МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

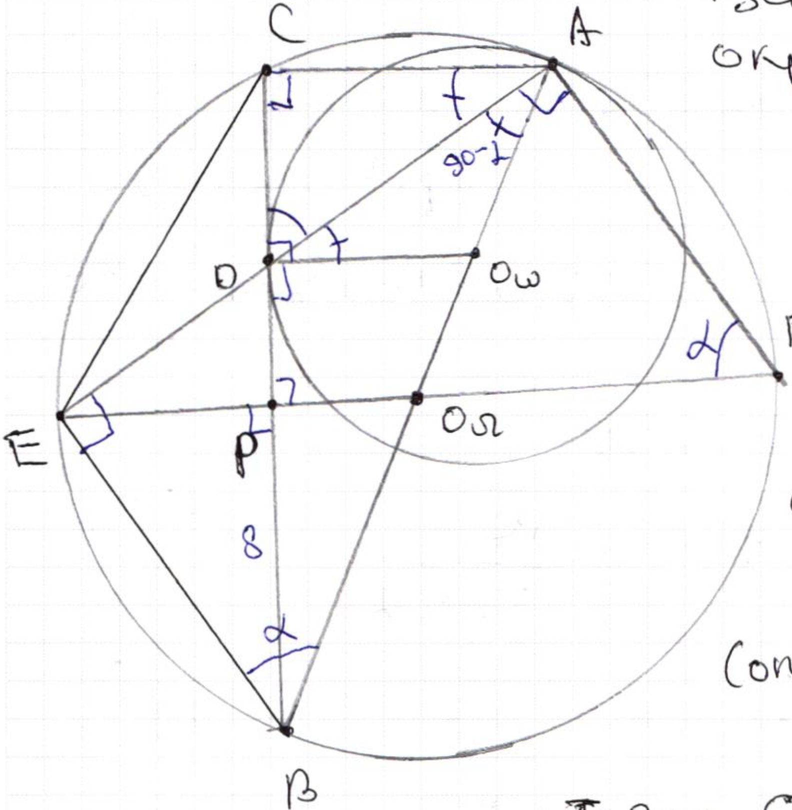
$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 4



Пусть O_ω, O_Ω - центры окружностей ω и Ω соответственно.
Пусть $\angle EAB = 90^\circ - \alpha$ тогда $\angle ADO_\omega = 90^\circ - \alpha$
Так как CB касается ~~Ом~~ ω в точке D то $O_\omega D \perp BC \Rightarrow$
$\angle ADC = \alpha$, $\angle BCA = 90^\circ$ (опирается на диаметр) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle CAE = 90 - \alpha$, тогда $CE = EP$ пусть EF пересекает отрезок BC в точке P тогда в силу того что $EP \perp BC$ $PB = PC$, тогда PF (прямая) средняя линия $\triangle ABC$ (${PF \parallel CA}$) $\Rightarrow$ PF пересекает AB в её середине то есть в точке O_Ω.

$BC = \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = 16 \Rightarrow PB = 8$. $\angle EAF = 90^\circ$

$\angle AEO_\Omega = 90 - \alpha \Rightarrow \angle EFA = \alpha$

по Th синусов ($\triangle ABC$): $\frac{16}{\sin(\pi - 2\alpha)} = 2R$

где R - радиус Ω и r радиус ω.

То есть $R = \frac{8}{\sin 2\alpha}$, $\angle DO_\omega A = 2\alpha$

$\triangle DCA$:

$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha = \frac{DC}{AD} = \frac{15}{2AD}$

по $\triangle$ косинусов: $(\triangle DAO_\omega)$

$AD^2 = r^2 + r^2 - 2\cos 2\alpha \cdot r^2 = 2r^2(1-\cos 2\alpha)$

$\cos^2\alpha = \frac{225}{4AD^2}$ $\cos^2\alpha = \frac{225}{8r^2(1-\cos 2\alpha)}$

$\cos^2\alpha = \frac{225}{8r^2 \cdot 2\sin^2\alpha} = 16\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha \cdot r^2 = 225$

$4 \cdot 4\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha \cdot r^2 = 225$

$4r^2 = \frac{225}{\sin^2 2\alpha} \Rightarrow 2r = \frac{15}{\sin 2\alpha}$

$(|\sin 2\alpha| = \sin 2\alpha$ так как $2\alpha \in (0; \pi))$

$r = \frac{15}{2\sin 2\alpha}$ ~~так как $CA \parallel DO_\omega$ того~~

~~Th. о ...: $\frac{BD}{BD} = \frac{AO_\omega}{BO_\omega} \Rightarrow \frac{15}{17} = \frac{r}{2R-r}$~~

~~$30R - 15r = 17r$~~

~~$15R = 16r$ $\frac{8 \cdot 15}{\sin 2\alpha} = \frac{16 \cdot 15}{2 \cdot \sin 2\alpha}$~~

$PD = \frac{1}{2}$ Тогда $PE^2 = 8 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow PE = 2$

$BP \cdot PC = FP \cdot PE$

$64 = FP \cdot 2$ $FP = 32$

$\Rightarrow 2R = 34$ $R = 17 = \frac{8}{\sin 2\alpha}$ $\sin 2\alpha = \frac{8}{17}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$r = \frac{15}{2\cdot\frac{8}{17}} = \frac{15\cdot 17}{16}$$

$$\sin\angle PEC = \sin\alpha = \frac{8}{\sqrt{8^2+2^2}} = \frac{8}{\sqrt{68}}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{8}{\sqrt{68}}\right)$$

