МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№1

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}},\\ \sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin(2\alpha+2\beta-2\beta)-\sin2\alpha=-\frac{8}{17};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}},\\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta\,\cancel{+}-\sin2\alpha=-\frac{8}{17};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}},\\ \sin2\alpha=\frac{2}{\sqrt{17}}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\cancel{+}-\cos2\beta\right);\ *\end{cases}$$

1) если ~~si~~ $\cos(2\alpha+2\beta)=\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)}=\frac{4}{\sqrt{17}}$ ~~, а $\sin\alpha\neq0$~~

$* \ \sin2\alpha=\frac{2}{\sqrt{17}}(\cos(2\alpha+2\beta)-\cos2\beta)=-\frac{4}{\sqrt{17}}\sin\alpha\sin(2\beta+\alpha)$

$2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4}{\sqrt{17}}\sin\alpha\sin(2\beta+2\alpha-\alpha)=-\frac{4}{\sqrt{17}}\sin\alpha(\sin(2\alpha+2\beta)\cos\alpha-$
$\cos(2\alpha+2\beta)\sin\alpha)=-\frac{4}{\sqrt{17}}\sin\alpha\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos\alpha-\frac{4}{\sqrt{17}}\sin\alpha\right)\ \Big|:2\cos^2\alpha$

~~Если $\sin\alpha=0$ — может подходить~~

~~$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{17}}\sin\alpha\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{4}{\sqrt{17}}tg\alpha\right)$ — $\cos\alpha\neq0$ т.к.~~

$tg\alpha=-\frac{2}{\sqrt{17}}tg\alpha\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{4}{\sqrt{17}}tg\alpha\right)$

$tg\alpha(8tg\alpha-15)=0$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}tg\alpha=0,\\ tg\alpha=\frac{15}{8};\end{array}\right.$

2) Если $\cos(2\alpha+2\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)}=-\frac{4}{\sqrt{17}}$

$* \ \sin2\alpha=\frac{2}{\sqrt{17}}(\cos(2\alpha+2\beta)+\cos2\beta)=-\frac{4}{\sqrt{17}}\cos(\cancel{2}\alpha+2\beta)\cos\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4}{\sqrt{17}}\cos\alpha\cos(2\alpha+2\beta-\alpha)=-\frac{4}{\sqrt{17}}\cos\alpha(\cos(2\alpha+2\beta)\cos\alpha+$
$+\sin(2\alpha+2\beta)\sin\alpha)=-\frac{4}{\sqrt{17}}\cos\alpha\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\cos\alpha-\frac{1}{\sqrt{17}}\sin\alpha\right)\ \Big|:2\cos^2\alpha$

$tg\alpha=-\frac{2}{\sqrt{17}}\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}-\frac{1}{\sqrt{17}}tg\alpha\right)$

$(2tg\alpha-\cancel{15}\ 7)tg\alpha=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}tg\alpha=0,\\ tg\alpha=\frac{7}{2};\end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0; \frac{15}{8}; \frac{7}{2}$ – 3 значения

$\Rightarrow$ делить на $\cos\alpha$ – можно было

Ответ: $0; \frac{15}{8}; \frac{7}{2}$

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2x+2-2=\sqrt{(3y-2)(x-1)}, \\ 3(x-1)^2+\frac{1}{3}(3y-2)^2-\frac{4}{3}-3=4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3y-2)-2(x-1)=\sqrt{(3y-2)(x-1)}, \quad |^2 \qquad (3y-2)(x-1)\geq 0 \\ 9(x-1)^2+(3y-2)^2=25; \end{cases}$$

$a=3y-2 \quad b=x-1$

$$\begin{cases} a^2+4b^2-5ab=0, \\ 9b^2+a^2-25=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-4b)(a-b)=0 \\ 9b^2+a^2-25=0; * \end{cases} \Rightarrow \text{①}\ a=4b \text{ или } \text{②}\ a=b, \text{ тогда } ab\geq 0$$

