МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x \\ x^2+18x>0 \Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x \quad x \in (-\infty;-18) \cup (0;+\infty) \end{cases}$$

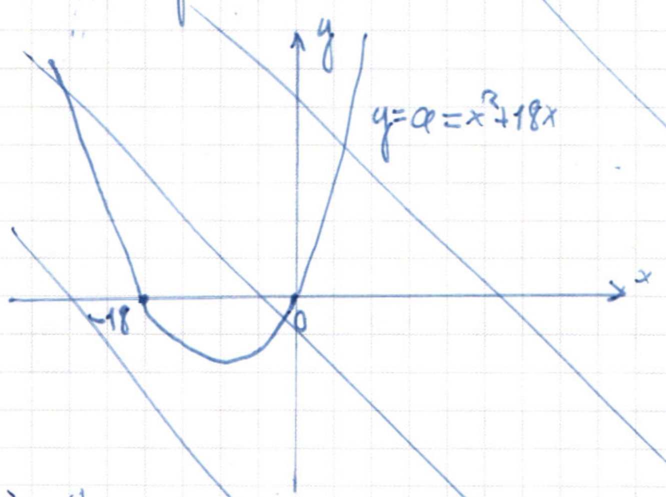
Замена:

$a = x^2+18x; \ a>0$

$5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13}$

$a^{\log_{12}5} + a \geq a^{\log_{12}13} \quad |: a \quad (\text{т.к. } a>0)$

~~a - возрастает и положительна от 0 до +∞:~~



$a^{\log_{12}5}$ - тоже возрастает т.к. $\log_{12}5>0$ (показатель не меняет монотонность)

$\log_{12}13>1$

$a^{\log_{12}13}$ - тоже возрастает

$a^{\log_{12}5-1}+1 \geqslant a^{\log_{12}13-1}$

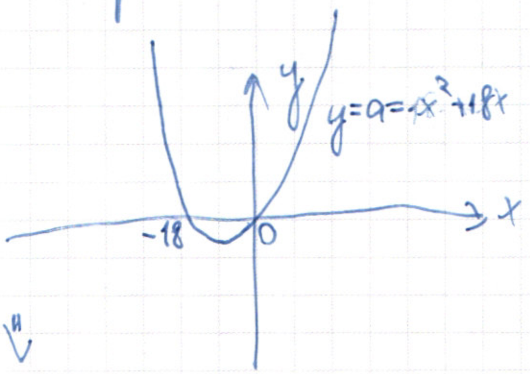
$\log_{12}5<1$ $\log_{12}13>1$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\log_{12}5-1<0$ $\log_{12}13-1>0$

$x\in[0;+\infty)$

1) a - возрастает и больше 0 на $x\in[0;+\infty)$:



$\Downarrow$

$a^{\log_{12}5-1}$ - убывает (т.к. показатель меньше 0)

$a^{\log_{12}13-1}$ - возрастает (т.к. показатель больше 0)

$a^{\log_{12}5-1}+1 \geq a^{\log_{12}13-1}$

$\downarrow$ не меняет монотонность $\uparrow$

$\Downarrow$

$a^{\log_{12}5-1}+1=a^{\log_{12}13-1}$ только в 1 точке a (из св-в монотонности)

$a=144$

$\frac{144^{\log_{12}5}}{144}+1=\frac{144^{\log_{12}13}}{144}$ $\frac{25}{144}+1=\frac{169}{144}$