для $\triangle AEF$:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{68}}$$

$$\cos\alpha = \frac{AF}{FE} = \frac{AF}{34}$$

$$AF = 34\cos\alpha \quad S_{\triangle AEF} = \frac{AF\cdot FE\cdot\sin\alpha}{2} =$$

$$= \frac{34\cos\alpha\cdot 34\cdot\sin\alpha}{2} = \cancel{34^2\cdot 4\cos} =$$

$$= 17^2\cdot\sin 2\alpha = 17\cdot 8 = 136$$

Ответ: радиусы: $R = 17$

$$r = \frac{15\cdot 17}{16}$$

$S_{AEF} = 136$ $\quad \angle AFE = \arcsin\left(\frac{8}{\sqrt{68}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Пусть $b = 2\alpha + 2\beta$
$a = 2\alpha$

$$\begin{cases} \sin b = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2b-a) + \sin a = -\frac{2}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin b = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin b \cos(b-a) = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin b = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos(b-a) = \frac{1}{\sqrt5} \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi k \\ b = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi t \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b - a = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi m \\ b - a = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi l \end{array}\right. \end{cases}$$

где: $k, t, m, l \in \mathbb{Z}$

$\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)$ тогда:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = 2\pi k - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) \quad (1) \\ b = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi t \quad (2) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b - a = g + 2\pi m \quad (3) \\ b - a = -g + 2\pi l \quad (4) \end{array}\right. \end{cases}$$

Пусть $f = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)$
$g = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)$

Тождество $f + g = \frac{\pi}{2}$

Найдём a: возможны 4 случая:

1) ~~сложим~~ вычтем (3) из (1):
$a = 2\pi k - f - g - 2\pi m = 2\pi(k-m) - \frac{\pi}{2}$

2) вычтем (3) из (2):
$a = \pi + f + 2\pi t - g - 2\pi m = 2\pi(t-m) + \pi + f - g$

3) вычтем (4) из (2):

$a = \pi + f + 2\pi t + g - 2\pi e = \frac{3\pi}{2} + 2\pi(t-e)$

4) вычтем (4) из (1)

$a = 2\pi k - f + g - 2\pi e = 2\pi(k-e) + g - f$

Тогда 1) $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi(k-m)$

2) $\alpha = \pi(k-m) + \frac{3\pi}{4} - g$

3) $\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi(t-e)$

4) $\alpha = \pi(k-e) + g - \frac{\pi}{4}$

Так как $f - g = \frac{\pi}{2} - 2g$ и $g - f = 2g - \frac{\pi}{2}$

Тогда 1) $tg\,\alpha = tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$

2) $tg\alpha = tg\left(\frac{3\pi}{4} - g\right) = \frac{1}{3}$ или 3

3) $tg\alpha = tg\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

4) $tg\alpha = tg\left(g - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$ или 3

$tg\left(g - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg g - 1}{1 + tg g}$ $\quad tg(g) = \frac{\sin g}{\cos g} = \frac{\sin g}{\frac{1}{\sqrt{5}}}$

Возможны 2 случая: 1) $\sin g \geq 0$

2) $\sin g \leq 0$

1): ~~tg g~~ $\sin(g) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow tg(g) = 2 \quad tg\left(g - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$

2) $\sin g = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow tg(g) = -2 \quad tg\left(g - \frac{\pi}{4}\right) = 3$

~~tg~~ заметим, что $tg\left(\frac{3\pi}{4} - g\right) = tg\left(\frac{\pi}{4} - g + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= ctg\left(g - \frac{\pi}{4}\right)$ тогда $tg\left(\frac{3\pi}{4} - g\right) = 3$ или $\frac{1}{3}$

Всего $tg\alpha = 1/3$ или 3 или -1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Так как из системы (первоначальной) следует что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ или 3 или -1 и в условии сказано что $\operatorname{tg}\alpha$ принимает как минимум ~~3~~ три значения то все эти значения достигаются.

Ответ: $\frac{1}{3}, 3, -1$

N3

ОДЗ: $10x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 10)$

Пусть $a = 10x - x^2$ тогда $|a| = a$ на ОДЗ.

$5^{\log_3 a} = a^{\log_3 5}$ ~~что~~ То есть:

$$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq (10x - x^2)^{\log_3 (10x - x^2)}$$

$a + a^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$ поделим на $a^{\log_3 4} > 0$

$$a^{\log_4 3} + 1 \geq a^{\log_4 5}$$

~~№2 $x^2+36y^2-12x-36y=45$~~

~~Заметим что при $a \in (0;1)$:~~

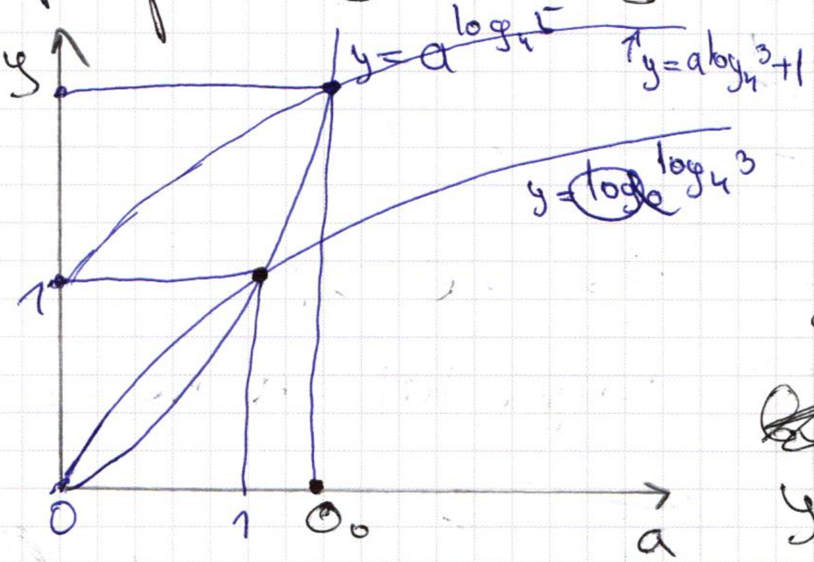
~~$a^{\log_4 5}$~~

~~график $y=a^{\log_4 5}$~~

$a^{\log_4 5}$ – монотонно возрастает как и $a^{\log_4 3}$

~~$a^{\log_4 5}$~~

график $a^{\log_4 5}=y$ и $y=a^{\log_4 3}$ на $a>0$



это верно так как $\log_4 5>1$ и $\log_4 3<1$ и оба – степенные функций

$y=a^{\log_4 3}+1$ –

– степенная функция причем с графиком $y=a^{\log_4 5}$ пересекается только 1 раз!