*

1) $9b^2+16b^2=25 \Rightarrow 25b^2=25 \Rightarrow b=\pm 5,\ a=\pm 20$

2) $9b^2+b^2=25 \Rightarrow b^2=\frac{5}{2} \Rightarrow b=\pm\sqrt{2,5},\ a=\pm\sqrt{2,5}$

тогда при $a=-20,\ b=-5 \quad x=-4,\ y=-6$

$a=20,\ b=5 \quad x=6,\ y=\frac{22}{3}$

$a=b=\pm\sqrt{2,5} \quad x=1\pm\sqrt{2,5},\ y=\frac{2\pm\sqrt{2,5}}{3}$

Ответ: $(-4;-6)\ (6;\frac{22}{3})\ (1-\sqrt{2,5}; \frac{2-\sqrt{2,5}}{3})\ (1+\sqrt{2,5}; \frac{2+\sqrt{2,5}}{3})$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$ $\qquad x^2+6>0$

~~t~~ $t=x^2+6x$

$\Rightarrow t^{\log_4 3}+t \geq t^{\log_4 5} \quad |:t \neq 0$

$t^{\log_4 3-1}+1 \geq t^{\log_4 5-1}$

т.к. $\log_4 3-1<1-1=0 \Rightarrow t^{\log_4 3-1}+1$ - убывает монотонно

$\log_4 5-1>1-1=0 \Rightarrow t^{5-1}$ - возрастает монотонно

$\Rightarrow$ ~~буд~~ будут подходить все значения t от 0 до t_{max}, где t_{max} - наибольшее t (при котором выполняется равенство)

$\Rightarrow t_{max}^{\log_4 3}+t_{max} = t_{max}^{\log_4 5}$

Заметим, что $t_{max}=16$ - подходит

$16^{\log_4 3}+16=16^{\log_4 5}$

$\Rightarrow 1)\ t \leq 16 \quad ,2)\ t>0$

1) $x^2+6x \leq 16$

$x^2+6x-16 \leq 0$

$(x+8)(x-2) \leq 0 \Rightarrow x \in [-8;2]$

2) $x^2+6x>0$

$x(x+6)>0 \Rightarrow x \in (-\infty;-6) \cup (0;+\infty)$

$\Rightarrow$ решение 1 и 2

$x \in (0;2]$

Ответ: $(0;2]$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$f(a_1a_2\cdots a_n)=f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)$ – докажем по индукции по n

$f(a_1a_2)=f(a_1)+f(a_2)$

Переход $n\to n+1$

$f(a_1a_2\cdots a_na_{n+1})=f(a_1\cdots a_n)+f(a_{n+1})=f(a_1)+f(a_2)+\cdots f(a_n)+f(a_{n+1})$

Докажем, что $f(\frac{1}{a})=-f(a)$

$f(b\cdot\frac{a}{a})=f(b)=f(b\cdot a\cdot\frac{1}{a})=f(b)+f(a)+f(\frac{1}{a})$

$\Rightarrow f(\frac{1}{a})=-f(a)$.

Если $x=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots\cdots$, а $y=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots\cdots$

$f(\frac{x}{y})=\alpha_1f(p_1)+\alpha_2f(p_2)+\cdots-\beta_1f(p_1)-\beta_2f(p_2)-\cdots$

$f(\frac{x}{y})=(\alpha_1-\beta_1)[\frac{p_1}{4}]+(\alpha_2-\beta_2)[\frac{p_2}{4}]+\cdots$

т.к. $f(2a)=f(2)+f(a)=[\frac{2}{4}]+f(a)=f(a)$

и $f(3a)=f(3)+f(a)=[\frac{3}{4}]+f(a)=f(a)$

рассмотрим для x и y числа не кратные 2 и 3 т.к. для них результат будет одинаковым, так же для невзаимно простых x и y $f(\frac{x}{y})$ – будет таким же, если на общий делитель поделить x и y.

заметим, что $5\cdot7>27$ => рассмотрим x и y – простые. ~~т.к.~~ (и 5^2). если x и y – простые, то

$f(\frac{x}{y})<0 \Leftrightarrow [\frac{x}{4}]<[\frac{y}{4}]$

$x=1$ $y=5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 25$

$x = 5$ $\quad y = 11, 13, 17, 19, 23, 25$ (7 - не подходит.)

