

1) $|\operatorname{tg}\alpha|\neq1$

$16\operatorname{tg}\alpha=-15+15\operatorname{tg}^2\alpha$

$15\operatorname{tg}^2\alpha-16\operatorname{tg}\alpha-15=0$

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha=\frac{25}{15}\\ \operatorname{tg}\alpha=-\frac{9}{15}\end{array}\right.$

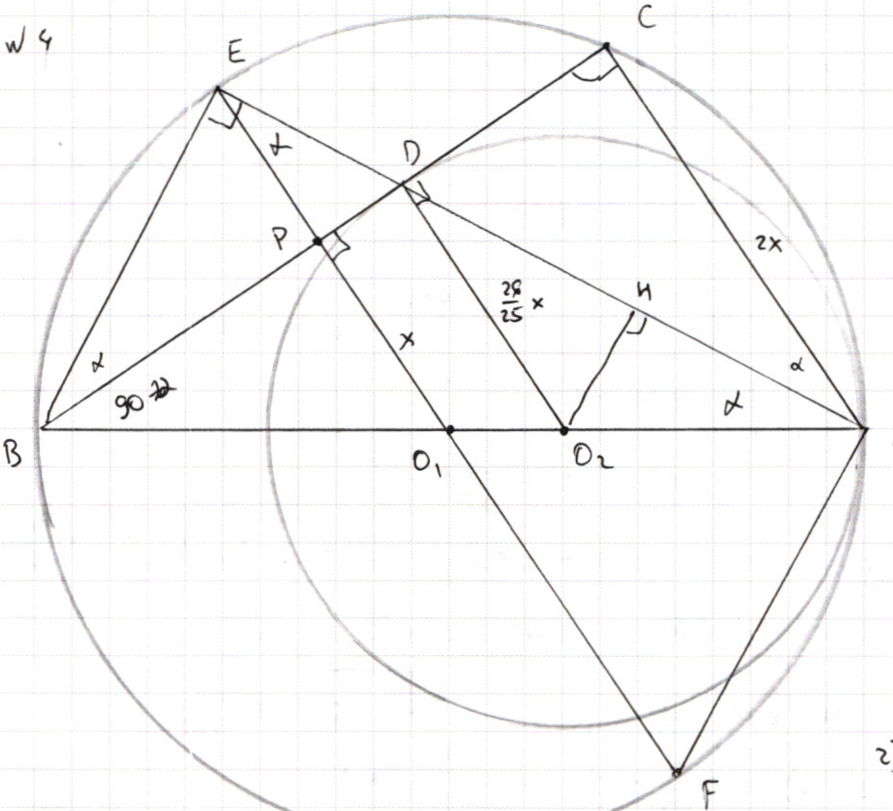
Получили 4 значения для тангенсов это больше трёх.

Ответ: $\pm\frac{9}{15}$; $\pm\frac{25}{15}$

~~так как неравенство равносильно~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 4




Дано: $\Omega$, $\omega$ касаются в $A$. $AB$ - диаметр $\Omega$, ~~$\Omega$~~ $\Omega$ больше, $BD$ - кас $\omega$, $O_1$, $O_2$ - центры, $AD \cap \Omega = E$, $EF \perp BC$, $BD = 13$, $CD = 12$

Найти: $R$, $r$, $\angle AFE$, $S_{AEF}$

Решение: 1) $\angle BEA = \angle BCA = 90^\circ$ т.к $AB$ - диаметр

2) ~~...~~ $EF$, $O_2D$, $AC \perp BC$ значит $EF \parallel O_2D \parallel AC$

3) З $\angle CAE = \alpha$, тогда т.к $\smile EC$ - общая $\angle EBC = \alpha$, т.к $\angle BEA = 90^\circ$, то $\angle EDB = 90^\circ - \alpha$, $EF \perp BC$, $\angle \cancel{E}PED) = 90^\circ - 90 - \alpha = \alpha$