Пусть это точка $A(a_0, y_0)$ тогда ~~решение исход~~ исходное неравенство равносильно: $a \in (0; a_0]$

~~найдем a_0: $a^{\log_4 5}=a^{\log_4 3}+1$~~

$a^{\log_4 5}=a^{\log_4 3}+1$ $\quad a=9$

~~$9^{\log_4 5}=9^{\log_4 3}+1$~~ $\quad 9^{\log_4 5}=9^{\log_4 3}+1$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

домножим на $9^{\log_3 4}$

$9^{\log_4 5 \cdot \log_3 4} = 9^{\log_4 3 \cdot \log_3 4} + 9^{\log_3 4}$

$25 = 9 + 16$ – верно т.е $a_0 = 9$

т.е $a \in (0; 9]$

$0 < 10x - x^2 \le 9 \iff \begin{cases} x \in (0; 10) \\ -x^2 + 10x - 9 \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 10x + 9 \ge 0 \\ x \in (0; 10) \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty) \\ x \in (0; 10) \end{cases} \iff$

$x \in (0; 1] \cup [9; 10)$ пересечём с ОДЗ:

<u>Ответ:</u> $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

<u>№2</u> $\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$

$\iff$ (при $x \ge 12y$)

$\begin{cases} x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6 \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 26xy + 144y^2 + 12y + x - 6 = 0 \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y - 45 = 0 \end{cases}$

Заметим что $\sqrt{2xy-12y-x+6} =$

$\sqrt{(x-6)(2y-1)}$

Пусть $a = x-6$ $\quad b = 2y-1$

$x-12y = a-6b$

и $x^2+36y^2-12x-36y=45$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

т.е: $a^2+9b^2=90$

тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a^2+9b^2=90 \\ a-6b=\sqrt{ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+9b^2=90 \\ a^2-12ba+36b^2=ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+9b^2=90 \mid \cdot 4 \quad (1) \\ a^2-13ab+36b^2=0 \quad (2) \end{cases} \quad \begin{cases} a^2=90-9b^2 \\ 90+27b^2=13ab \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} -(1)+(2) = 27b^2-13ab=-90 \\ -4(1)+(2) = -3a^2-13ab=-360 \end{cases}}$$

$$\cancel{\begin{cases} a=\frac{90+27b^2}{13b} \\ a^2=90-9b^2 \end{cases}} \quad \cancel{\begin{cases} a = 27b^2+3a^2=270 \end{cases}}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a^2 = 90 - 9b^2 \\ a^2 = 13ab - 36b^2 \end{cases}$$

1) $a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \quad : b^2 \neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\left(\frac{a}{b}\right) + 36 = 0$

$\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = 9;\ 4$

$\left(\frac{a}{b}\right) = 9$ или 4

2) $b = 0$ $\begin{cases} a^2 = 90 \\ a^2 = 0 \end{cases}$!? противоречие

1) $a = 9b$

$\cancel{81b^2}$ $90b^2 = 90 \Rightarrow b^2 = 1$

$$\begin{cases} 90b^2 = 90 \\ \cancel{81} - 9 \cdot 13b^2 + 36 = 0 \end{cases}$$

$\cancel{a^2 = 81}$

$a^2 = 81$

верно!

~~$9 \cdot 5 \neq 9 \cdot 13$ - противоречие~~

2) $a = 4b$

$$\begin{cases} 36b^2 + 9b^2 = 90 \Rightarrow b^2 = 2 \\ 32 - 13 \cdot 4 \cdot 2 + 36 \cdot 2 = 0 \text{ - верно} \end{cases}$$

$a^2 = 32$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Ответы: $(1; 9)$ $(-1; -9)$

$(-\sqrt{2}; -\sqrt{32})$ $(+\sqrt{2}; \sqrt{32})$

~~№~~ №6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -3\,2x^2+36-3$$

$\Rightarrow$

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le 32x^2+36x-3$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

~~$f(\frac{a}{b}) = f(a\cdot\frac{1}{b}) = f(a) + f(\frac{1}{b})$~~

Так как $x, y \in \mathbb{N}$ и $x, y \in [2; 25]$

то множителями x и y могут

быть только $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$.

(из простых чисел)

$f(a) = f(ab) - f(b)$

Замена $a = \frac{x}{y}$ $b = y$;

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

Пусть $x = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ где p_i - простое

$y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}$ число.

Тогда $f(\frac{x}{y}) = f(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}) - f(p_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}) =$

$= \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \ldots + \alpha_k f(p_k) - \beta_1 f(p_1) -$

$- \beta_2 f(p_2) - \ldots - \beta_k f(p_k)$

то есть: $f(p_1)(\alpha_1 - \beta_1) + \ldots + f(p_k)(\alpha_k - \beta_k)$

$f(x/y) < 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} f(p_j)(\alpha_j - \beta_j) < 0$

так ~~как~~ $\forall$ P - простого : $f(P) = [P/4] > 0$

Тогда $f(x|y) < 0 \Leftrightarrow$;

$$\sum_{j=1}^{5} (\alpha_j - \beta_j) < 0$$

~~Разберем случай: $x = p^k$ (p-простое) $y = p^m$~~

~~Тогда $f(x|y) < 0 \Leftrightarrow k < m$~~

~~$P = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$~~.