$x = 7$ $\quad y = 11, 13, 17, 19, 23, 25$

$x = 11$ $\quad y = 13, 17, 19, 23, \cancel{25}$

$x = 13$ $\quad y = 17, 19, 23, \cancel{25}$

$x = 17$ $\quad y = 23, \cancel{25}$

$x = 19$ $\quad y = 23, \cancel{25}$

$x = 23$ $\quad \cancel{y = 25}$

$x = 25$ $\quad y = \cancel{11}, 13, 17, 19, 23$

скажем, что $g(x)$ - количество чисел из $[3; 27]$:

они отличаются от x домножением на 2 или 3

g => количество удовлетворяющих пар =

$g(1)(g(5)+g(7)+\dots+g(25)) + g(3)(g(11)+g(13)+\dots+g(25)) + g(11)(\dots) +$
$(g(5)+g(7))$

$+\dots$ (для всех вышесказанных пар.) ~~на~~ т.к.

$g(1) = 10$

$g(5) = 4$

$g(7) = 3$

$g(11) = g(13) = 2$, для всех больших $= 1$

Тогда количество пар $= 229$

Ответ. 229

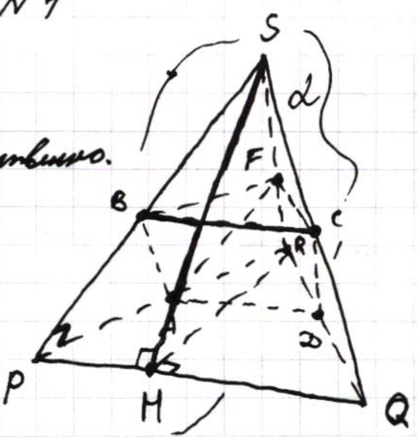
N7

A, B, C, D, F - середины

PR, PS, SQ, QR, RS - соответственно.

$P, A, B, F \in (PSR)$

т.к. P, A, B, F - лежат на 1 сфере



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

=> они лежат на 1 окр.

$BF \parallel PR$ (средняя линия)

$AF \parallel PS$ (средняя линия)

=> $APBF$ - параллелограмм

=> $APBF$ - прямоугольник

$PS \perp PR$ ($\triangle PSR$ - прямоуг.)

~~Аналогично~~ $CD \parallel SR$ (средняя линия $\triangle RSQ$)

=> C, D, S, R - лежат в одной пл-ти

C, D, S, R - лежат на 1 сфере => лежат на 1 окр.

Аналогично $BC \parallel PQ \parallel AD$

$ABCD$ - пар-м => прямоуг. => $AB \perp AD$

=> $SR \perp PQ$ ($SR \parallel AB$, $PQ \parallel AD$),

Тогда через SR можно провести пл-ть $\alpha \perp PQ$

$\alpha \cap PQ = H$, тогда по т. Пифагора для $\triangle SHQ, \triangle SHP, \triangle RHQ,$
$\triangle RHP$

$$\begin{cases} HQ^2 = SQ^2 - SH^2 = RQ^2 - RH^2; & ① \\ HP^2 = SP^2 - SH^2 = RP^2 - RH^2; & ② \end{cases}$$

вычтем из 1 2

$SQ^2 - SP^2 = RQ^2 - RP^2 \Rightarrow RP = \sqrt{RQ^2 + SP^2 - SQ^2} = \sqrt{5}$

тогда из т. Пифагора для $\triangle PSR$:

$RS = \sqrt{PR^2 + PS^2} = \sqrt{7}$

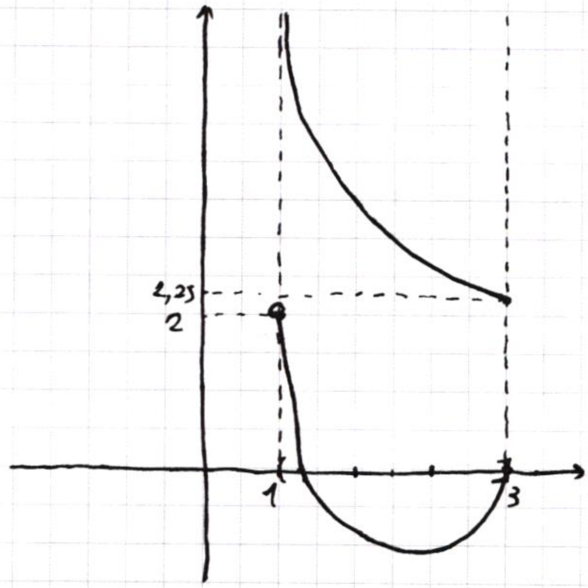
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№6

$$\begin{cases} ax+b \leqslant \dfrac{4x-3}{2x-2} = f(x) \\ ax+b \geqslant 8x^2-34x+30 = g(x) \end{cases}$$

для $x \in (1;3]$

построим графики $f(x)$ и $g(x)$



$f(x) = 2 + \dfrac{1}{2x-2}$ – гипербола

~~при~~ $x=1$ – асимптота

при $x=3$ $f(3) = 2,25$

$g(x) = 8x^2-34x+30$ – парабола

корни $x = 1,125$; 3

$g(1) = 2$

$ax+b$ – прямая

поскольку $f(x)$ и $g(x)$ выпуклы вниз =>

$ax+b$ – должна быть в точках 1 и 3 выше $g(x)$,

$ax+b$ – ниже касательной к $f(x)$ с тем же наклоном или ниже 2,25 в точке 3.

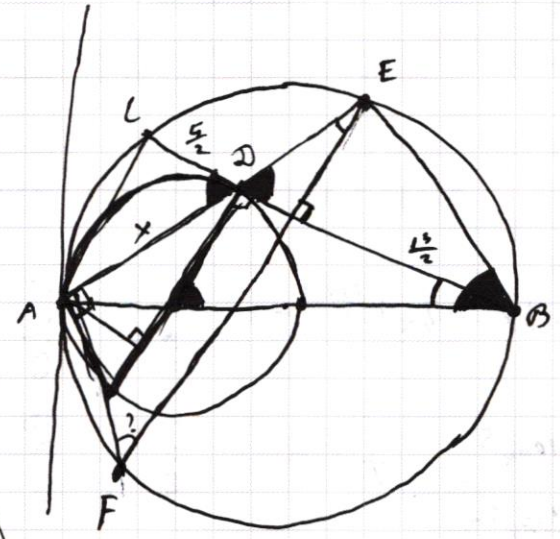
$$\begin{cases} a+b \geqslant 2 \\ 3a+b \geqslant 0 \\ f'(x_0) = -\dfrac{2}{(2x_0-2)^2} = a \\ b \leqslant -x_0(a-f(x_0)) \\ 3a+b \leqslant 2,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geqslant 2, & (1) \\ 3a+b \geqslant 0, & (2) \\ x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{-2a}}+2, \ \ \text{з}\ a<0 & (3) \\ b \leqslant -a+\sqrt{-\dfrac{2}{a}}+\dfrac{3}{2}, \ a<0 & (4) \\ 3a+b \leqslant 2,25; \ \ a \geqslant 0 & (5) \end{cases}$$

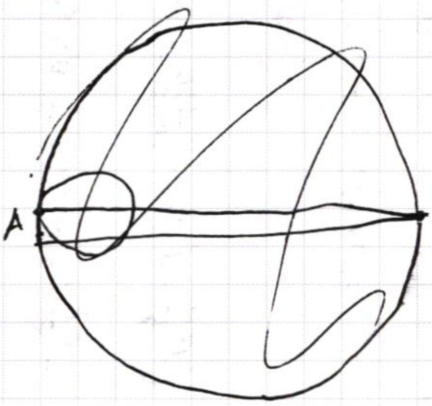
~~при варианте 4~~

$$\begin{cases} a+b \geqslant 2, \\ 3a+b \geqslant 0, \\ b \leqslant -a+\sqrt{\dfrac{2}{a}}+\dfrac{3}{2}, \ a<0 \\ 3a+b \leqslant 2,25; \ \ a \geqslant 0 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