4) ~~E~~ $EF \parallel O_2D$, $EA$ - сек поэтому $\angle O_2DA = \alpha$, т.к $O_2D = O_2A = r$, то $\triangle DO_2A$ - р/б $\angle DAO_2 = \alpha$

5) З ~~$\angle$~~ $EF \cap AB = K$, тогда т.к $\angle KEB = \angle EBK = \cancel{90}^\circ\ 90^\circ - \alpha$ то $\triangle EBK$ - р/б, аналогично $\triangle EKA$ - р/б тогда $BK = AK$, $BK + AK = 2R$, $K$ совпадает с $O_1$

6) Пусть $AC = 2x$, тогда ~~ко~~ ~~...~~ $PO_1 = x$ (это средняя линия $BO_1 = O_1A$, $PO_1 \parallel AC$), $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ по двум углам, поэтому $\frac{DO_2}{CA} = \frac{13}{12+13} \Rightarrow DO_2 = \frac{26}{25}x$

7) Из $\triangle CAD$ $AD^2 = \sqrt{12^2 + (2x)^2}$, по т. Пифагора. Опустим высоту у $O_2$ на $AD$, ~~...~~ тогд т.к $\triangle DO_2A$ р/б ($r = r$) то ~~...~~ это медиана ~~$\angle$~~ $\angle HAO_2 = \alpha = \angle CAD$, тогда ~~$\angle$~~ $\cos\alpha = \cos\alpha$ $\frac{\frac{AD}{2}}{AO_2} = \frac{AC}{AD}$;

$AO_2 = O_2D = \frac{26}{25}x$, $AD^2 = 2AO_2 \cdot AC$, $144 + 4x^2 = \frac{104}{25}x^2$, $\frac{4}{25}x^2 = 144$,

$x^2 = 9 \cdot 4 \cdot 25$ $x = 30$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8) Из $\triangle BCA$ по т Пифагора $4R^2 = 4x^2 + 25^2$ $\quad R = \frac{\sqrt{3600+625}}{2}$

$r = \frac{26}{25}x \qquad r = \frac{26 \cdot 30}{25} = \frac{26 \cdot 6}{5} = \frac{156}{5}$

9) ~~$\angle AEF = \angle AFE = 90 - \alpha$ т.к $\angle EAF = 90^\circ$ (опир на диам)~~

~~$\sin(90-\alpha)$ из $\triangle CBA = \frac{2x}{2R} = \frac{x}{R}$~~

~~$\frac{30}{\sqrt{4225}}$ $\quad \angle AFE = \arcsin\left(\frac{30}{\sqrt{4225}}\right)$~~

~~$\sin($~~ $\angle \cancel{AEF}\ AFE = 90^\circ - \alpha$ т.к $\angle EAF = 90^\circ$ (опир на диам)

$\angle CDA = 90^\circ - \alpha \qquad \sin(90-\alpha) = \frac{2x}{AD}$

$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{60}{\sqrt{144+3600}} = \frac{60}{\sqrt{3744}}$

$\angle \cancel{AEF}\ AFE = \arcsin\left(\frac{60}{\sqrt{3744}}\right)$

10) $S_{AEF} = \frac{1}{2} EF \cdot EA \sin(\alpha) = \frac{1}{2} 2R \cdot 2R \cdot \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \sin\alpha =$

$= 2R^2 \cdot \frac{60}{\sqrt{3744}} \cdot \frac{12}{\sqrt{3744}} = \frac{\sqrt{4225}^2}{2} \cdot \frac{60 \cdot 12}{3744} = \frac{4225 \cdot 30 \cdot 12}{3744}$

Ответ: $R = \frac{\sqrt{4225}}{2}$

$r = \frac{156}{5}$

$\angle \cancel{AEF}\ AFE = \arcsin\left(\frac{60}{\sqrt{3744}}\right)$

$S_{AEF} = \frac{4225 \cdot \cancel{30}3 \cdot 12}{3744}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2-18x+y^2-12y=45 \end{cases}$

