МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \Rightarrow 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

Рассмотрим 2 случая:

1) $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$:

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$3\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$tg\alpha = \frac{2\pm\sqrt{16}}{2} \Rightarrow tg\alpha \in \{-1; 3\}$.

2) $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - (1 - 2\sin^2\alpha) = -1$.

$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

$tg\alpha = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{6} \Rightarrow tg\alpha \in \{-1; \frac{1}{3}\}$

Ответ: $-1; \frac{1}{3}; 3$.

№3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

Замена $t = 10x - x^2$:

$t + |t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

Заметим, что t под логарифмом $\Rightarrow t > 0 \Rightarrow |t| = t$.

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$.

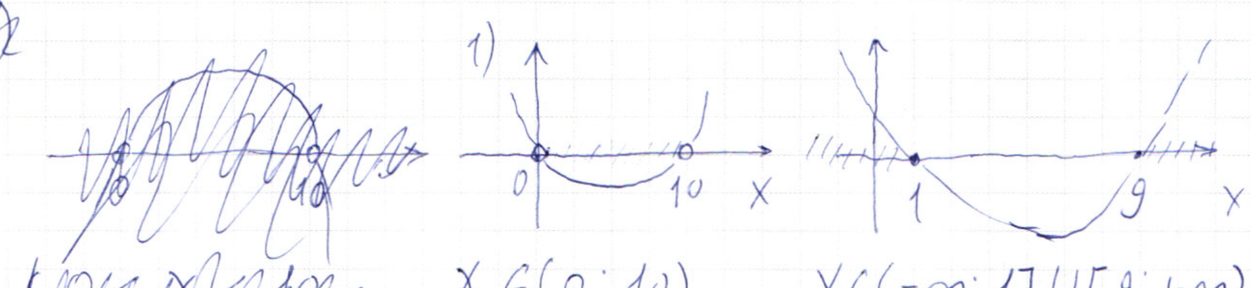
$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$

Замена $\varphi = \log_3 t$: $3^\varphi + 4^\varphi \geq 5^\varphi$

$\left(\frac{3}{4}\right)^\varphi + 1 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^\varphi$; Слева функция убывает, справа возрастает $\Rightarrow$ они пересекаются 1 раз, при $\varphi = 2 \Rightarrow \varphi \leq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 t \leq 2 \Rightarrow t \leq 9$

$$\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ 10x - x^2 \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 10x < 0 \quad (1) \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0 \quad (2) \end{cases}$$



$x \in (0; 10)$ $\quad$ $x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$.

$x \in (0; 1] \cup [9; 10)$.

Ответ: $(0; 1] \cup [9; 10)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab)=f(a)+f(b) \Rightarrow f(1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$.

$f\left(\frac{a}{a}\right)=f(a)+f(a^{-1})$, но $f\left(\frac{a}{a}\right)=f(1)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(a^{-1})+f(a)=0 \Rightarrow f(a^{-1})=-f(a)$.

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f(y^{-1})=f(x)-f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Rightarrow f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$.

Найдём некоторые значения функции:

$f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(4)=f(2)+f(2)=0$, $f(5)=1$; $f(6)=$
$=f(2)+f(3)=0$, $f(7)=1$; $f(8)=0$; $f(9)=0$; $f(10)=1$; $f(11)=2$;
$f(12)=0$; $f(13)=3$; $f(14)=1$; $f(15)=1$; $f(16)=0$;
$f(17)=4$; $f(18)=0$; $f(19)=4$; $f(20)=1$; $f(21)=1$;
$f(22)=2$; $f(23)=5$; $f(24)=0$; $f(25)=2$.

~~f(x) ≠ 0 в~~

На $[2;25]$: $f(x)=0$ в 10 точках;
$f(x)=1$ в 7 точках; $f(x)=2$ в 3 точках;
$f(x)=3$ в 1 точке; $f(x)=4$ в 2 точках и
$f(x)=5$ в одной точке.

Пусть $f(x)=0 \Rightarrow 0<f(y)\leq 5 \Rightarrow \exists$ 10 возможных
x и $(24-10)=14$ возможных $y \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ~~$\exists$ 7·17 = 119 комбинаций~~. $\exists$ 140 комбинаций.