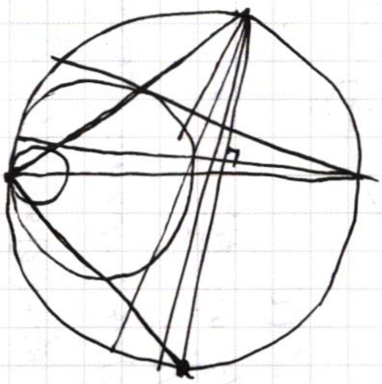
$BD^2 = D(D-d)$

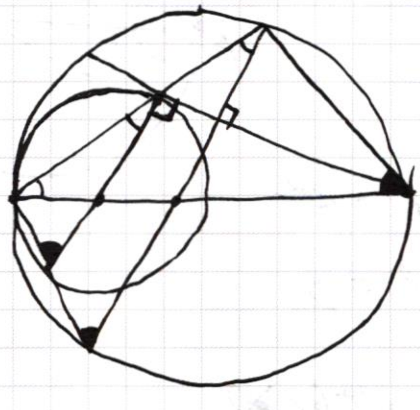
$\frac{D}{d} = \alpha$

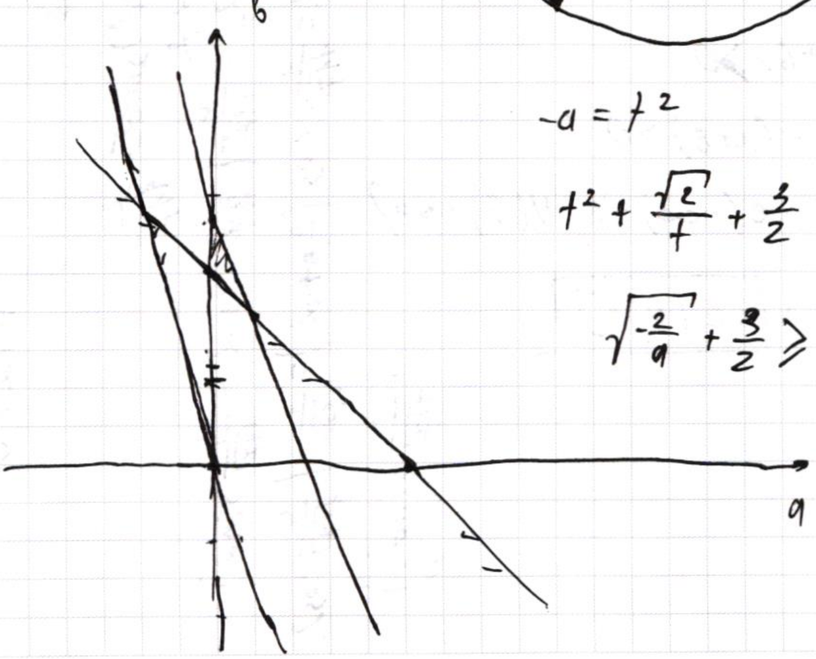
$\frac{AE}{AD} = \alpha$ $AD = x$ $D = \alpha d$

$AE = \alpha x$

$BD^2 =$







$-a = t^2$

$t^2 + \frac{\sqrt{2}}{t} + \frac{3}{2}$

$\sqrt{-\frac{2}{a}} + \frac{3}{2} \geq 2$

$2a + \sqrt{-\frac{2}{a}} + 2 \geq 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$t = x^2+6x$