$\frac{25+144}{144}=\frac{169}{144}$ - подходит

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

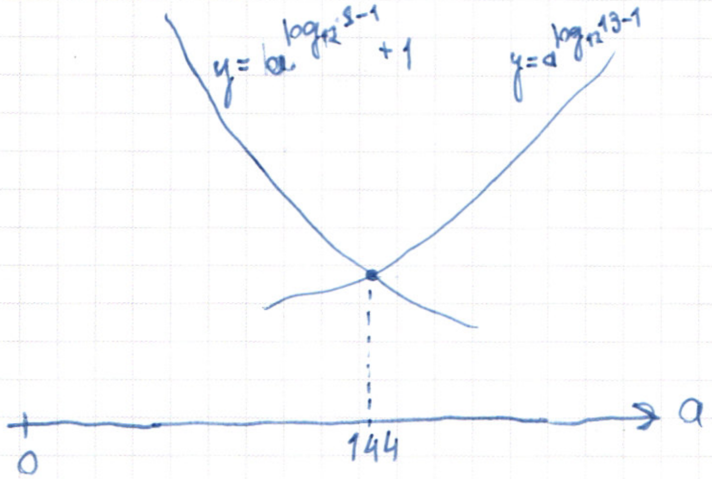
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Графики выглядят так:



Тогда $a^{\log_{12}5-1}+1 \geq a^{\log_{12}13-1}$ при $a\in(0;144]$

Вернемся к исх. переменным

$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x\leq 144 \\ x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ (x-6)(x+24)\leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x\in[-24;6] \end{cases}$ $x\in(0;6]$

2) $x\in(-\infty;-18)$

a - убывает и больше 0.

$a^{\log_{12}5-1}$ - $\uparrow$

$a^{\log_{12}13-1}$ - $\downarrow$

$a^{\log_{12}5-1}+1 \geq a^{\log_{12}13-1}$

$\uparrow$ $\downarrow$

$\Downarrow$

$a^{\log_{12}5-1}+1 = a^{\log_{12}13-1}$ только в 1 точке a (ан-но) $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$

$a=144 \Rightarrow$ нер-во вып. ан-но при $a\in(0;144]$

$\begin{cases} x\in(-\infty;-18) \\ x\in[-24;6] \end{cases}$ (ан-но) $\Rightarrow x\in[-24;-18)$ $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x\in(0;6] \\ x\in[-24;-18) \end{array}\right.$ Ответ: $[-24;-18)\cup(0;6]$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \quad (1) \end{cases}$$

(1) $x^2-4x+4+9y^2-18y+9-4-9=12$

$(x-2)^2+(3x-3)^2=25=5^2$

(2) $xy-x-2y+2\geq 0$

$(x-2)(y-1)\geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 2 \\ y\leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \quad |^2$

$(x-2y)^2=xy-x-2y+2$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$4y(y-x)+x^2-xy+x+2y-2=0$

