МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \Rightarrow 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{17} \\ \sin 2\alpha+2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases} \Rightarrow \cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{17} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{\frac{17}{17}-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

Предположим, $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

Тогда:

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}}+\frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha+4\cos 2\alpha = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+4\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -1 \quad \Big| \Rightarrow 2\operatorname{tg}\alpha+4-4\operatorname{tg}^2\alpha = -1-\operatorname{tg}^2\alpha \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1>0$$

$$\Rightarrow 3\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha-5=0$$

$$D = 4+15\cdot 4 = 64 = 8^2$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\pm\sqrt{8^2}}{2\cdot 3} = \frac{1\pm 4}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = -1 \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Предположим, $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

Тогда:

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sin 2\cancel{\beta}\alpha}{\sqrt{17}} - \frac{4\cos 2\cancel{\beta}\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta - 4\cos 2\beta = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2 tg\alpha}{1+tg^2\alpha} - 4\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1 \Rightarrow 2tg\alpha - 4 + 4tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$

$D = 4 + 15 \cdot 4 = 64 = 8^2$

$tg\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{8^2}}{10} \Rightarrow tg\alpha = \frac{-1 \pm 4}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = 0{,}6 \end{array}\right.$

Ответ: $-1; 0{,}6; \frac{5}{3}$.

№ 2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \Rightarrow y-6-6(x-1)=\sqrt{x(y-6)-(y-6)} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \Rightarrow 9x^2-18x+9+y^2-12y+36=45+36+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $x-1=u$; $y-6=v$

Тогда:

$$\begin{cases} v-6u=\sqrt{uv} \\ 9u^2+v^2=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v-6u\geqslant 0 \Rightarrow v\geqslant 6u \\ v^2-12uv+36u^2=uv \end{cases}$$

$$\begin{cases} v\geqslant 6u \\ v^2-13uv+36u^2=0 \Rightarrow v^2-9uv-4uv+36u^2=0 \Rightarrow v(v-9u)-4u(v-9u)=0 \\ 9u^2+v^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v\geqslant 6u \\ (v-4u)(v-9u)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} v=4u \\ v=9u \end{array}\right. \\ 9u^2+v^2=90 \end{cases}$$

Подставим $v=9u$:

$$\begin{cases} \cancel{4u\geqslant 6u \Rightarrow u\leqslant 0} \\ \cancel{9u^2+16u^2=90 \Rightarrow 25u^2=90 \Rightarrow u=-3\sqrt{\frac{10}{73}}} \end{cases} \Rightarrow u=-3\sqrt{\frac{10}{73}}$$

$\Rightarrow u^2=\frac{9}{25}\cdot 10 \Rightarrow \frac{3}{5}\sqrt{10}$

~~Подставим $v=9u$:~~

~~$9u\geqslant 6u \Rightarrow u\geqslant 0$~~

~~$9u^2+99u^2=90 \Rightarrow 10u^2=10$~~

$$\begin{cases} 9u\geqslant 6u \Rightarrow u\geqslant 0 \\ 9u^2+9\cdot 9u^2=90 \Rightarrow u^2+9u^2=10 \Rightarrow u^2=1 \Rightarrow u=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow u=1 \Rightarrow v=9$

Подставим $v=4u$:

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$13^{\log_5 t} - 12^{\log_5 t} \le t$

$13^{\log_5 t} \le t + 12^{\log_5 t}$

$y - 6x = \sqrt{(y-6)(x-1)}$

Пусть $y-6=u$; $x-1=v$

Тогда:

$u - 6v = y - 6 - 6x + 6 = y - 6x$

$9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 90$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$uv > 0$

$u \ge 6v$

$\begin{cases} u - 6v = \sqrt{uv} \Rightarrow u^2 - 12uv + 36v^2 = uv \Rightarrow u^2 - 13uv + 36v^2 = 0 \\ 9v^2 + u^2 = 90 \Rightarrow u^2 = 90 - 9v^2 \Rightarrow u = \pm 3\sqrt{10 - v^2} \end{cases}$