$(3(x-1))^2+((y-6))^2=90$

$y^2-12y+36-90+(3(x-1))^2=0$

$D=144+4\cdot 54-36(x-1)^2$ $\quad \sqrt{D}=6\sqrt{10-(x-1)^2}$ $\quad (x-1)^2\leqslant 10$

$y=\dfrac{12\pm\sqrt{D}}{2}=6\pm 3\sqrt{10-(x-1)^2}$

1) "+" $\quad 6+3\sqrt{10-(x-1)^2}-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$-6(x-1)+3\sqrt{10-(x-1)^2}=\sqrt{(x-1)\cdot 3\sqrt{10-(x-1)^2}}$ $\quad \exists\ x-1=a$

$-6a+3\sqrt{10-a^2}=\sqrt{a\cdot 3\sqrt{10-a^2}}$ $\quad a\geqslant 0$

т.к $a\cdot 3\sqrt{10-a^2}\geqslant 0$

$\sqrt{10-a^2}\geqslant 0$

или $a=-\sqrt{10}$

$36a^2-36a\sqrt{10-a^2}+9(10-a^2)=3a\sqrt{10-a^2}$

$12a^2-13a\sqrt{10-a^2}+30-3a^2=0$

~~$11a\sqrt{10-a^2}=-9a^2-30$~~

~~$121a^2\ 1210a^2-121a^4=81a^4+540a^2+900$~~

~~$0=202a^4-670a^2+900$~~

~~$169a^2(10-a^2)=-9a^2-30$~~

$9a^2+30=13a\sqrt{10-a^2}$ $\quad a>0$

$250a^4-1150a^2+900=0$

$-6+3\cdot 3>0$ верно

$-18\sqrt{\frac{2}{5}}+3\cdot\sqrt{\frac{32}{5}}<0$

$3\sqrt{\frac{2}{5}}$ не корень

$\left[\begin{array}{l} a^2=1 \\ a^2=\frac{18}{5} \end{array}\right.$ $\quad a=1,\quad x=2 \quad 0<a<\sqrt{10}$

$a=3\sqrt{\frac{2}{5}},\quad x=3\sqrt{\frac{2}{5}}+1,\quad 0<\frac{18}{5}<10$

2) "−"

$6-3\sqrt{10-(x-1)^2}-6x=\sqrt{(x-1)\cdot(-3)\sqrt{10-(x-1)^2}}$ $\quad |x-1|\leqslant\sqrt{10}$

$\underline{x-1<0}$ или $x-1=\sqrt{10}$

$\exists\ x-1=a$

т.к $(x-1)(-3)\sqrt{10-(x-1)^2}\geqslant 0$

$\sqrt{10-(x-1)^2}=0$

$x=\sqrt{10}+1$

$-6a-3\sqrt{10-a^2}=\sqrt{-3a\sqrt{10-a^2}}$

$36a^2+36a\sqrt{10-a^2}+9(10-a^2)=-3a\sqrt{10-a^2}$

$12a^2+13a\sqrt{10-a^2}+30-3a^2=0$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$13a^2\sqrt{10-a^2} = -9a^2 - 30$

$\left[\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a^2 = \frac{18}{5} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = -\sqrt{\frac{18}{5}} = -3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{array}\right.$ с учётом $\sqrt{-3a\sqrt{10-a^2}} \geq 0$

$a = -1$ $6 - 3 \cdot 3 \geq 0$ (?)

$a = -3\sqrt{\frac{2}{5}}$ $+18\sqrt{\frac{2}{5}} - 3\sqrt{\frac{32}{5}} = (18-12)\sqrt{\frac{2}{5}} \geq 0$ верно

тогда мы проверим подстановкой все найденные $a$.

~~[illegible] ~~

$a = 1$ $x = 2$ $y = 15$ ~~$y = 3$~~

$a = -3\sqrt{\frac{2}{5}}$ $x = -3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1$ $y = 6 - 3\sqrt{10 - \frac{18}{5}} = 6 - 3\sqrt{\frac{32}{5}}$

Ответ: $(2; 15)$, $\left(-3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1; 6 - 3\sqrt{\frac{32}{5}}\right)$

№ 3 1) $26x - x^2 > 0$ поэтому $x \in (0; 26)$

тогда модуль однозначен.