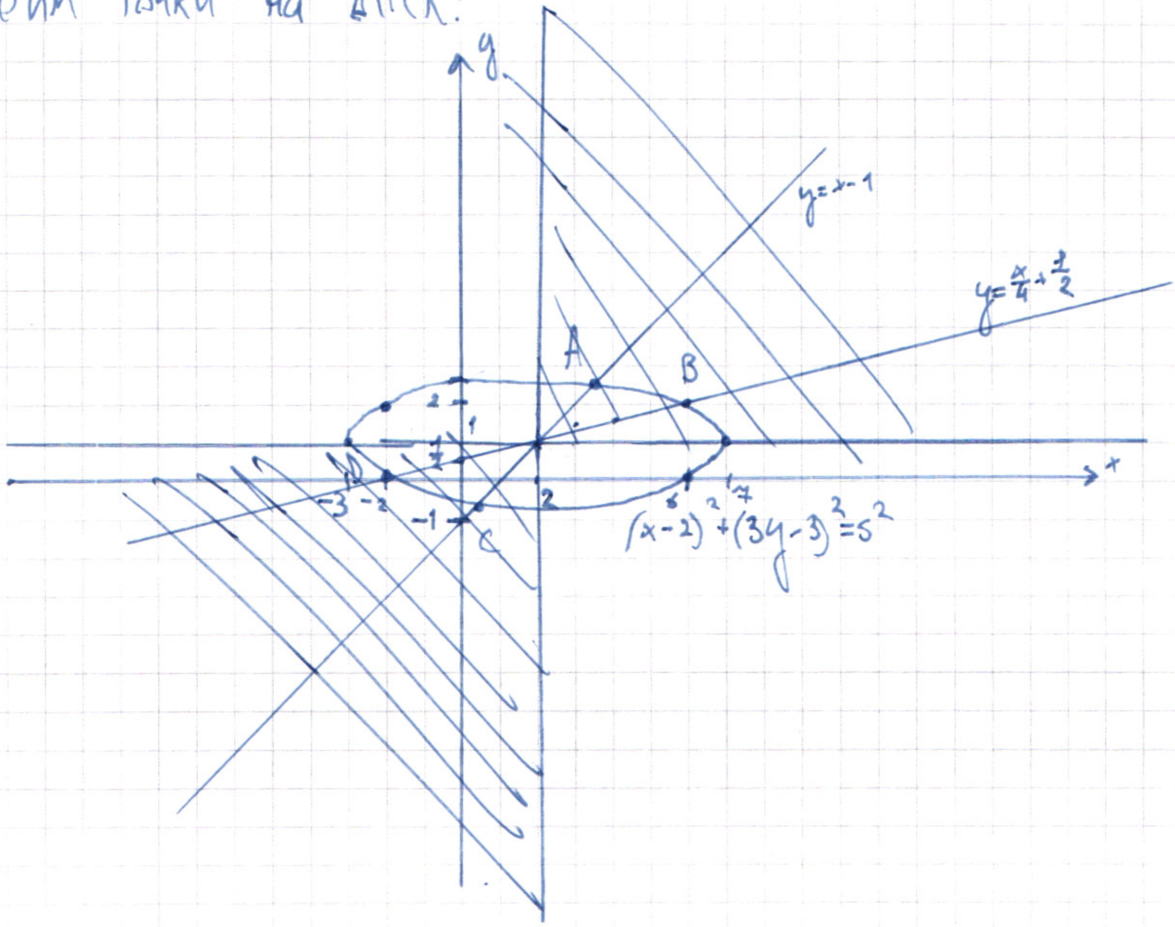
$(4y-x)(y-x)+x+2y-2=0$

$$\begin{cases} (4y-x-2)(y-x+1)=0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 2 \\ y\leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=\frac{x}{4}+\frac{1}{2} \\ y=x-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 2 \\ y\geq 1 \end{cases} \end{array}\right. \\ (x+2)^2+(3y-3)^2=5^2 - \text{эллипс} \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Построим точки на ДПСК:



Из графика видно, что подходят только точки A, B, C, D.

Рассчитаем координаты точек:

A, C: $y=x-1 \cap (x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

$(x-2)^2+(3x-6)^2=5^2$

$x^2-4x+4+9x^2-36x+36=25$

$10x^2-40x+15=0 \quad |:5$

$2x^2-8x+3=0$

$\frac{D}{4}=16-6=10$

$x=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2} \Rightarrow A\left(\frac{4+\sqrt{10}}{2};\ \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)$, $C\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2};\ \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$

B, D: $y=\frac{x}{4}+\frac{1}{2} \cap (x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

$(x-2)^2+\left(\frac{3x}{4}+\frac{3}{2}-3\right)^2=25$

$x^2-4x+4+\frac{9x^2}{16}-\frac{9x}{4}+\frac{9}{4}=25$

$\frac{25x^2}{16}-\frac{25x}{4}-\frac{75}{4}=0 \quad |:\frac{25}{4}$

$\frac{x^2}{4}-x-3=0 \quad |\cdot 4$

$x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=6 \end{array}\right. \Rightarrow B(6;2)$, $D(-2;0)$

Ответ: $\left(\frac{4+\sqrt{10}}{2};\frac{2+\sqrt{10}}{2}\right)$; $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2};\frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$; $(6;2)$; $(-2;0)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Ω и ω кас в т. A