Заметим что максимальное количество ~~множ~~ различных множителей у ~~x, y~~ "x" и "y" при разложении на простые ~~~~ это "2"

так как : ~~$2 \cdot 3 < 25$ но~~ $2 \cdot 3 \cdot 5 > 25$

Пусть : ~~Тогда~~ $x = p^m \cdot q^n$ $y = s^k \cdot g^t$ p, q, s, g - простые

1) у x и y совпадают все множители ($p = s$, $q = g$)

$f(x|y) = (m-k)(n-t) < 0$

2) у x и y совпадают 1 множитель

~~$f(x|y) < 2$~~ ~~уж~~ не умоляя общности : $p = s$

~~$(m-k) n (-t) < 0$~~

3) у x и y не ~~с~~ совпадают элементы

$f(x|y) = (m-0)(n-0)(0-k)(0-t) < 0$

$m \cdot n \cdot k \cdot t < 0$ - не возможно

☑ черновик ☑ чистовик Страница №13

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$17r = 30R - 15r$

$32r = 30R$ $\boxed{16r = 15R}$

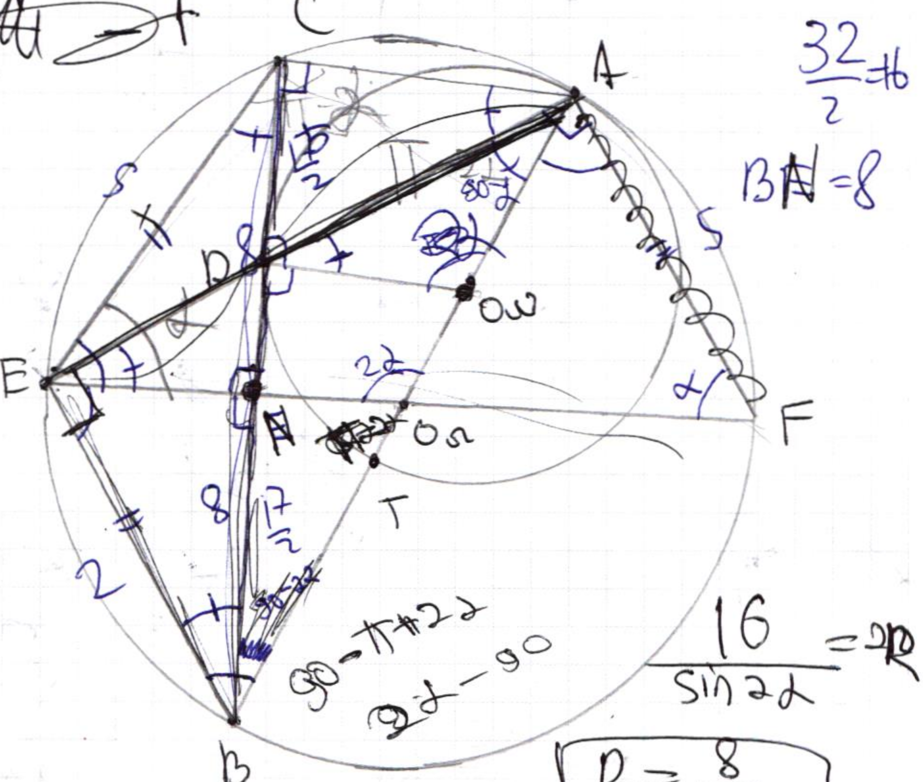
$ED \cdot EA = AE \cdot EF$

$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2r}{R-r} \\ xy = \frac{15 \cdot 17}{4} \end{cases}$ и $\frac{x}{x+y} = \frac{r}{R}$