2) Перепишем в виде

$(26x - x^2)^{\log_5 12} + (26x - x^2) \geq (26x - x^2)^{\log_5 13}$

т.к $5^{\log_5 13 \cdot \log_5(26-x^2)} = 13^{\log_5(26x-x^2)}$

3) т.к $(26x - x^2) > 0$ разделим на него

$(26x-x^2)^{\log_5 \frac{12}{5}} - (26x - x^2)^{\log_5 \frac{13}{5}} \geq -1$

далее можно воспользоваться методом рационализации и получить необходимое

$a^x > a^y \Rightarrow (a-1)(x-y) > 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$

$\cos 2\alpha = \pm \frac{8}{17}$

$tg\, 2\alpha = \pm \frac{15}{8}$

$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{15}{8}$

$16t = 15 - 15t^2$

$15t^2 + 16t - 15 = 0$

$9 \cdot 25$

$-\frac{25}{15} \quad + \frac{9}{15}$

$\frac{2t}{1-t^2} = -\frac{15}{8}$

$16t = -15 + 15t^2$

$15t^2 - 16t - 15 = 0$

$+\frac{25}{15} - \frac{9}{15}$

$17^2$

$17 \cdot 17 = 119,\ 17,\ 289$

$289 - 225 = 64$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90$

$y = 6$

$3x - 3 = 3\sqrt{10}$

$x = \left[\begin{array}{l}\sqrt{10}+1\\ 1-\sqrt{10}\end{array}\right.$

$= \sqrt{ab}$

$(3a)^2 + b^2 = 90$

$2y^2 - 24xy + 72x^2$

$tg\, \alpha = -\frac{25}{16}$

$(3x-1)^2$

$(a+b) = (x+y-7)$

$(3 \cdot 3\sqrt{10}^{+1} - 3)^2 +$

$(3 \cdot 3\sqrt{10} - 2)^2 =$

$y = \frac{12 \pm 6\sqrt{10-(x-1)^2}}{2}$

$y = 6 \pm 3\sqrt{10-(x-1)^2}$

$y^2 - 12y + 36 - 90 + 9(x-1)^2 = 0$

$144 + 54 \cdot 4 - 36(x-1)^2$

$\cancel{y^2 - 2872}$

$xy - 6$

$xy + y - 6x - 6$

$y - 6x = (y-6)(x+1)$

$9a^2 + b^2 = 90$

$\sqrt{ab}$

$y - 6x$

$(x-1)$
$(y-6)$

$\cancel{90 - 3(}\quad \sqrt{90 - 9a^2} \cdot a$

$(y-6)^2 = 90 - (3(x-1))^2$

$3^2(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$54 \cdot 4 = 216$

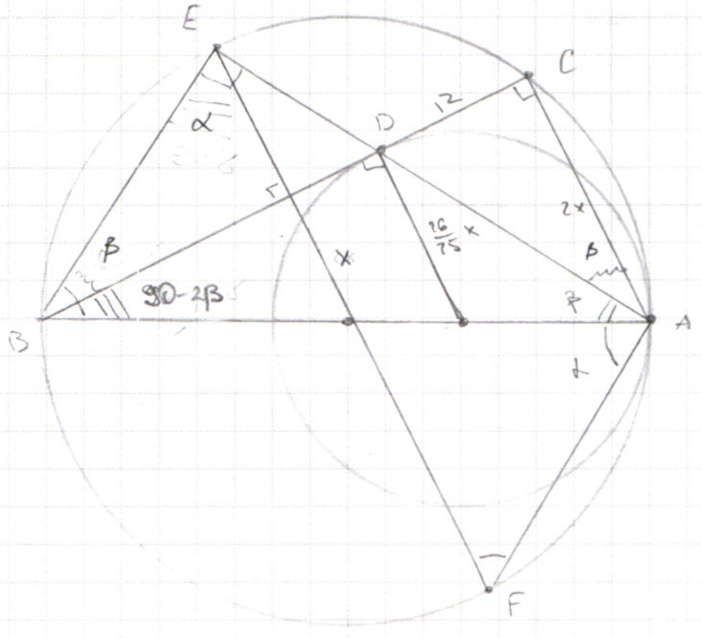
$216 + 144 = 360$

$(y-6x)^2 - (y-6x) -$

$y - 6x \quad -y + xy$

$y - 6x \quad (y-6)(x-1)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)