AB - диаметр Ω

BC - хорда Ω, $BC \cap \omega = D$

$(AD) \cap \Omega = E$

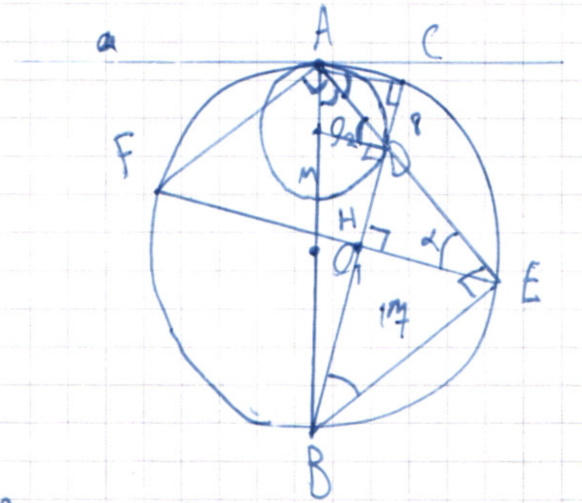
$EF \perp BC$, $F \in \Omega$

$CD = 8$

$BD = 17$

$r_\omega - ?$ $r_\Omega - ?$ $\angle AFE - ?$

$S_{AFE} - ?$



Пусть a - прямая, касается ω, Ω в т. A

Тогда $O_2A \perp \alpha$, $O_1A \perp \alpha$ (O_1, O_2 - центры окр)

$\Downarrow$

O_1, O_2, A - лежат на одной прямой

$AB \cap \omega = M$

AM - диаметр.

Пусть $\angle FEA = \alpha$

$\angle ACB = 90^\circ$ т.к. опир. на диаметр

$\Downarrow$

$AC \perp CB$ $AC \parallel FE$

$\Downarrow$

$\angle CAD = \angle FEA = \alpha$ (накр. леж.)

$O_2D \perp BC$ т.к. BC - касательная

$\Downarrow$

$O_2D \parallel AC \parallel FE \Rightarrow \angle O_2DA = \angle CAD = \alpha$ (ан-но)

$O_2A = O_2D = r_\omega \Rightarrow \Delta O_2AD$ - р.б. $\Rightarrow \angle O_2AD = \angle ADO_2 = \alpha$

$\angle AEB = 90^\circ$ т.к. опир. на диаметр.

$\Downarrow$

$\angle ABE = 90 - \alpha$ $\quad$ $\angle ABE = \angle AFE$ (опир. на дугу AE)

$\Downarrow$

$\angle AFE = 90 - \alpha$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6

(Нумеровать только чистовики)

$\Downarrow$

$\angle FAE = 180 - 90 + \alpha - \alpha = 90^\circ$

$\Downarrow$

FE − диаметр (т.к. $\angle FAE$ − прямой)

$FE \perp BC \Rightarrow BC$ делится пополам

$FE \cap BC = M \Rightarrow BM = MC = \frac{17+8}{2} = 12{,}5$

$MD = MC - CD = 12{,}5 - 8 = 4{,}5$

$\triangle ACB \sim \triangle EHD$ $(\angle CAD = \angle HEA;\ \angle EMC = \angle ACD = 90^\circ)$

$\Downarrow$

$\frac{AC}{HE} = \frac{CD}{MD} = \frac{8}{4{,}5} = \frac{16}{9}$

$\triangle DBE \sim \triangle EHD$ $(\angle EBM = \angle CAE = \angle\alpha;\ \angle HEA;\ \angle EMD = \angle BME = 90^\circ)$

$\Downarrow$

$\frac{BM}{BE} = \frac{HE}{DE} = \frac{BE}{AD}$

$\frac{HD}{HE} = \frac{HE}{HB}$ $\quad HE = \sqrt{HD \cdot HB} = \sqrt{\frac{9 \cdot 25}{4}} = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7{,}5$

$\Downarrow$

$AC = \frac{16}{9} \cdot HE = \frac{\cancel{16}^{8} \cdot \cancel{15}^{5}}{\cancel{9}_{3} \cdot \cancel{2}} = \frac{40}{3}$

$AB = 2r_\Omega = AC^2 + CB^2 = \sqrt{25^2 + \frac{40^2}{3^2}} = \sqrt{625 + \frac{1600}{9}} = \sqrt{\frac{7225}{9}} = \frac{5 \cdot 17}{3} = \frac{85}{3}$

из Th. Пифагора

$r_\Omega = \frac{85}{6}$

$\triangle AO_2D \sim \triangle AOE$ $(O_2D \parallel OE,\ \angle A$ − общий$)$

$\frac{AO_2}{AO} = \frac{r_\omega}{r_\Omega} = \frac{AD}{AE} = \frac{CD}{CM} = \frac{8}{12{,}5}$