$= 1 - \frac{y}{x+y}$

$\frac{R}{r} = 1 + \frac{y}{x}$

AE, AF



$\sin\alpha = \frac{8}{EC}$

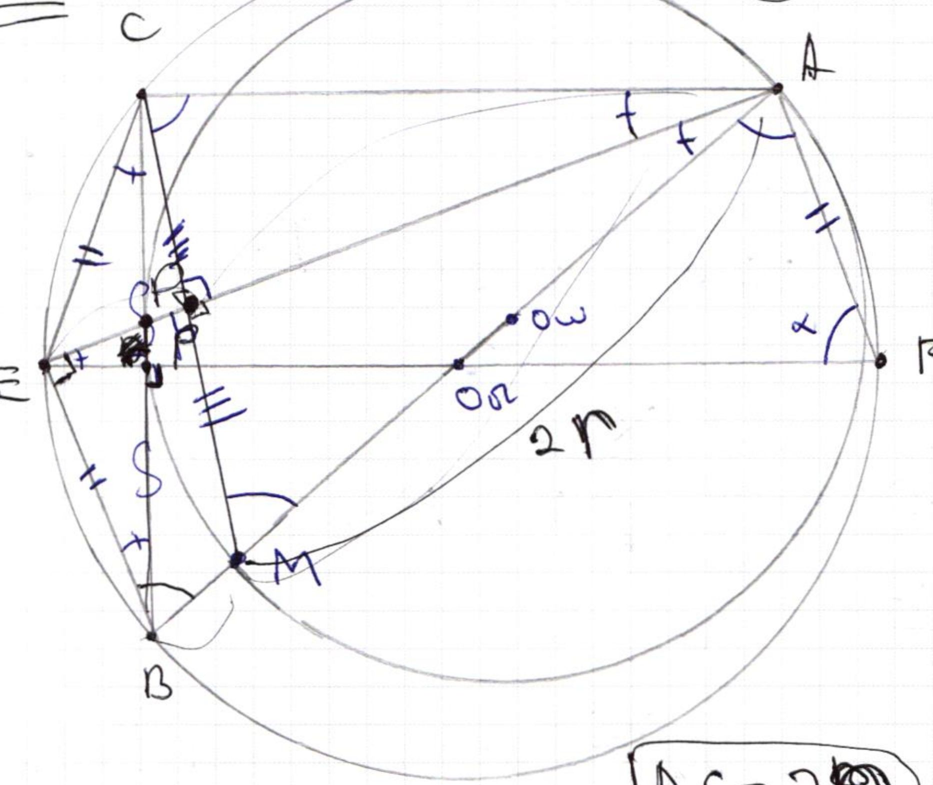
$\frac{16}{\sin 2\alpha} = 2R$

$\boxed{R = \frac{8}{\sin 2\alpha}}$

$50 - 25$

$a\ 25$

$10x - x^{2\,25}$



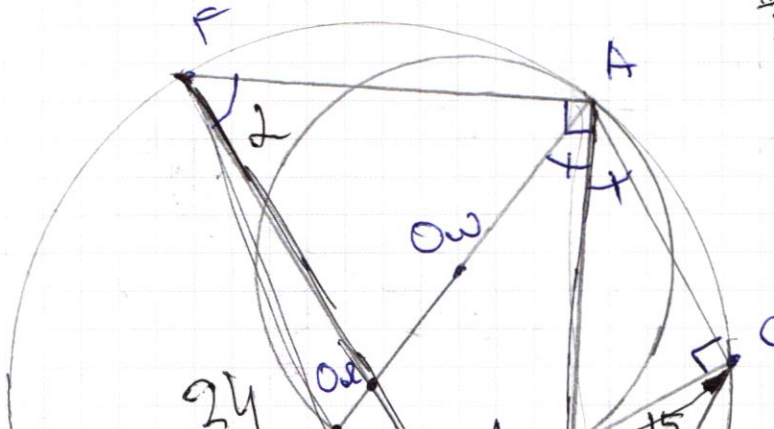
$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} \qquad \frac{15}{17} = \frac{2r}{2R}$$

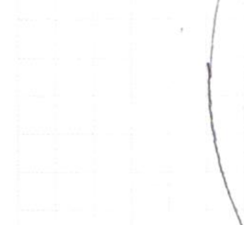
$\boxed{AC = 2r}$!!

$\frac{16}{2}$

$2 \cdot 3 \cdot 4$

40
16
56





2
1 → 4
3
1 → 2
5
1 – 2

16
32

$AD = 6.4$

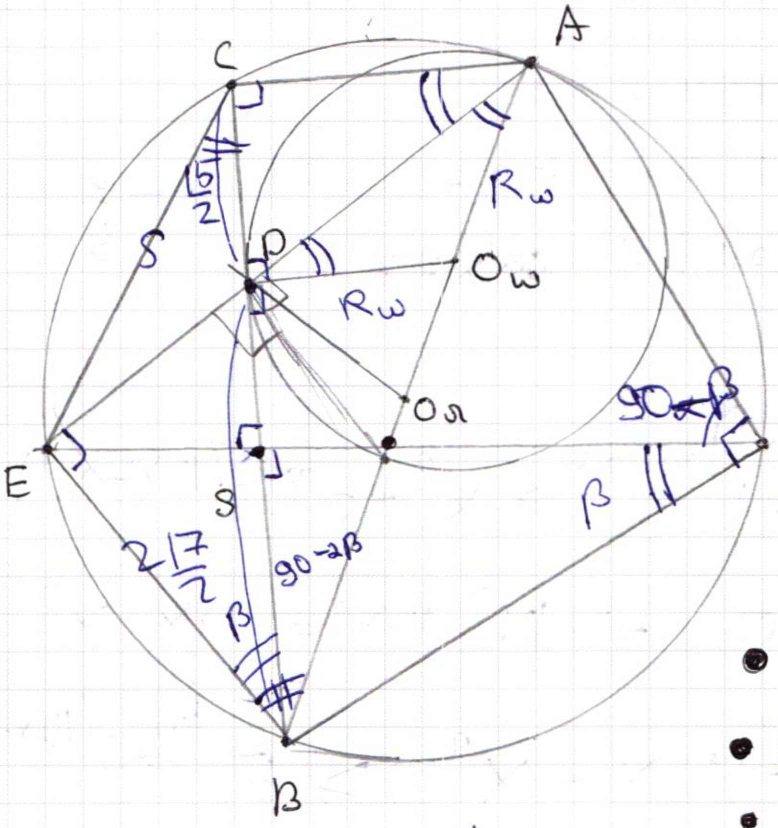
$$r = \frac{15}{2\sin 2\alpha} \qquad R = \frac{8}{\sin 2\alpha}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№4

AE – ?



Лемма архимеда

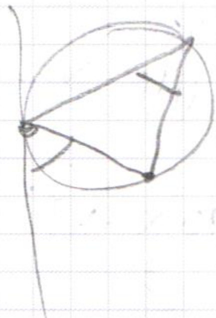
$90-\beta=\alpha$

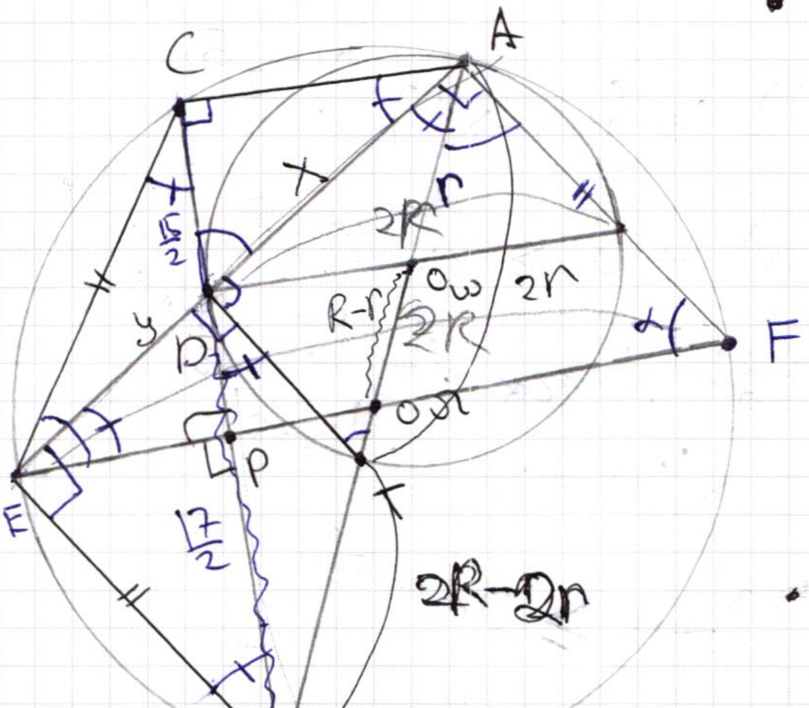
гип: $EF \ni O_\Omega$?