$\Rightarrow$

$D = 169v^2 - 144v^2 = 25v^2$

$u = \frac{13v \pm 5v}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = 9v \\ u = 4v \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 4u \geq 6u \Rightarrow u \leq 0 \\ 9u^2 + 16u^2 = 90 \Rightarrow 25u^2 = 90 \Rightarrow 5u^2 = 18 \Rightarrow u^2 = 9 \cdot \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u \leq 0 \\ u = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \Rightarrow u = -3\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow v = -12\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$x - 1 = u \Rightarrow x = u + 1$

$y - 6 = v \Rightarrow y = v + 6$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 + 1 = 2 \\ y = 9 + 6 = 15 \end{cases} \text{ при } u = 1;\ v = 9 \\ \begin{cases} x = 1 - 3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y = 6 - 12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \text{ при } u = -3\sqrt{\frac{2}{5}};\ v = -12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{array} \right.$$

Ответ: $(2; 15)$, $\left(1 - 3\sqrt{\frac{2}{5}}; 6 - 12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

ОДЗ:

$26x-x^2>0$

Пусть $t=26x-x^2$

Тогда: Из ОДЗ: $26x-x^2>0 \Rightarrow t>0$

~~$|-t|^{\log_5 12}+26x$~~

~~$26x$~~

$\left.\begin{array}{l}|-t|^{\log_5 12}+t \geqslant 13^{\log_5 t} \\ t>0\end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow t^{\log_5 12}+t \geqslant 13^{\log_5 t} \Rightarrow t^{\log_5 12}+t \geqslant t^{\log_5 13} \Rightarrow$

$\Rightarrow t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13} \geqslant 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}t(1+t^{\log_5 12-1}-t^{\log_5 13-1}) \geqslant 0 \\ t>0\end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+t^{\log_5 \frac{12}{5}}-t^{\log_5 \frac{13}{5}} \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t^{\log_5 \frac{13}{5}}-t^{\log_5 \frac{12}{5}} \leqslant 1 \Rightarrow \left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t}-\left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t} \leqslant 1$

При $t \in (0;1)$:

$t^{\log_5 \frac{13}{5}} < t^{\log_5 \frac{12}{5}}$, $\left.\begin{array}{l}\text{т.к. } t<1 \\ \frac{13}{5}>\frac{12}{5}\end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow t^{\log_5 \frac{13}{5}}-t^{\log_5 \frac{12}{5}}<0 \Rightarrow t^{\log_5 \frac{13}{5}}-t^{\log_5 \frac{12}{5}} \leqslant 1 \Rightarrow$ нер-во выполняется для $t \in (0;1)$

При $t=1$: $1^{\log_5 \frac{13}{5}}-1^{\log_5 \frac{12}{5}}=1-1=0 \leqslant 1 \Rightarrow$ нер-во выполняется при $t=1$.

При $t>1$:

$$\left(\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t}\right)' > \left(\left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t}\right)' \Rightarrow \left(\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t} - \left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t}\right)' > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t} - \left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t}$ ~~воз монотон~~ возрастает

на $t \in (1;+\infty) \Rightarrow \left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t} - \left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t} = 1$ имеет лишь

1 решение.

Подставим $t=25$:

$\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 25} - \left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 25} = \frac{169}{25} - \frac{144}{25} = \frac{25}{25} = 1 \Rightarrow$ единств.

решение $-$ 25. $\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t} - \left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t} < 1$ $\quad \left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t} - \left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t} > 1$

25 $\quad t$

$t \le 25$

$t \in (0;1) \cup \{1\} \cup (1;25) \Rightarrow 0 < t \le 25$

$$\begin{cases} t > 0 \Rightarrow 26x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 26x < 0 \Rightarrow x(x-26) < 0 \\ t \le 25 \Rightarrow 26x - x^2 \le 25 \Rightarrow x^2 - 26x + 25 \ge 0 \end{cases}$$

0 $\quad$ 26

$$\begin{cases} x \in (0;26) \\ x^2 - 25x - x + 25 \ge 0 \Rightarrow (x-1)(x-25) \ge 0 \end{cases}$$

1 $\quad$ 25

$x \in (0;1] \cup [25;26)$

Ответ: $x \in (0;1] \cup [25;26)$.

черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№6

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

Пусть $f(x)=18x^2-51x+28$ - парабола

$g(x)=ax+b$ - прямая

$h(x)=\frac{8-6x}{3x-2}$ - гипербола

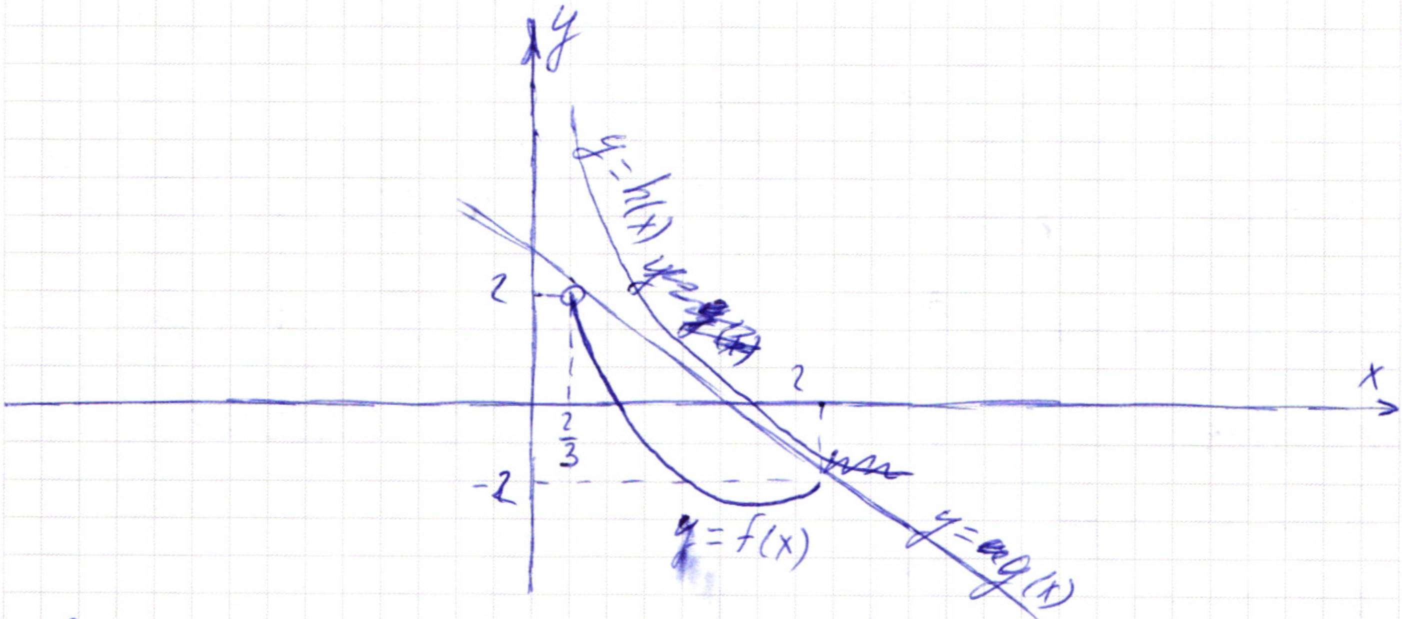
Тогда:

$h(x) \geq g(x) \geq f(x)$

$f(\frac{2}{3})=18\cdot\frac{4}{9}-51\cdot\frac{2}{3}+28= 8+28-34=2$

$f(2)=18\cdot 4-51\cdot 2+28=72+28-102=-2$

$h(x)=\frac{8-6x}{3x-2}=-\frac{6x-4-4}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}$



$f(x) \leq g(x)$ при любом $x \in (\frac{2}{3}; 2] \Rightarrow$

$\Rightarrow y=f(x)$ находится полностью не выше $g(x)$

$y=f(x)$ - выпуклая функция $\Rightarrow$ если $y=g(x)$ проходит через 2 точки $y=f(x)$, то она больше не проходит через $y=f(x)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{6x-4-4}{3x-2}$

$D = 2601 - 504 = 2097 = 9 \cdot 233$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$ $\qquad x = \frac{51 \pm 3\sqrt{233}}{18}$