Аналогично для $f(x)=1$: $\exists$ 7 возможных x и $1+2+1+3=7$ возможных $y \Rightarrow 49$ комбинаций.

$f(x)=2 \Rightarrow 3\cdot(1+2+1)=12$ комбинаций.

$f(x)=3 \Rightarrow 1\cdot(1+2)=3$ комбинации.

$f(x)=4 \Rightarrow 2\cdot 1=2$ комбинации.

$f(x)=5 \Rightarrow 0$ комбинаций.

Итого: $140+49+12+3+2=206$.

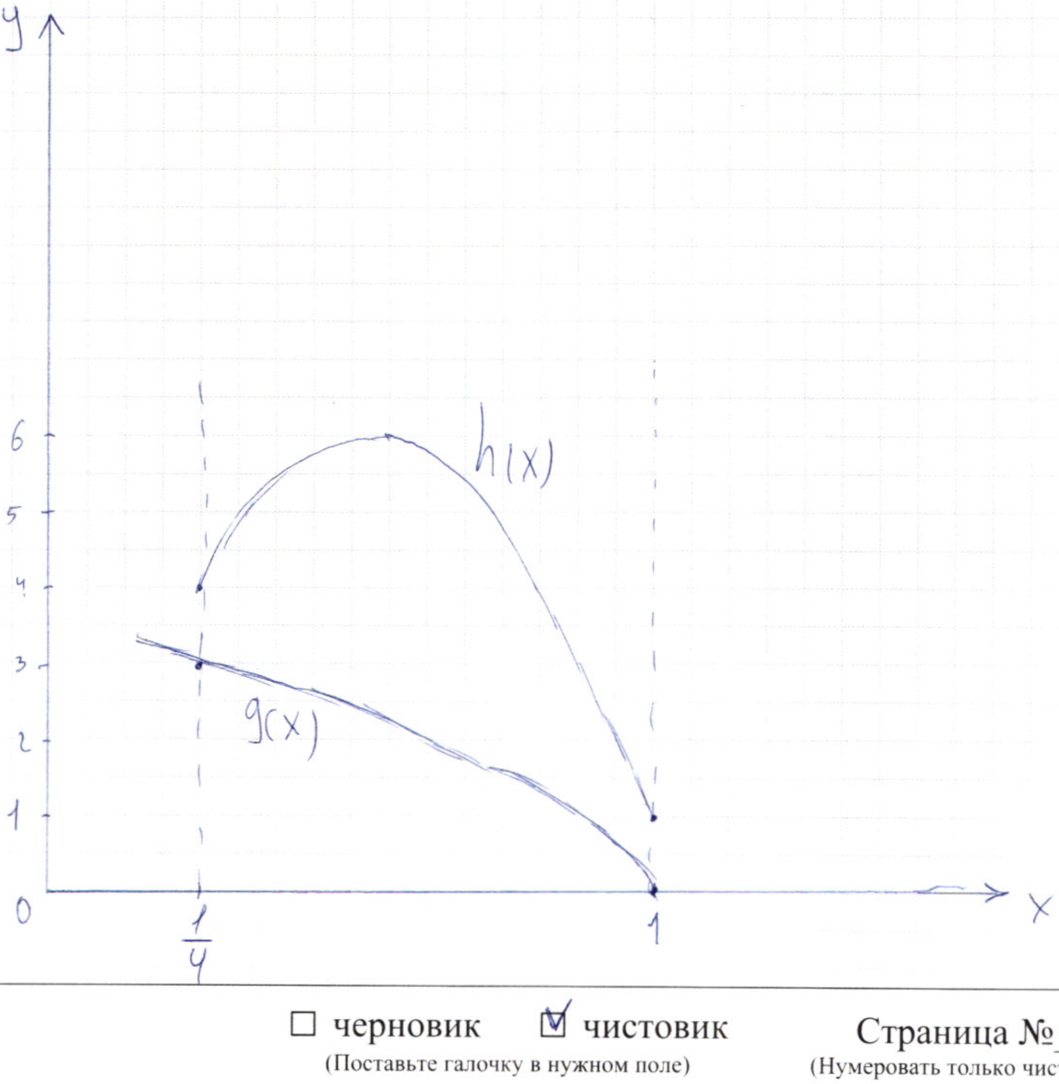
Ответ: 206.