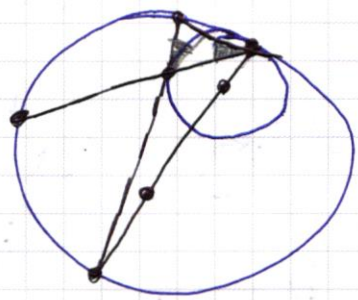
$AB \cap \omega$

использовали

- ~~Касание~~
- AE
- $BC \perp EF$







- $EF \parallel AC$
- Лемма Архимеда.

PF – сред линия
$\Rightarrow O_\Omega \in PF$

$$\left(\frac{15/2}{\sin 90-\alpha}\right)^2 = AP^2$$

$$\frac{r}{2R-r} = \frac{15}{17}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\gamma \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cos 2\gamma + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\gamma \cos 2\alpha \quad -\sin 2\alpha(1-\cos 2\gamma)$

№3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0 \Rightarrow |x^2-10x| = 10x - x^2$

$(10x-x^2)^{\log_3 4} + (10x-x^2) \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$(10x-x^2)^{\log_3 4} + (10x-x^2) \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$a = \cancel{\log} \quad a^{\log_3 4} + a \geq a^{\log_3 5}$

$\cancel{\log_3 4 = \log_3 (1+\log_3 \frac{4}{3})}$

$a \geq a^{\log_3 4} / a^{\log} \quad x^{\log_3 4} + x \geq x^{\log_3 5}$

$10x - x^2 = a \quad a^{\log_3 4} + a \geq a^{\log_3 5}$

$\cancel{(a^4)' = 4 \cdot a^4 \cdot \ln 4} \quad f(a) = a^{\log_3 5} - a^{\log_3 4} - a$

$4a^{4-1} \cdot a' \quad f'(a) = \log_3 5\, a^{\log_3 \frac{5}{3}} \cdot (10-2x)$

$a' = 10 - 2x$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{CD}{AD} = \cos\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{15}{2AD}$ № 2

$AD^2 = \frac{225}{4\cos^2\alpha}$

$AD^2 = 2r^2 - 2\cos 2\alpha\, r^2$

$\frac{225}{4\cos^2\alpha}$

$1 - 2\sin^2\alpha - 1 =$

$= -2\sin^2\alpha$

$2\sin^2\alpha$

$\frac{ED}{BD} = \cos\alpha$

$\cancel{ED = \frac{\cos\alpha \cdot 17}{2}}$

$\cancel{AD = \frac{15}{2\cos\alpha}}$

$AE = 2R \cdot \sin\alpha = \frac{16\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{8}{\cos\alpha}$

$2R\cos\alpha = \frac{AF}{2R} = 16 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= 8\sin 2\alpha$

$x = p_1 \dots p_k^{\alpha_k}$

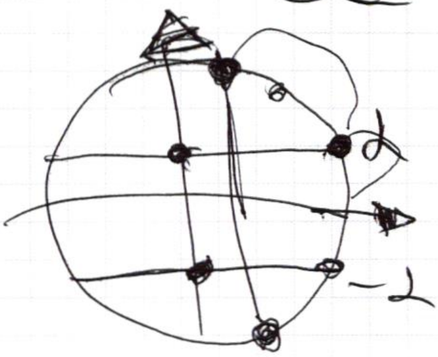
$\boxed{\alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \dots + \alpha_k f(p_k) \leq \beta_1 f(p_1)}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$2\alpha + 2\beta = b$ $\quad \alpha, \beta \in (0; \pi)$

$2\alpha = b$



$$\begin{cases} \sin b = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2b - a) + \sin a = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\cancel{2\sin b} \cdot \cos(b-a) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos(b-a) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

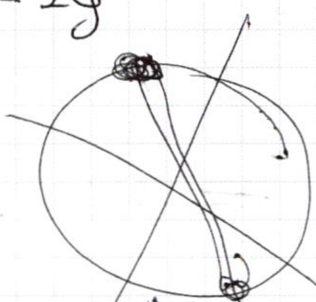
$\cos b \cos a + \sin b \sin a$

$\sin(b-a) = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$

$b - a = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi k$

$\pi(k-m) - \frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{\pi}{2} - g = \frac{\pi}{2} - g$

$\pi(t-m) + \frac{3\pi}{4} - g$ $\quad 3\frac{\pi}{2} - 2g$



$f(g) = Q \setminus q > 0$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(b) = \left[\frac{b}{4}\right]$ $\quad \forall p \in P$

$2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$ $\quad f(x/y) < 0$

$x = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k$

$y = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$

$f(p^{\beta_1 - \alpha_1} \cdot \ldots \cdot p^{\beta_k - \alpha_k}) < 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

N2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$\cdot 2\frac{y}{2}+\frac{1}{4}$

$x^2-12x+36=(x-6)^2$

45
36
9
81

$36y^2-36y-$

$36\cdot 4$ 120
24
144

$(x-6)^2+36(y^2-y)=9^2$

$45\cdot 4$ 180

$x^2-12x+36y^2-36y-45=0$

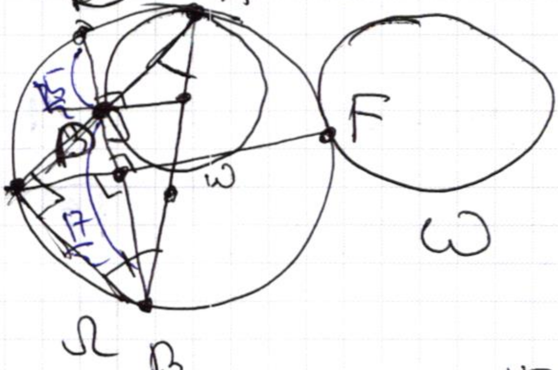
$x=12\pm\sqrt{144-144y^2+144y+180}$

$x^2-24yx+144y^2=2xy-12y-x+6$

~~1) Ω - больше ω~~

~~2) ω - больше Ω~~

N4



ω R_ω, R_Ω - ?