Подставим $x = \frac{4}{3}$:

$0 \geqslant \frac{4}{3}a + b \geqslant 18 \cdot \frac{16}{9} - 51 \cdot \frac{4}{3} + 28$

$0 \geqslant \frac{4}{3}a + b \geqslant 32 - 68 + 28$

$0 \geqslant \frac{4}{3}a + b \geqslant -8$

$\frac{51}{2 \cdot 18} = \frac{17}{12}$

$-2 + \frac{4}{3x-2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$

$\qquad \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$

$\quad g(x) \qquad h(x) \qquad f(x)$

$f\left(\frac{17}{12}\right) = 18 \cdot \frac{17^2}{2^2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2} - 51 \cdot \frac{17}{3 \cdot 4} + 28 =$

$= \frac{17^2}{8} - \frac{17^2}{4} + 28 = \cancel{28}$

$= 28 - \frac{17^2}{8} = \frac{224 - 189}{}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 18 \cdot \frac{4}{9} - 51 \cdot \frac{2}{3} + 28 =$

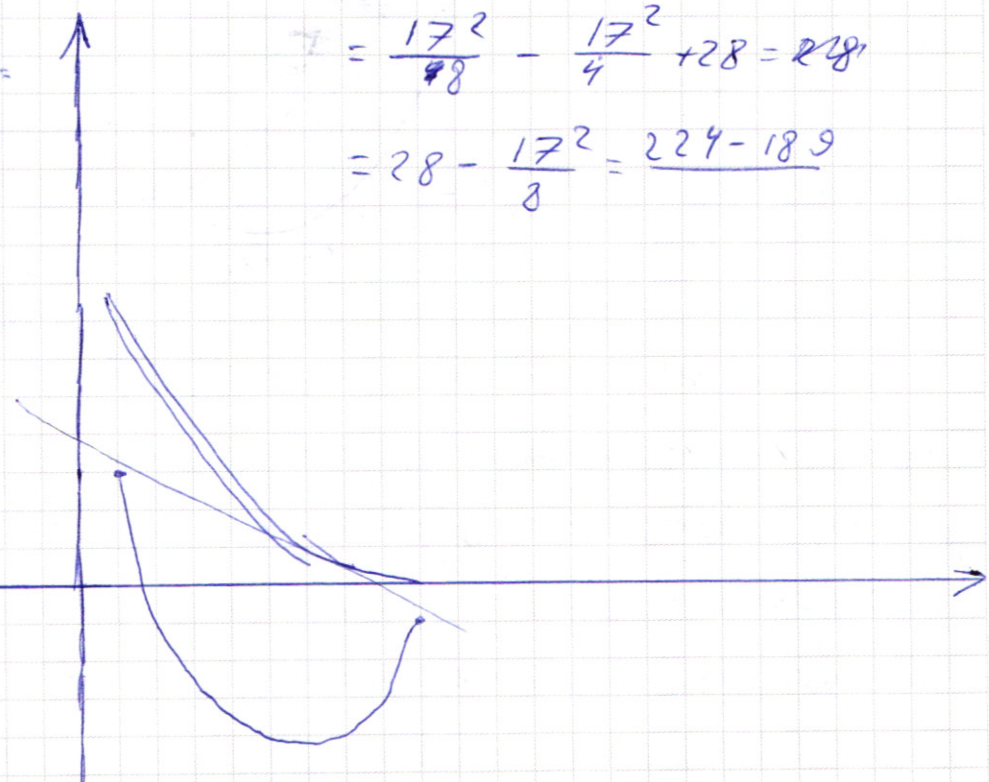
$= 8 - 34 + 28 = 2$

$f(2) = 18 \cdot 4 - 51 \cdot 2 + 28 =$

$= 72 + 28 - 102 =$

$= -2$

$g\left(\frac{2}{3}\right) =$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Отсюда