$r_\omega = \frac{r_\Omega \cdot 8 \cdot 2}{25} = \frac{85}{6} \cdot \frac{8}{25} = \frac{4 \cdot 17}{3 \cdot 5} = \frac{68}{15}$

$\angle AFE = 90 - \alpha = \angle ABE$ $\quad tg\angle EBH = \frac{HE}{HB} = \frac{7{,}5}{12{,}5} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = tg\angle\alpha$

$tg\ 90 - \alpha = tg\alpha \Rightarrow tg\angle AFE = \frac{3}{5}$

CM - высота ΔAFE т.к. $CM \perp FE$ и $CM \perp AC$

$S_{\Delta AFE} = \frac{CM \cdot FE}{2} = CM \cdot r_R = \frac{12,5 \cdot 85}{3} = \frac{25 \cdot 85}{3} = \frac{2125}{3}$

Ответ: $\frac{85}{6}$; $\frac{68}{15}$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$; $\frac{2125}{3}$.

№ 1

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin((2\alpha+2\beta)\cdot 2 - 2\alpha) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

Пусть $2\alpha + 2\beta = \gamma$

$\sin\gamma = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\gamma = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\gamma = 2\cos\gamma \sin\gamma = \mp\frac{4}{5}$ $\cos 2\gamma = \pm\frac{3}{5}$

$\sin(2\gamma - 2\alpha) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\gamma \cos 2\alpha - \cos 2\gamma \sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\pm\frac{4}{5}\cos 2\alpha \mp \frac{3}{5}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

1) $\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = 1$

$-\frac{4}{5} = -\frac{4}{5}$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 1 \\ \sin\alpha = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \underline{\operatorname{tg}\alpha = 0}$

2) $\pm\frac{4}{5}\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} \mp \frac{8}{5}\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{1}{2}$

$(x-2)(y-1)$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$4y(y-x)+x^2-xy+x+2y-2=0$

$x(x-y)$

$(4y-x)(y-x)+x+2y-2=0$

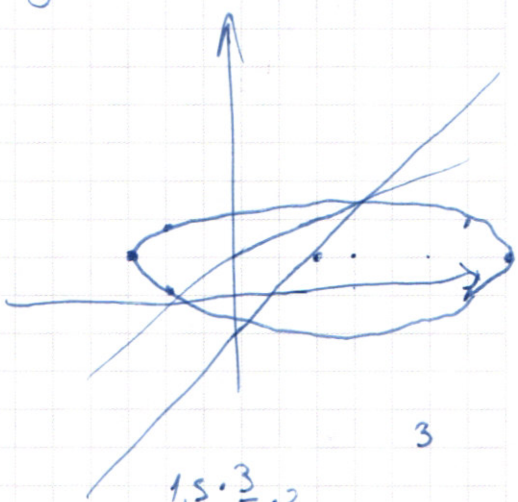
$(4y-x)(y-x)+4y-2y-x+2x-2=0$

$(4y-x)(y-x+1)-2(y-x+1)=0$

$(y-x+1)(4y-x-2)=0$

$2=2+2$

$\left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=\frac{x}{4}+\frac{1}{2} \end{array}\right.$