$\angle AFE$ - ? S_{AEF}

$CD=\frac{15}{2}$ $BD=\frac{17}{2}$

лемма архимеда:

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(a)=f(a$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 α, β:

$$\begin{cases} \sin 2(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$tg\,\alpha$ – ? Значений не меньше 3!

$\cos\alpha \neq 0$

замена $2\alpha+2\beta=\gamma$

$$\begin{cases} \sin\gamma = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cancel{\sin\gamma+2\beta}\ \sin(2\gamma-2\alpha)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cancel{4}\sin\gamma\cos(\gamma-2\alpha) = -\frac{\cancel{1}}{\cancel{5}}$

$+\frac{1}{\cancel{\sqrt5}}\cos(\gamma-2\alpha) = +\frac{\cancel{\sqrt5}}{\sqrt5}$

$\cos(\gamma-2\alpha) = +\frac{1}{\sqrt5}$

$$\boxed{\begin{aligned} 2\alpha+2\beta&=\gamma \\ 2\alpha&=a \end{aligned}}$$

$$\boxed{\cancel{2}\sin\gamma\cos(\gamma-2\alpha) = -\frac{1}{5}}$$

$$\begin{cases} \sin\gamma = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\gamma-2\alpha)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\sin 2\gamma\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cos 2\gamma$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+(6y)^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$\cancel{(6y)^2}$ $6y=a$ $x-2a=\sqrt{\frac{ax}{3}-2a-x+6}$

$a^2+x^2-12x-6a=45$

$a^2-6a+x^2-12x-45=0$

$\cancel{+9}$ $\cancel{+36}$

36

9

45

$\cancel{a=\frac{6\pm\sqrt{36-4x^2+48x+}}{}}$

$a^2-6a+9+x^2-12x+36$

$2y=a$

$$\begin{cases} (a-3)^2+(x-6)^2=90 \\ x-6a \end{cases}$$

$\cancel{x^2-24xy+144}$

$x^2-12a+36a^2=\cancel{2x-6a-x}+6$

$x^2-x(a+1)+36a^2-6a-6=0$

$a+1\pm\sqrt{a^2+2a+1-}$

R, r

$f(p^{\beta_1-\alpha_1})+\ldots+f(p^{\beta_k-\alpha_k})$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

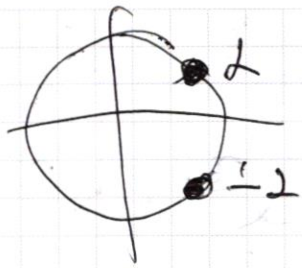
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть $b = 2\alpha + 2\beta$

$a = 2\alpha$



$$\begin{cases} \sin b = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2b-a) + \sin a = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot(-1)^k + \pi k, \ k \in Z \\ 2\sin b \cos(b-a) = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$$\cos(b-a) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{cases} b-a = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n, \ n \in Z \\ b = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi k, \ k \in Z \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

1) $\begin{cases} b = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k, \ k \in Z \\ b-a = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, \ n \in Z \end{cases}$

Пусть

$t = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$m = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

2) $\cos(b-a) + \sin b = 0$

$\cos b = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$2\pi k - f$

$-g + 2\pi e$ (4)

$\pi + f + 2\pi t$

(2)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$f'(a)=0$~~

$$f'(a) = 2(5-x)\left(\log_4 5 \cdot a^{\log_4 \frac{5}{4}} - \log_4 3\, a^{\log_4\left(\frac{3}{4}\right)}\right) =$$

$$= \left(\log_4 5 \cdot a^{\log_4 \frac{5}{4}} - \frac{\log_4 3}{a^{\log_4\left(\frac{4}{3}\right)}}\right)(10-2x)$$

$10x - x^2 \in (0;25]$

$\Leftrightarrow$

$0 < a \leq 25$

~~при $a \in (0;1)$~~ $a^{\log_4 \frac{5}{4}} < a$

$\log_4 5\, a^{\log_4 \frac{5}{4}} < a \cdot \log_4 5$

$3+4 \geq 5$

$5 = 3+4$

$\log_4 5$

$3^{\log_2 5} = 3^{\log_2 3} + 1 \cdot a^{\log_3 4}$

10 9 1 $12y + x - 6$

9

$-12x = 36y - 45$

$(x-6)^2 + (6y - \frac{3}{2})^2 = 9a^2 - 6a$

$2y(x-6) + (x-6)$ $x - 6 - 6(2y-1)$

$x - 12y = \sqrt{\underbrace{(x-6)}_{a}\underbrace{(2y-1)}_{b}}$ $x - 12y$

$a^2 + b^2$

$= ab$

$\sqrt{b^2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$(10x-x^2)^{\log_3 4} + (10x-x^2) \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}$$