$CD=12,\ BD=13$

$\frac{BD}{BC} = \frac{13}{25}$

$4R^2 + 4x^2 = 25^2$

$R \Rightarrow x \Rightarrow r$

$AD = \sqrt{144+4x^2}$

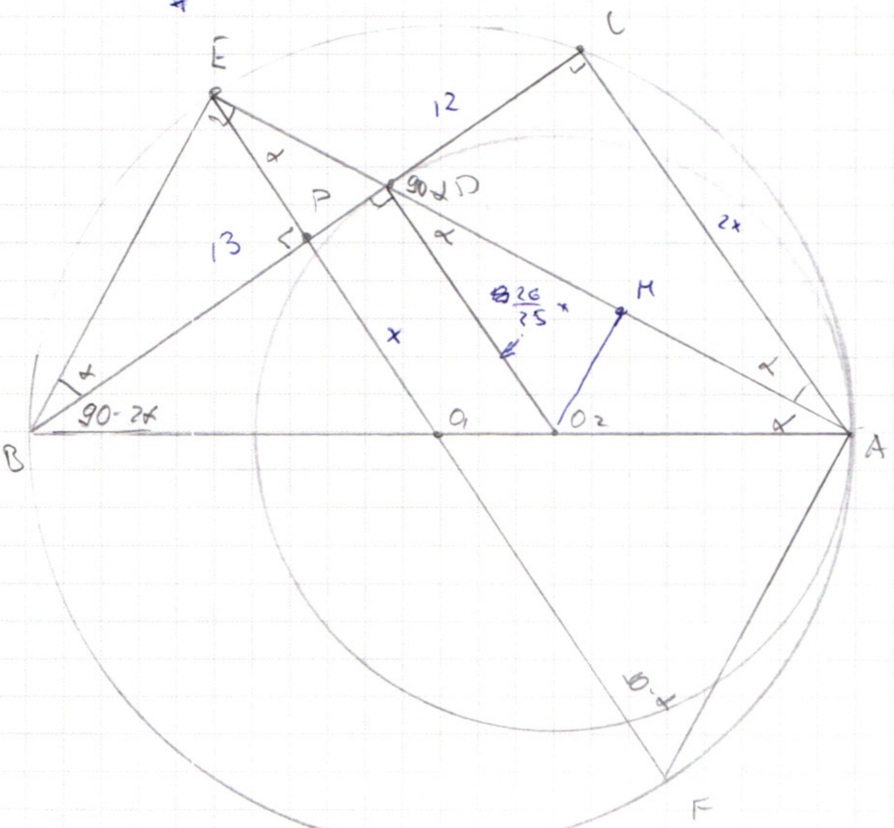
$R = \frac{\sqrt{25^2+4x^2}}{2}$

$\beta = \gamma$

$90 - \beta - \gamma$ $\alpha = 90 - \cancel{\beta} - \gamma$

$f(1) = 0$

f




$E\,O_1 = AO_1$

$AD = \sqrt{144+4x^2}$

$ED \cdot AD = 13 \cdot 12$

$\sin\alpha = \cancel{\sqrt{144+4x^2}}\ \frac{12}{\sqrt{144+4x^2}}$

$\left(\frac{AD}{2}\right)^2 + \left(\frac{26}{25}x \cdot \frac{12}{AD}\right)^2 = \frac{26}{25}x$

$\frac{144+4x^2}{4} + \frac{26^2 \cdot 12^2 \cdot x^2}{25^2 \cdot (144+4x^2)} = \frac{26^2}{25^2}x^2$