Найдём самую „нижнюю" прямую $y=g(x)$.
Она будет проходить через $(\frac{2}{3};2)$ и $(2;-2)$

$$\begin{cases} 2=\frac{2}{3}a+b \\ -2=2a+b \end{cases} \Rightarrow -4=\frac{4}{3}a \Rightarrow a=\cancel{\frac{3}{2}}-3$$

$$\cancel{2=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}+b\Rightarrow b=1}$$

$$-2=-2\cdot 3+b \Rightarrow b=4 \Rightarrow y=-3x+4$$

Рассмотрим пересечения этой прямой с гиперболой $y=h(x)$ (если они есть)

$$\begin{cases} y=\frac{8-6x}{3x-2} \\ y=-3x+4 \end{cases} \Rightarrow \frac{8-6x}{3x-2}=-3x+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\frac{3x-4}{3x-2}=3x-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(3x-4)=(3x-4)(3x-2) \Rightarrow$$

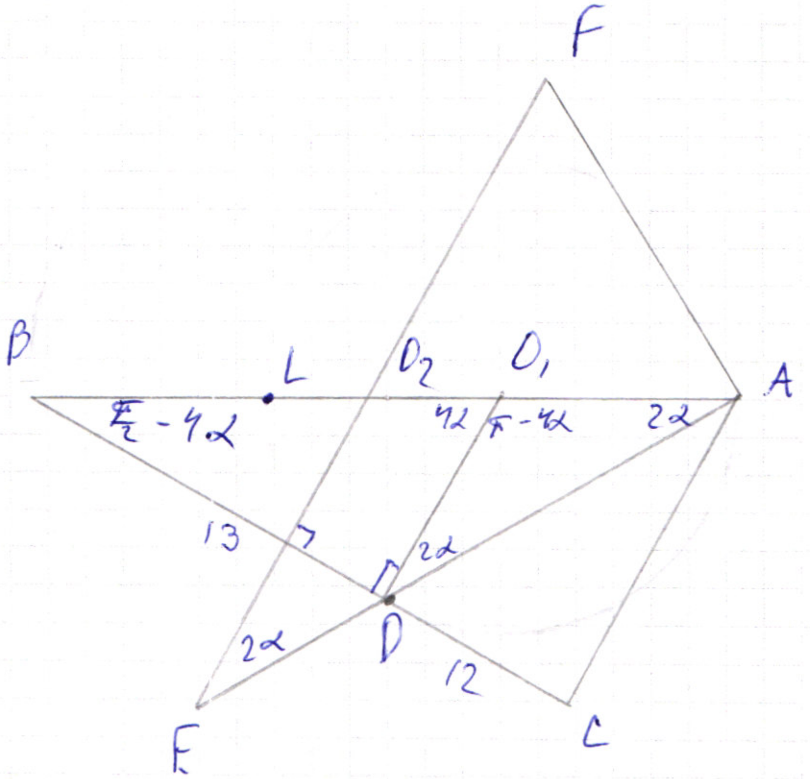
$$\Rightarrow (3x-4)(3x-2-2)=0 \Rightarrow (3x-4)^2=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y=g(x)$ и $y=h(x)$ касаются в т. $\frac{4}{3}$. $y=g(x)$ не выше $y=h(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow y=-3x+4$ — единственная возможная прямая. $\Rightarrow (-3;4)$ — ед. возможная пара $(a;b)$.

Ответ: $(-3;4)$

№4



Пусть $\angle BAD = 2\alpha$

Тогда:

$\angle O_1AD = 2\alpha$

$\angle O_1DA = 2\alpha$, т.к. $\triangle DO_1A$ – р/б, т.к $DO_1 = O_1A$ (радиусы)

$\angle BO_1D = 2\angle O_1AD$ (~~вписанн~~ центр. и опир. на дугу) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DO_1D = 4\alpha$

$\angle DBO_1 = \frac{\pi}{2} - 4\alpha$ (из суммы углов $\triangle$-ка)

$\left.\begin{array}{l} EF \perp BD \\ O_1D \perp BD \end{array}\right| \Rightarrow EF \parallel O_1D \Rightarrow \angle FED = \angle O_1ADA = 2\alpha$

~~$\frac{BD}{DC}$~~ $\Rightarrow BD^2 = BL \cdot BA \Rightarrow BL \cdot LA = 169$ (св-во сек. и кас.)