$$a^{\log_3 4}\left(1 - a^{\log_4 5}\right) \leq -a$$

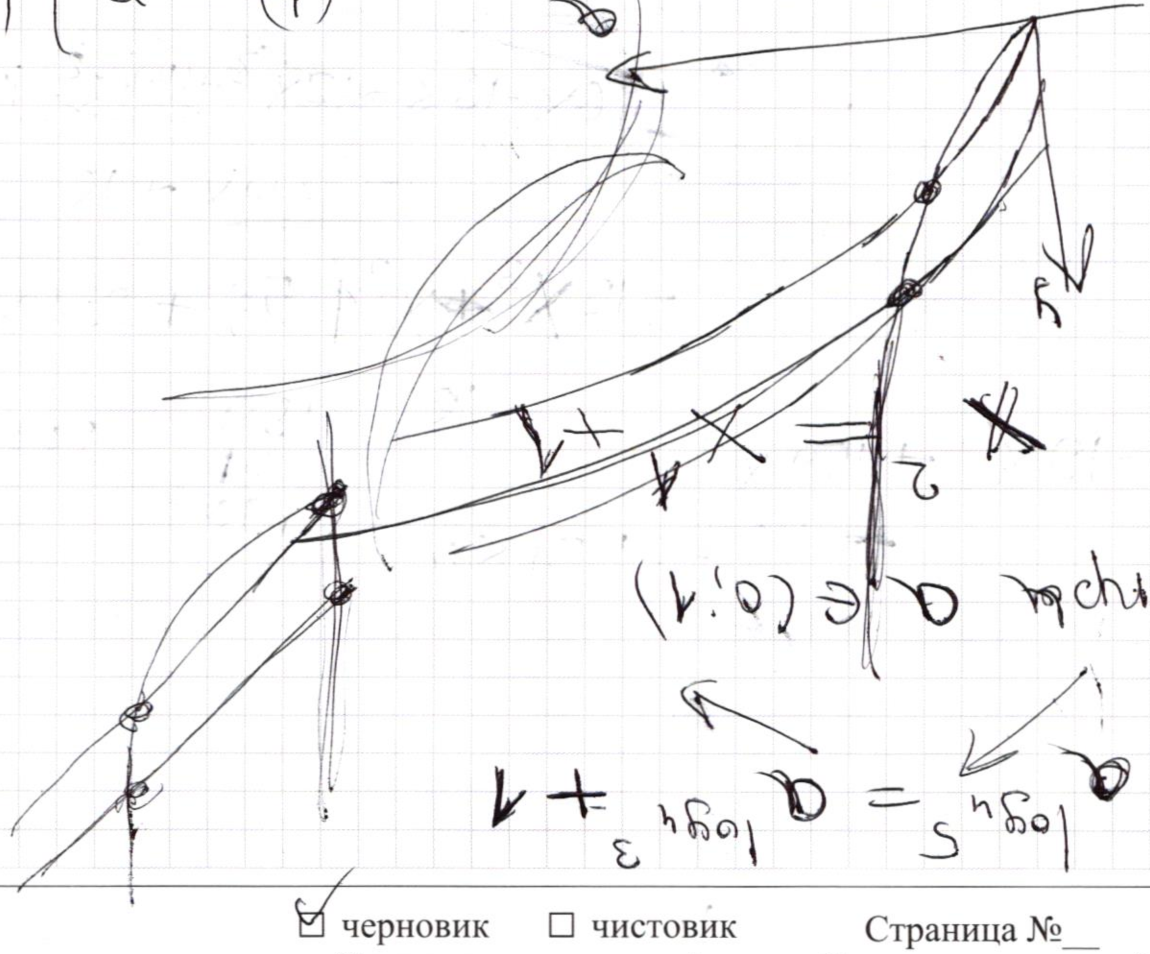
$$\log x = \frac{\log_3 5}{\log_3 4} \log_3 4 =$$

$$a^{\log_3 4}\left(a^{\log_4 5} - 1 - a^{\log_4 3}\right) \leq 0$$

$$\cancel{a^{\log_4 5}} -$$

$$1 + a^{\log_4 3} \geq a^{\log_4 5}$$

$$(5-x)\left(a^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)}\right.$$



при $a \in (0;1)$

$$a^{\log_4 5} = a^{\log_4 3} + 1$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

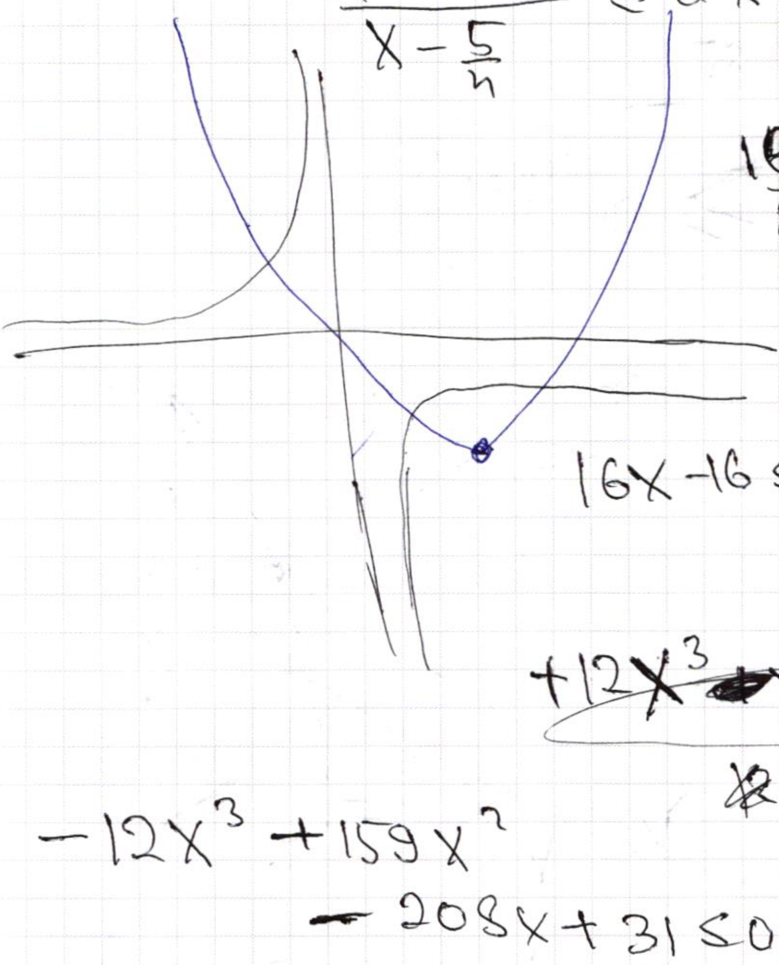
2) $f(x|y) < 0 \Leftrightarrow (m-k)\,n(-t) < 0$

$\Leftrightarrow$

$m > k$

1) $(m-k)(n-t) < 0$

$$\frac{4(x-1)}{x-\frac{5}{4}} \leq ax+b \leq -3x^2+36x-3$$



$$\frac{16(x-1)}{4x-5} \leq -3x^2+36x-3$$

150   28
30   180
208

$16x-16 \leq -12x^3+144x^2-12x+15x^2$

$-180x+15$

$\cancel{+12x^3 - x^2 \cdot 159 + 208x - 31 \leq 0}$

159
31
190
209

$-12x^3+159x^2$

$-208x+31 \leq 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)