$36 + a + \frac{26^2 \cdot 12^2 \cdot a}{(25\cdot 12)^2 + 25^2 4a} = \frac{26}{25}a$

$36 + a + \frac{26^2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot a}{25^2 \cdot 4 \cdot 9 + 25^2 a} = \frac{26}{25}a$

$36 \cdot 25^2 + 25^2 a + \frac{26^2 \cdot 36 \cdot a}{36+a} = \cancel{26}\ 26 \cdot 25 a$

$25^2(36+a)^2 + 26^2 \cdot 36 \cdot a -$

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$6 + 3\sqrt{10-(x-1)^2} \cancel{z} - 6x = \sqrt{(x-1)3\sqrt{10-(x-1)^2}}$

$|a| < \sqrt{10}$

$6(x-1) + 3\sqrt{10-(x-1)^2} = \sqrt{(x-1)\cdot 3\sqrt{10-(x-1)^2}}$

$6a + 3\sqrt{10-a^2} = \sqrt{3a\sqrt{10-a^2}}$

$36a^2 + 36a\sqrt{10-a^2} + 3(10-a^2) = 3a\sqrt{10-a^2}$

$12a^2 + 11a\sqrt{10-a^2} + \cancel{3}(10-a^2) = 0$

$11a\sqrt{10-a^2} = \cancel{-15a^2+60a-300}\ -11a^2-10$

$121a^2(10-a^2) = 81a^4 + 18\cdot 30a^2 + 900$

$-121a^4 + 1210a^2 = 121a^4 + 220a^2 + 100$

$1210a^2 - 121a^4 = 81a^4 + 540a^2 + 900$

$990a^2 = 100$

$0 = 202a^4 + 420a^2 + 900$

$a = \pm\sqrt{\frac{100}{990}} = \pm\sqrt{\frac{10}{99}}$

$101a^4 + 210a^2 + 900$

$9a^2 - 30 = 13a\sqrt{10-a^2}$

$6 - 3\sqrt{10-(x-1)^2} - 6x = \sqrt{-3(x-1)\sqrt{10-(x-1)^2}}$

$81a^4 - 540a^2 + 900 = 1690a^2 - 169a^4$

$250a^4 - 1150a^2 + 900 = 0$

$5a^4 - 23a^2 + 18 = 0$

$a^2 = 1$

$a^2 = \frac{18}{5}$

$18\cdot 5$

$\sin(90-2\alpha) = \cos 2\alpha$

$30^2$

$-\frac{900}{144}$

$756 \,|\, 4$, $189$

$\frac{4}{35}$

$\frac{32}{36}$

$\left(\frac{26}{25}x\right)^2 = \left(\frac{AD}{2}\right)^2 + \frac{26}{25}x$

$\sqrt{\frac{30^2-12^2}{4}}$

$\cancel{\frac{26}{6}}$ $\frac{AD}{\frac{52}{25}x} = \frac{2x}{AD}$

$AD^2 = \frac{104}{25}x^2$

$144 + 4x^2 = 4x^2 + \frac{4}{25}x^2$ $\qquad x^2 = \cancel{12\cdot 4}\ 12\cdot 3\cdot 25$

$9\cdot 4\cdot 25 = 5^2\cdot 2^2\cdot 3^2 = 30^2$

$\cancel{AD^2} \; AD = 30$ $\qquad \cancel{30\cdot x} = 30\cdot ED = 13\cdot 12$

$ED = \frac{13\cdot 12}{30} = \frac{26}{5} =$

$\frac{2x}{AD} = \frac{\frac{AD}{2}}{\frac{26}{25}x}$ $\qquad 2x\cdot\frac{26}{25}x\cdot 2 = AD^2$

$\frac{104}{25}x^2 = AD^2 = 144 + 4x^2$ $\qquad \frac{4}{25}x^2 = 144$

$x = 30$

$30^2 -$ $\quad 25 \quad 30 \quad \sqrt{\frac{625+900}{4}}$

$a^{\log_5 12} + a \geq a^{\log_5 13}$ $\qquad 169$

$1 \geq a^{\log_5 \frac{13}{5}} - a^{\log_5 \frac{12}{5}}$ $\qquad \log_5 5 \quad \log_5 12$