3

$1{,}5\cdot\frac{3}{4}\cdot 2$

$-9-16$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$

$x^2-2x+1+3x-1$ -||-

$y(4y+2-5x)=0$ $\quad x^{-1}$ $\quad 5^{-1}$

$(x-1)^2+3x-3$

$BD^2=(2R\cdot(2R-2r))$

$(x-1)^2+(x-1)\cdot 3+4y^2+2y-5xy=0$

$\frac{144}{25}$

$(x-1)(x+2)+(2y-x)^2+2y-xy=0-4xy$

$y(2-x)$

$5^2+12^2=13^2$

$CB \parallel EF$

$a^{\log_{12}5}+a^{\log_{12}12}\geq a^{\log_{12}13}$

$OB^2=r^2+17^2$ $\quad 1+1$

$(2R-r)^2=r^2+17^2$

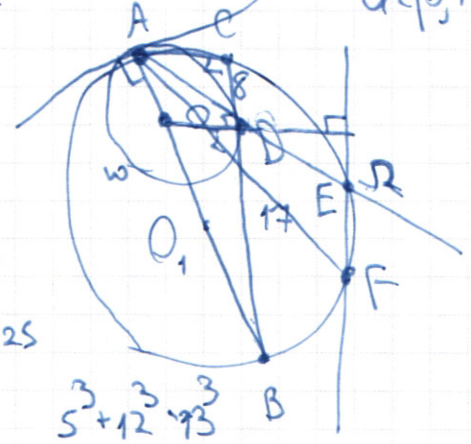
$a\in(0;144)$ $\quad 4+25$

$(2R)^2=AC^2+25^2$

$\angle AEB=90^\circ \Rightarrow \angle FAE=90^\circ$

$\Downarrow$

FE - диаметр



$x^{\frac{1}{2}}$

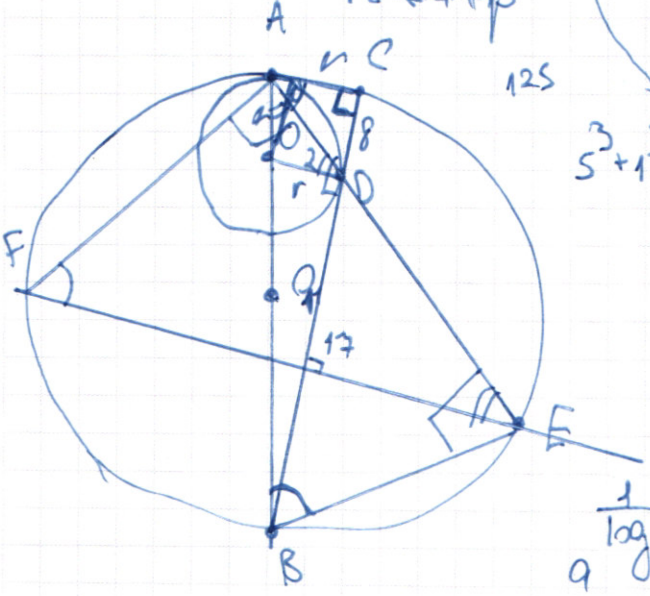
$\sqrt{x}$

x^{-1}

$\frac{1}{4}$

$3\cdot 6=5^2$

125



$5^3+12^3=13^3$

$\frac{r}{AC}=\frac{17}{25}$

$a>0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq|x^2+18x|$

$a^{\frac{1}{\log_5 12}}$

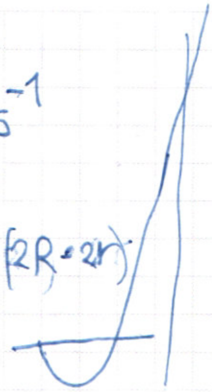
$a^{\log_{12}5}+a^{\log_{12}12}\geq a^{\log_{12}13}$

$a^{\log_{12}(6-1)}+a\geq a^{\log_{12}(6\cdot 2+1)}$

$1+a^{1-\log_{12}5}\geq a^{\log_{12}\frac{13}{5}}$

$5+12\geq 13$

$a\quad a^{\log_{12}5-\log_{12}12}+1\geq a$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

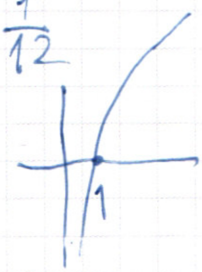
$90-\alpha-\alpha$

9

-24 $24^2-18\cdot 24$ $x\epsilon$

$\sqrt{12}$

$\frac{1}{12}$



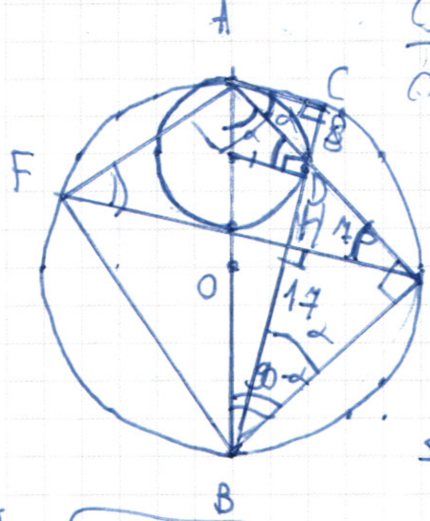
$\frac{OE}{O_1D}=\frac{R}{r}=\frac{AO}{O_1A}=\frac{r}{}$