$t^{\log_4 3} + t \geq \cancel{t} + t^{\log_4 5}$ $\quad t>0$

$t^{\log_4 3 - 1} + 1 \geq t^{\log_4 5 - 1}$

$\log_4 \frac{3}{4} < 0$

$\log_4 \frac{5}{4} > 0$

$\Rightarrow t^{\log_4 3 - 1}$ — убывает

$t^{\log_4 \frac{5}{4}}$ — возрастает

$\Rightarrow \cancel{t_{max} = 4}$

$t^{\log_4 3 - 1} + 1 = t^{\log_4 5 - 1}$

$t = \cancel{2}$

$\cancel{3+4=5}$ $\quad t = 4^2$

$\sqrt{3}+2 = \sqrt{5}$

$3^2+4^2=5^2$

$\cancel{18 = 4^2 + 3}$

$\Rightarrow \alpha = 2$

$\cancel{9+8=25}$

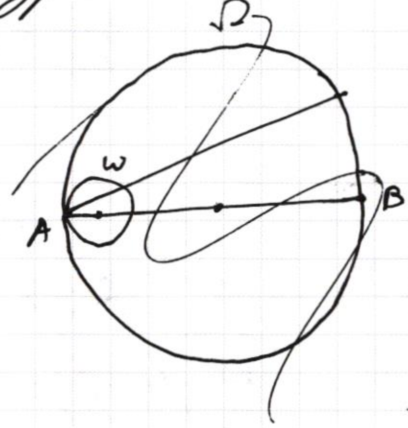
$\Rightarrow x^2+6x \leq 16$ $\quad x^2+6x>0$

$x^2+6x-16 \leq 0$ $\quad \Rightarrow x(x+6)>0$

$\cancel{(x+8)(x-2)}$ $\quad \Rightarrow x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$

$(x+8)(x-2) \leq 0$ $\quad \Rightarrow \boxed{x \in (0; 8]}$

$\Rightarrow x \in [2; 8]$



№2

$+\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \sin 2\alpha = +\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{17}}\left(\cos 2\beta - \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$\cancel{\cos(\theta+\omega)}$

$\cos(\theta-\omega) + \cos(\theta+\omega) =$

$= 2\cos\theta\cos\omega$

$\cos(\theta-\omega) - \cos(\theta+\omega) =$

$= 2\sin\theta\sin\omega$

№2 1) $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$2\beta+2\alpha-\alpha$

$\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha} = \sin 2\alpha = 2\sin(2\beta+\alpha)\sin\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{17}}$

$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}\sin(2\beta+\alpha) = \frac{4}{\sqrt{17}}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\cos\alpha - \frac{4}{\sqrt{17}}\sin\alpha\right)$

2) $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}\cos(2\beta+\alpha) = \frac{4}{\sqrt{17}}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\sin\alpha\right)$

$\sin\alpha \neq 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\,\alpha$ - ?

① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ ② $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta$

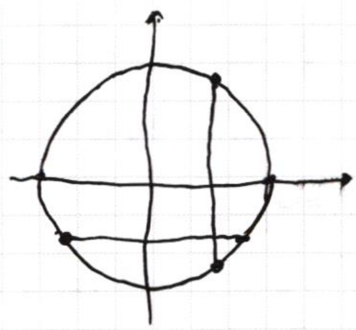
$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha$

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}, \\ \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \end{cases}$$

②$_2$ $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\sin(\theta+\omega)+\sin(\theta-\omega) = 2\sin\theta\cos\omega$

$\Rightarrow \cancel{2}\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{17}\cdot\left(-\frac{\sqrt{17}}{1}\right) = \boxed{\frac{4}{\sqrt{17}}}$



$\cancel{\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}}$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

①$_2$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha \pm \cancel{\sin}\cos 2\alpha = -1$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$tg\,2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$-\frac{4}{17}\pm\frac{4}{17}+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$tg\,\alpha = tg\left(-\frac{\arcsin\frac{8}{17}}{2}\right)$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 0 \\ \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}; \end{array}\right. \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi n}{2}; \Rightarrow tg\,\alpha = 0 \qquad \pm tg\left(\frac{\arcsin\frac{8}{17}}{2}\right)$$

$\alpha = \frac{-\arcsin\frac{8}{17}}{2}+\pi n \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}+\frac{\arcsin\frac{8}{17}}{2}+\pi n$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}; \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4; \end{cases}$$

$3y-2-2x+2$

$$\begin{cases} 3y-2x-\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}=3y-2x-\sqrt{(3y-2)(x-1)}=0 \\ \cancel{3x^2-6x}\ 3(x^2-2x+1)-3+\cancel{3y^2-\frac{4}{3}y+\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{6}}=4 \end{cases}$$