$\log_5 13$

$(26x-x^2)^{\log_5 12} + (26x-x^2)^1 \geq \cancel{\log}\,(26x-x^2)^{\log_5 13}$

$a^b = c$ $\qquad (26x-x^2)$

$\log_a c = b$

$a^{\log_5 \frac{12}{5}} + a^0 > a^{\log_5 \frac{13}{5}}$

$a^0 > a^{\log_5 \frac{13}{5}} - a^{\log_5 \frac{12}{5}}$

$a^0 > a^{\log_5 \frac{12}{5}}\left(\log_3 a^{\log_5 \frac{13}{12}} - 1\right)$

$26 \cdot 6 = 156$

$a^{\log_5 \frac{12}{5}} = \frac{1}{a^{\log_5 \frac{13}{12}} - 1}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$ $\qquad x\in\left(\frac{2}{3};2\right)$

$\frac{8}{6}$ $\frac{2}{3}$ $\qquad \frac{51}{36}$

$\frac{-6(3x-2)-(8-6x)\cdot 3}{(3x-7)^2} = \frac{-18x+12-24+18x}{(3x-2)^2} = -\frac{12}{(3x-2)^2}$

$\frac{18\cdot 4}{9} - \frac{51\cdot 2}{3} + 28$

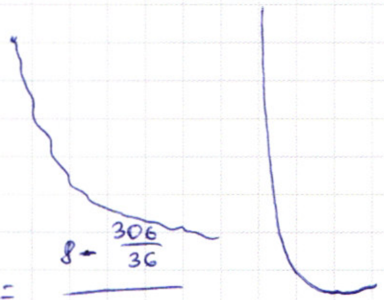
$8-34+28=2$ - max

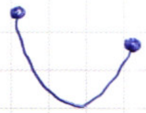
$\frac{8-12}{}$ $\qquad \frac{8-\cancel{6}\frac{2}{3}}{}$

$18\cdot 4-51\cdot 2+28$

$72-102+28 \qquad -2$

$\frac{8-12}{4}=-1$





$36x-51$

$\frac{8-6\cdot\frac{51}{36}}{3\cdot\frac{51}{36}-2} = \frac{8-\frac{306}{36}}{\frac{153}{36}-2}$