$7225 \mid 25$, 289

17^2

324

$17 \times 17 = 289$



$24(24-18)$

$CM=BM=12{,}5$

$MD=12{,}5-8=4{,}5$

$6\cdot 24$

144

$\frac{R}{r}=\frac{12{,}5}{8}$

$5^2+144\geq 144$

$85 \times 85 = 425$, 680, 7225

$\frac{HD}{HE}=\frac{HE}{12{,}5}$

$DE=\sqrt{7{,}5^2+HD^2}=$

$81+144$

$=\sqrt{\frac{225}{4}+\frac{81}{4}}=$ $tg\angle AFE=\frac{12{,}5}{7{,}5}=\frac{25}{15}=\frac{5}{3}$

$HE=\sqrt{12{,}5\cdot 4{,}5}=\sqrt{\frac{25\cdot 9}{4}}=\frac{5\cdot 3}{2}=$

$=7{,}5$

225

15^2

$=\frac{\sqrt{306}}{2}$

$\frac{AC}{HE}=\frac{CD}{HD}$

$85 \times 25 = 425$

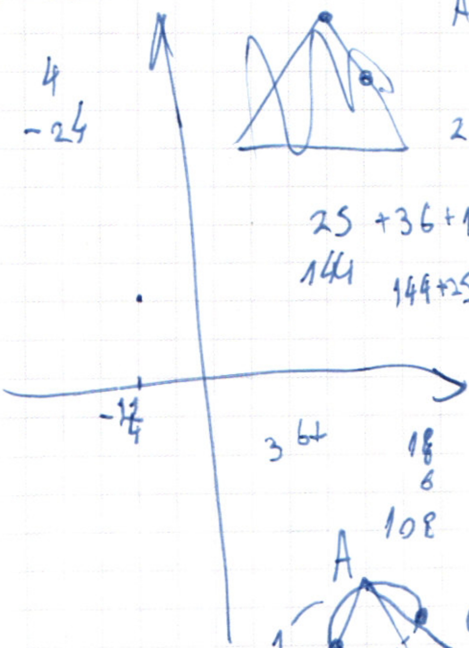
$x=\frac{-9\pm 15}{}$

$AC=\frac{CD\cdot HE}{HD}=\frac{8\cdot 15\cdot 2}{2\cdot 9}=\frac{40}{3}$

4

-24

$25^2+\left(\frac{40}{3}\right)^2=\sqrt{625+\frac{1600}{9}}=\sqrt{\frac{7225}{9}}$ $\frac{170}{}$ 2125