$3y^2-4y+\sqrt{6}-\sqrt{6}$

$2\sqrt{3}\cdot x=4 \Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$a-2b-\sqrt{ab}=0$

$3(x-1)^2+3(\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}})^2-\frac{4}{3}-3=4$

$(a+3b+5)(a+3b-5)$

$a=3y-2$

$b=x-1$

$(a-4b)(a+b)$

$$\begin{cases} a-2b-\sqrt{ab}=0, \\ 3b^2+3\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{4}{3}-3=4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-2b-\sqrt{ab}=0, \\ 3b^2+a^2=\frac{25}{3}; \end{cases}$$

$ab=a^2-4ab+4b^2$

$a^2-3ab+4b^2=0$

$c=-c'=5$

$b=b'=3$

$a=a'=1$

$\cancel{b^2-3ab}$ $b^2-3ab=-\frac{25}{3}$

$3b^2a^2+a^4=\frac{25}{3}$

$9b^2a^2=25-3a^4$ $25-3a^4=9a^2b^2=(a^2+4b^2)^2=\left(\frac{2a^2}{3}+\frac{25}{9}\right)^2$

$b^2=\frac{25}{9}-\frac{a^2}{3}$ $a^2=t$

$25-3t=\left(\frac{2}{3}t+\frac{25}{9}\right)^2=\frac{4}{9}t^2+\frac{100}{27}t+\frac{625}{81}$

1) $\cos\alpha=-\frac{4}{17}\cos\alpha-\frac{16}{17}\sin\alpha \Rightarrow$

$aa'=1$ $a=a'=1$

$bb'=4$ $b=1$ $b'=4$

$ab'+ba'=5$

$\left[\frac{2}{\sqrt{17}}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{4}{\sqrt{17}}\operatorname{tg}\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha\right.$

$\left(\frac{15}{17}+\frac{8}{17}\operatorname{tg}\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=0$

$y=\frac{a+2}{3}$

$x=b+1$

$(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=$ $c=c=0$

$=\underset{1}{aa'}x^2+\underset{4}{bb'}y^2+\underset{5}{(ab'+ba')}xy+\underline{\underset{0}{(bc'+cb')}y+\underset{0}{(ac'+ca')}x+\underset{0}{cc'}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

2 3 5 7 11 13 17 19

23

$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$

$f(a) = \alpha_1 \left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2 \left[\frac{p_2}{4}\right] + \cdots$

$f(1)$ $f\left(a \cdot \frac{b}{b}\right) = f(a) = f\left(\frac{ab}{b}\right) = f(ab) + f\left(\frac{1}{b}\right) = f(a) + f(b) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{b}\right) = -f(b)$

$\Rightarrow$

$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots$

$y = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots$

5
7
11
13
17
19
23

$f\left(\frac{x}{y}\right) = (\alpha_1 - \beta_1)\left[\frac{p_1}{4}\right] + (\alpha_2 - \beta_2)\left[\frac{p_2}{4}\right] + \cdots$

$\cdot\ p_1 = 2, 3 \Rightarrow \left[\frac{p_1}{4}\right] = 0$

$p_1^{\alpha_1} \geq p_2^{\alpha_2}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} < 1$