$18\cdot\left(\frac{51}{36}\right)^2-\frac{51^2}{36}+28$

$\frac{\frac{288-306}{36}}{\frac{153-72}{36}} = -\frac{18}{81} = -\frac{2}{9}$

$\frac{51^2}{36\cdot 2}-\frac{51^2}{36}+28$

$6 \cdot 28 \cdot 8 = 224$

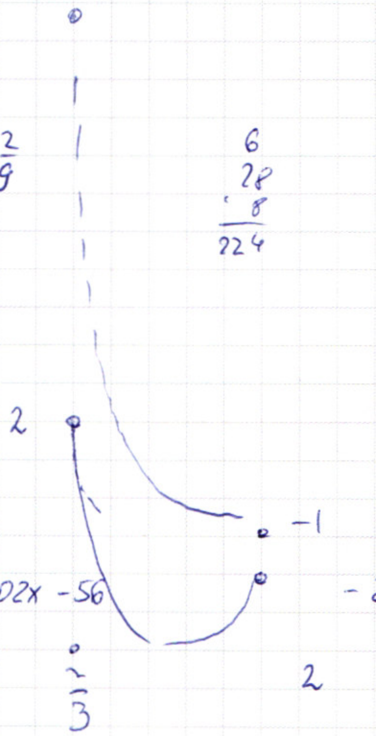
$\frac{17^2}{8}-\frac{17^2}{4}+28$

$-\frac{12}{(3x-2)^2} > 36x-51$

$\frac{-289+28\cdot 8}{8}$

$-12 > (9x^2-12x+4)(36x-51)$

$-\frac{65}{8}$



$\frac{8-6x}{3x-2} = 18x^2-51x+28$

$51\cdot 51 = 51 + 255 = 2601 \qquad \cdot 18$

$8-6x = 54x^3-153x^2+84x-36x^2+102x-56$

$54x^3-189x^2+192x-64=0$

$\frac{54\cdot 8}{27}-\frac{189\cdot 4}{9}+\frac{192\cdot 2}{3}-64 \qquad f(2)>$

$16-21\cdot 4+64\cdot 2-64$

$16+64$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$  $x\in(0;26)$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}$ $\cancel{+26x >}$

$+(26x-x^2)-13^{\log_5(26x-x^2)}$

$13 = 5^{\log_5 13}$ $\cdot\log_5(26x-x^2)$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2) \geqslant \cancel{2x}\,(26x-x^2)^{\log_5 13}$

log

$(26x-x^2)\left((26x-x^2)^{\log_5 12-1}+1\right)$

$* \; 26x-x^2=1$

$x^2-26x+1=0$

$a^{\log_5 12}+a^{\log_5 5}\geqslant a^{\log_5 13}$  $a>0$  $a>1$

$\cancel{\log_a(a^{\log_5 12}+a)\geqslant \log}$

$\cancel{y^2-36x+}$  $y^2-12xy+36x^2$

$6-3\sqrt{10-\frac{18}{5}}$

$6-3\sqrt{\frac{32}{5}}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)\geqslant(26x-x^2)^{\log_5 13}$

$\cancel{26x-x}$  $a^{\log_5 12-1}+1\geqslant a^{\log_5 13-1}$

$a^{\log_5\frac{12}{5}}+1\geqslant a^{\log_5\frac{13}{5}}$

$(26x-x^2)\geqslant 13^{\log_5(26x-x^2)}-12^{\log_5(26x-x^2)}$

8  $y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$  $2(y-6x)^2$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$3^2(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$(3(x-1)+(y-6))^2=90+2(y-6x)^2$

$(3x+y-9)^2=90+2y^2-24xy+72x^2$

$9x^2+y^2+81+6xy-54x-18y+\cancel{\ }=90+2y^2-24xy+72x^2$

$63x^2-30xy+y^2+54x+18y+9=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$= x(y-6)-(y-6)$

$\cancel{y-6x}$

$\cancel{3x+3}$ $(3x-3)^2+(y-6)^2=90=(3\sqrt{10})^2$

$(y-6x)^2=(y-6)(x-1)$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=45+45$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$y-6x>0$

$y>6x$

$\begin{cases} y>6 \\ x>1 \end{cases}$ $\begin{cases} y<6 \\ x<1 \end{cases}$

$y^2-13xy+36x^2+6x+y-6=0$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$, $t = 2\alpha+2\beta$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ - ?

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\cos t=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin t\cos 2\beta+\cos t\sin 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}+\frac{1}{17}\pm\frac{16}{17}$

$\sin 2\alpha=$

$\left(3\cdot 3\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$

$\frac{162}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cos 2\beta$

$\frac{2x}{AD}=\frac{\frac{AD}{2}}{\frac{26}{25}x}$ 9

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)=-\frac{2}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta=-\frac{1}{17}$

$\cancel{\cos t}$ $\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\Rightarrow \sin 2\beta=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$tg2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

$-\cos 2\beta\pm 4\sin 2\beta+\sqrt{17}\sin 2\alpha=-\frac{2}{\sqrt{17}}$

$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\pm\frac{16}{\sqrt{17}}+\sqrt{17}\sin 2\alpha=-\frac{2}{\sqrt{17}}$

$tg2\alpha-2tg\alpha-tg2\alpha\cdot tg^2\alpha=0$

$\sqrt{17}\sin 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\pm\frac{16}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\alpha=0$ $tg\alpha=\pm 1$

$\sin 2\alpha=\frac{-1\pm 16}{17}$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha=-1 \\ \sin 2\alpha=\frac{15}{17} \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)