$25+36+108$

144 $144+25$

$625 \times 9 = 5625$

$+1600$

7225

9 7

16

$3(4x+3)+2$

$3+\frac{2}{4x+3}$

3^{6+}

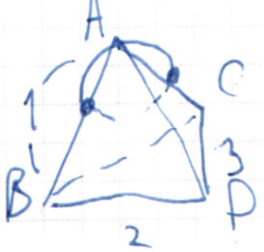
18

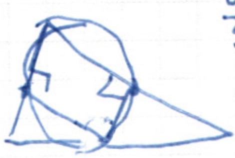
6

108

$\frac{12x+11}{4x+3}\leq ax+b\leq -8x^2-30x-17$

$3+\frac{2}{3-11}$





$\frac{4}{5}$

$\frac{16}{25}(1-x^2)=$ $3+\frac{2}{-8}=3-\frac{1}{4}$

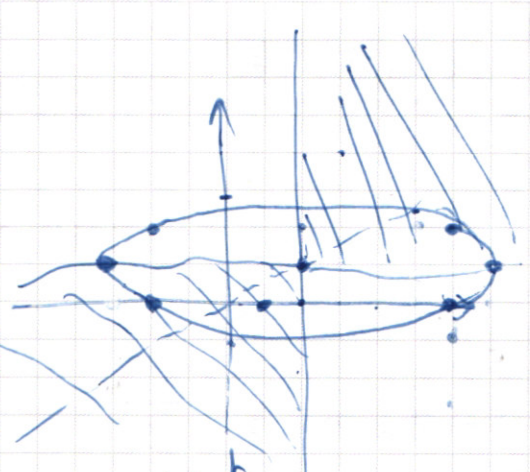
$2\frac{3}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (2) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (1) \end{cases}$$

$x-2=5$
$x=7$



(1) $x^2-4x+4+9y^2-18y+9-13=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$y(x-3)$

(2) $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$x-2y+4$

$3y-3)=5$
$3y=8$

$3y=7$
$y=\frac{7}{3}=2,3$

$3y$ $x=6$
$y=2$

$a^{\log_a b}=b$

$16-16=0$

$3^{\log_2 16}=3^4=2^{4\log_2 3}=$

$x=2$
$y=1$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$5^{\log_{12}a}+a\geq|a|^{\log_{12}13}$

$a^{\log_{12}5}+a\geq|a|^{\log_{12}13}$

$a\geq 0$

$a^{\log_{12}5}+a\geq a^{\log_{12}13}$

$a\in\{1\}$

$a\left(a^{\log_{12}5-1}-a^{\log_{12}13-1}+1\right)\geq 0$

$$\begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\leq 2 \\ y\leq 1 \end{cases}$$

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2 \,|\, x-2$
x^2-2x

$x=0$

$y=1$
$x=2$

$4+2-2+x^2-5x+x$
$4+x^2-4x=0$

$f(13)=f(1)+f(13)=$

$=3$

$(2y)^2+x^2-4xy-xy+x+2y-2=0$

$(2y-x)^2-x(y-1)+2(y-1)=0$

$x=1$
$y=0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right)$

$x=3$ $y=5$

$1\cdot 4$ $(2y-x)^2+(y-1)(-2+x)=4-10+2+4+2-2$

$2=$

$x=2$ $y=1$

$x-2y-2x+xy+2+2x-xy-2$

$(y-1)(x-2)+$ $xy-x-2y+2\geq 0$ $(x-2)(y-1)\geq 0$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$

$(x-2)(y-1)(x-1)y$

$x^2-5xy+x+2y-2+4y^2=0$

$2y(2y+1)-x(2y+1)$ $(xy-x-2y+2)(xy-y)=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 γ

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $1 - \frac{1}{5}$

$\frac{4}{5}$

$\cancel{\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}}$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin(2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}}$

$\cancel{1)\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}}$

$\sin((2\alpha+2\beta)\cdot 2 - 2\alpha) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\gamma \cos 2\alpha - \cancel{\sin}\cos 2\gamma \sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\gamma = 2\sin\gamma\cos\gamma$ $1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

$\begin{cases} \sin 2\gamma = \pm 2\cdot\frac{2}{5} = \pm\frac{4}{5} \\ \cos 2\gamma = \pm\frac{3}{5} \end{cases}$

$\pm\frac{4}{5}\cos 2\alpha \mp \frac{3}{5}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\begin{cases} \sin 2\gamma = \frac{4}{5} \\ \cos 2\gamma = \frac{3}{5} \end{cases}$ $\frac{4}{5}\cos 2\alpha + \frac{8}{5}\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5} - \frac{8}{5}$

$4\sqrt{1-x^2} + 8x = -4$ $-\frac{38}{5} = -4$

$\sqrt{1-x^2} + 2x = -1$ $4\frac{3}{5}$

$x^2 \le 1$ $15-32$

$1 - x^2 = 1 + 4x + 4x^2$

$5x^2 + 4x = 0$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$x = 0$ $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $tg\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{\quad}$

$x = -\frac{4}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)