№6

$$g(x)=\frac{16x-16}{4x-5}=4+\frac{4}{4x-5}$$

$f(x)=ax+b$

$h(x)=-32x^2+36x-3$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$g\left(\frac{1}{4}\right) = 4 + \frac{4}{1-5} = 3$

$g(1) = 4 - 4 = 0$

$h\left(\frac{1}{4}\right) = -2 + 9 - 3 = 4$

$h(1) = -32 + 36 - 3 = 1$

$g(x) \le f(x) \le h(x) \ \forall x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow g\left(\frac{1}{4}\right) \le f\left(\frac{1}{4}\right) \le h\left(\frac{1}{4}\right)$ и $g(1) \le f(1) \le h(1)$

$\begin{cases} 3 \le \frac{a}{4} + b \le 4 \\ 0 \le a + b \le 1 \end{cases} \Rightarrow 3 \le -\frac{3}{4}a \le 3 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le b - 4 \le 1 \Rightarrow b \in [4; 5].$

Заметим, что $a \ge \frac{0-4}{3/4} = -\frac{16}{3}$

и $a \le \frac{1-3}{3/4} = -\frac{8}{3} \Rightarrow a \in \left[-\frac{8}{3}; -\frac{16}{3}\right]$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

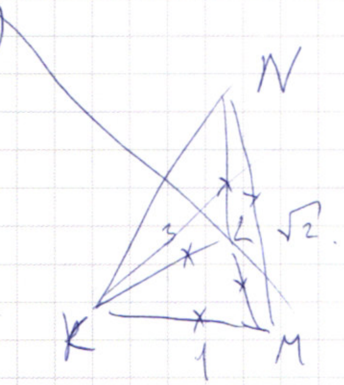
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7)



1) $2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\Rightarrow\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}\Rightarrow\sin 2\beta=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$ (+)

$\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha=-1$

$\sin 2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=-1$

$3\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha=0$

$f(2)=0;\ f(3)=0;\ f(4)=0;\ f(5)=1;\ f(6)=0;\ f(7)=1;$

$f(8)=0;\ f(9)=0;\ f(10)=1;\ f(11)=2;\ f(12)=0;\ f(13)$

$\frac{1}{4}\cdot(-4)+b=4\Rightarrow b=5$

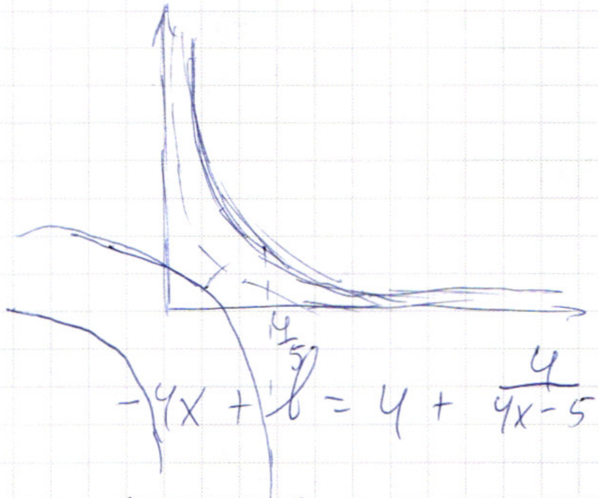
$\frac{4}{4x-5}=-4x+1\Rightarrow 4=-16x^2+20x-5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$$-4x+b=4+\frac{4}{4x-5}=4+\frac{1}{x-\frac{4}{5}}$$

$-\frac{2}{(3/4)}=-\frac{8}{3}$; $-\frac{4}{(3/4)}=-\frac{16}{3}$, $\left(4+\frac{4}{4x-5}\right)'=4\cdot\left(\frac{1}{4x-5}\right)'=$

$a\in\left[-\frac{16}{3};\ -\frac{8}{3}\right]$, $0\le a+b\le 1$. $=4\cdot\left(-\frac{1}{4x-5}\right)\cdot 4=-\frac{16}{4x-5}$.