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 9

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~#1~~

$18x^2-51x+28$

$D=\cancel{2251}\ \cancel{2704}\ \cancel{2701}$

$2601-2016=$

$=2600-15=$

$=585=5\cdot117=5\cdot3\cdot39$

~~270 | 51~~

~~2701 | 51~~

$2601 \,|\, 51$
$-255 \;\; 51$
51

$28 \times 18 = 224 + 28\_ = 504$

$\cancel{\sin(2\alpha+\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}}$ $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)=-\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-\frac{1}{17}=-\sin^2(2\alpha+2\beta)$

$\cancel{\frac{1}{17}\cos2\beta=-\frac{1}{17}\Rightarrow\cos2\beta=1\Rightarrow\sin2\beta=0}$

$\cos2\beta=-\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{+1}{\sqrt{17}}$

$\sin2\beta=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin2\beta=\frac{-4}{\sqrt{17}}$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}\Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{\sin2\alpha+4\sin2\alpha\ 4\cos2\alpha=-1}$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\,tg\alpha\cos^2\alpha=$

$=2\frac{tg\alpha}{1+ctg^2\alpha}$ $\quad tg^2\alpha=\frac{\sin^2}{\cos^2}=\frac{1}{\cos^2}-1\Rightarrow$

$\Rightarrow\cos^2=\frac{1}{1+tg^2}$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha(1-tg^2\alpha)=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$-\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = 1$

$\frac{-2\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha} + 4\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = 1$

$-2tg\alpha + 4 - 4tg^2\alpha = 1 + tg^2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$

$D = 4+60 = 64 = 8^2$

$tg\alpha = \frac{-2\pm 8}{10} \Rightarrow tg\alpha = -1;\ tg\alpha = +0,6$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = 1$

$\frac{2tg\alpha}{1+tg\alpha} - 4\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = 1$

$2tg\alpha - 4 + 4tg^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 5 = 0$

$D = 4 + 60 = 64$

$tg\alpha = \frac{-2\pm 8}{6} \Rightarrow tg\alpha = 1;\ tg\alpha = -\frac{5}{3}$ Ответ: $-\frac{5}{3}; 1; -0,6$

$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} & (1) \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 & (2) \end{cases}$

$(2): 9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 90$

$(3x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$(1)\ y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \Rightarrow y - 6x = \sqrt{y(x-1) - 6(x-1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 6x = \sqrt{x-1}\sqrt{y-6}$

$\cancel{(x-1)(y-6)}$

$\cancel{(y-6)}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geq x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}$

ОДЗ: $26x-x^2>0 \Rightarrow x(x-26)<0$ 0 26

Пусть $t = \cancel{x^2-26x}\ 26x-x^2$

Тогда: $|t| = +t$

$\cancel{(-t)^{\log_5 12}} \geq t$

$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$ $\qquad t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$

$t(1+t^{\log_5 12-1}-t^{\log_5 13-1}) \geq 0$

$\cancel{12^{\log_5 t}+t \geq 13^{\log_5 t}}$ $\qquad 1+\cancel{lo}t^{\log_5 12}$

$\cancel{3^{\log_5 t}\cdot 4^{\log_5 t}-13^{\log_5 t}+t \geq 0}$

$\cancel{3^{\log_5 t}\cdot(4^{\log_5 t}-1)+t \geq 0}$

$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$

$-t^{\log_5 12}+t^{\log_5 13} \leq t$

$t \geq t^{\log_5 13}(1-\cancel{\log_5} t^{\log_5 12-\log_5 13})$

$-t^{\log_5 12-1}+\cancel{lg}\,t^{\log_5 13-1} \leq 1$

$t^{\log_5 2,6}-\cancel{10}\,t^{\log_5 2,7} \leq 1$

$\left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t}-\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t} \geq -1$

$\frac{144}{25}-\frac{169}{25} \geq -1 \Rightarrow -1 \geq -1$

$$\begin{array}{r} \times\, 51 \\ 51 \\ \hline 51 \\ 255 \\ \hline 2601 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 18 \\ 28 \\ \hline 144 \\ 36 \\ \hline 504 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 28 \\ 8 \\ \hline 64 \\ 16 \\ \hline 224 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 189 \end{array}$$