$-a\le b\le 1-a$.

$a(x-1)\le ax+b\le a(x+1)+1$.

$$4+\frac{4}{4x-5}=ax+b.$$

$16x-20+4=4ax^2-5ax+4bx-5b$

$4ax^2+(4b-5a-16)x+(16-5b)=0$

$D=0\Rightarrow (4b-(5a+16))^2-4(16-5b)=0$.

$16b^2-8b(5a+16)+25a^2+160a+256-64+20b=0$.

$16b^2-40ab-128b+25a^2+160a+256-64+20b=0$.

$16b^2+(20-40a-128)b+(25a^2+160a+192)=0$.

$$b=\frac{40a+108\pm\sqrt{(40a+108)^2-64(25a^2+160a+192)}}{2}=$$

$=20+59\pm\frac{1}{2}\sqrt{\cancel{1600a^2}+8640a+108^2-\cancel{1600a^2}-64\cdot160a-64\cdot192}$

$ax+b=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $t = 10x - x^2$: $t + |t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$ 3

$f = t + 4^{\log_3|t|} \geq 5^{\log_3 t}$; $f' = 1+$

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cos2\beta + \cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin2\beta = -\frac{2}{5}$.

5) $f(ab) = f(a)+f(b) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x)+f(y^{-1})$

not prime.

$f(\frac{x}{x}) = f(x)+f(x^{-1}) \Rightarrow f(x^{-1}) = f(1)-f(x)$

~~f(2)=0~~; $f(1)=f(1)-f(1) \Rightarrow f(1)=0 \Rightarrow f(x^{-1}) = -f(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x)-f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$. 5

0:10, 1:7; 2:3; 3:1; 4:2, 5:1

~~$f(25) = f(5)+f(5) = 2$ $\log_a p = [illegible]$~~ $\Rightarrow \frac{p}{4} - 1 \le \log_a p \le \frac{p}{4}$

~~$f(24)=3f(2)+$~~ $f(24)=3f(2)+f(3)=0$. $p-4 \le \log_a p^4 \le p$

1<2, 1<3, 1<4, 1<5. 2<3, 2<4, 2<5. 3<4, 3<5. 4<5

$x \ne y$: Primes: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

Vals: 0 0 1 1 2 3 4 4 5.

$f(x)=0 \Rightarrow x \in \{2,3\}$. $5 \to 25$, $7 \to 21$ | $13 \to 3$, $11 \to 2$. $5 \to 1, 2$; $3 \to$

3) ~~$f' = 1 + (e^{\ln4 \log_3|t|})' - (e^{\ln 4 \log_3 t})' =$~~

$= 1 + 4^{\log_3|t|} \cdot \ln4 \cdot \frac{1}{\ln3|t|} \cdot \operatorname{sgn} t$ $a^{\log_b c} = b^{\log_b a \log_b c} = c^{\log_b a}$.

$f = t + |t|^{\log_3 4} - t^{\log_3 5}$, t под log $\Rightarrow t > 0 \Rightarrow |t| = t$.

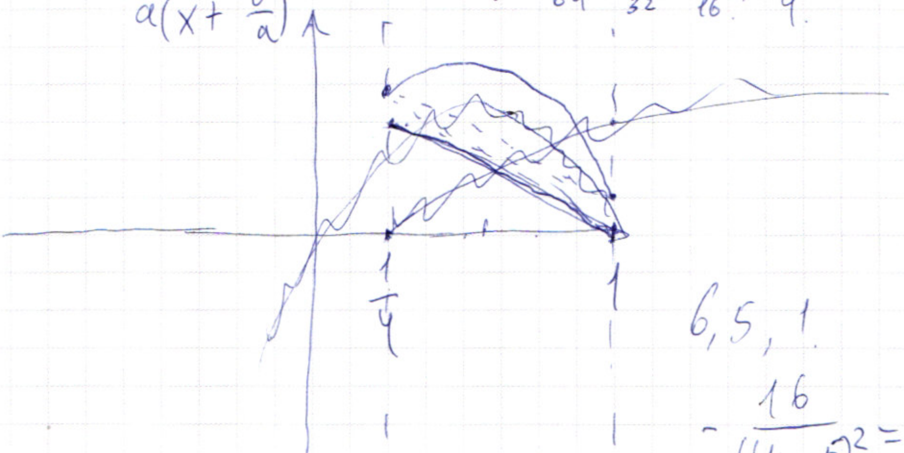
$f(t) = t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} = t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5}$ $189+17=206$.

$3^\varphi + 4^\varphi \ge 5^\varphi \Rightarrow \varphi \le 2 \Rightarrow \log_3 t \le 2 \Rightarrow t \le 9$.

6) $4 + \frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$x_в = \frac{36}{64} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16} > \frac{1}{4}$

$a(x+\frac{b}{a})$



6,5, 1

$-\frac{16}{(4x-5)^2} = 0x$

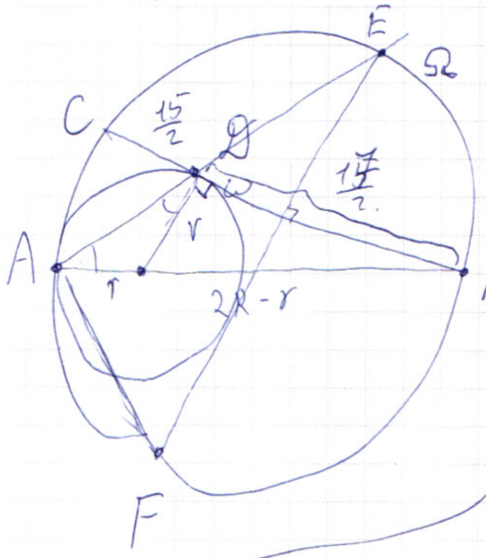
2) ~~$\begin{cases} x \ge 12y \text{ и } x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6 \\ (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90 \end{cases}$~~

~~$t = 6y;\ x \ge 2t$~~

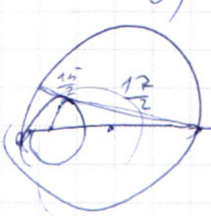
~~$\begin{cases} x^2 - 4xt + 4t^2 = \frac{xt}{3} - 2t - x + 6 \\ (x-6)^2 + (t-3)^2 = 90 \end{cases}$~~

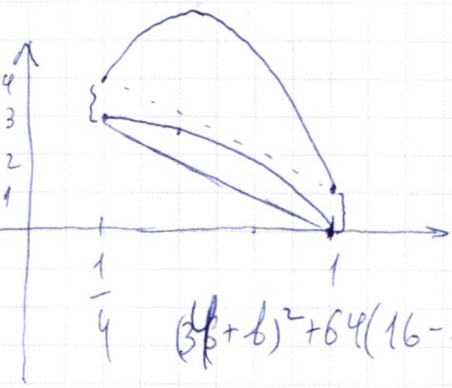
~~$3x^2 - 13xt + 12t^2 + 6t + 3x - 6 = 0$~~

~~$t = \varphi_{1,2}(x) = \frac{(13x+6) \pm \sqrt{(13x+6)^2 - 48(3x^2+3x-6)}}{24}$~~



6)





$(3b+b)^2 + 64(16-5b) \le 0$

$3 \le \frac{a}{4} + b \le 4$

$0 \le a + b \le 1$ $\Rightarrow 3 \le -\frac{3}{4}a \le 3 \Rightarrow -\frac{3}{4}a = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a = -4} \Rightarrow$

$\Rightarrow b \in [4; 5]$ $\quad x \ne \frac{5}{4};\ \frac{5}{4} > 1.$ $\quad 5b - 16 \le 0$

$b \le 3{,}2.$

$f \cap g;\ 4 + \frac{4}{4x-5} = -4x + b \Rightarrow 16x - 20 + 4 = -16x^2 + 20x + 4bx - 5b.$

Пусть $b = 4 \Rightarrow \frac{4}{4x-5} = -4x \Rightarrow 4 = -16x^2 + 20x. \Rightarrow 16x^2 - 20x + 4 = 0.$

$D = 400 - 256 = 144 = 12^2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{20 \pm 12}{32} = \{1; \frac{1}{4}\}.$

$b = 5.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)