~~log~~ ~~$\ln x = \alpha_1 \ln p_1 + \alpha_2 \ln p_2 + \ldots + k \ln p$~~

$\frac{p_1^{\alpha_1}}{p_2^{\alpha_2}}$ $p_1^{\alpha_1} < 150 +$

$8 \cdot (4+3) + 10$

$\frac{8}{9} = 2^3 \cdot 3^{-2}$

$f\left(\frac{8}{9}\right) =$

+6

+2

+5

3 ·
4 · +150
6 · + 56
8 · + 10
9 · + 6
12 · + 2
16 · 5
18 ·
22 ·
27 ·

206
216
222
224
229

5 7
10 14
15 21
20

$4 + 3 + 2 + 2 + 4 = 15$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

1,25

3

$17 \cdot 17 = 119$ ... 289

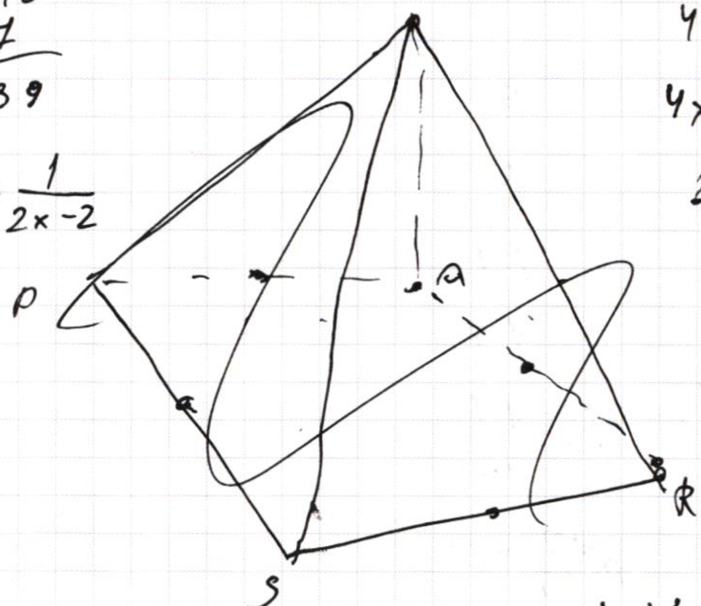
$\frac{4x-4+1}{2x-2}$

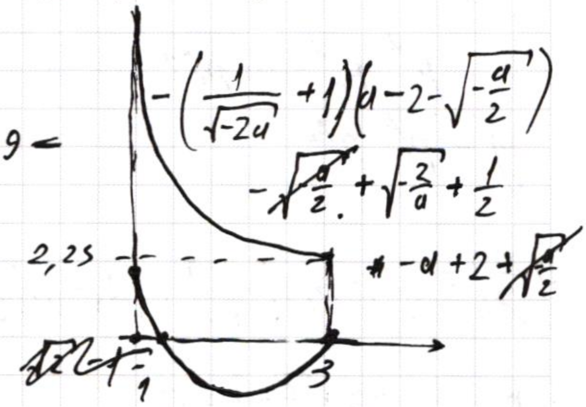
$8x^2-(34+a)x+30-b \leq 0$

$4-17+13$ $\quad 289-240=49$

$4x^2-17x+13$

$2+\frac{1}{2x-2}$





$289-$

$-\left(\frac{1}{\sqrt{-2a}}+1\right)\left(a-2-\sqrt{-\frac{a}{2}}\right)$

$-\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{-\frac{2}{a}}+\frac{1}{2}$

$-a+2+\sqrt{\frac{a}{2}}$

$1-h_1^2=4-h_2^2$

$2-h_1^2=x^2-h_2^2$

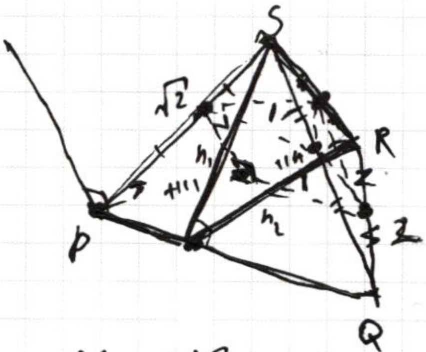
$f(x_0)=2+\sqrt{-\frac{a}{2}}$

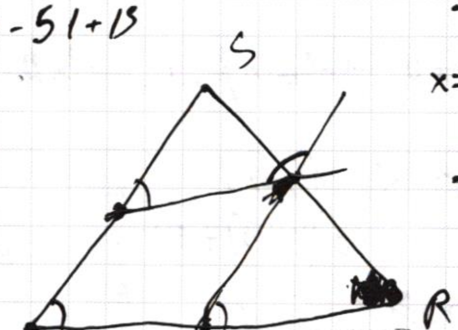
5

$x=\sqrt{5}$

$\sqrt{7}$

$36-51+13$



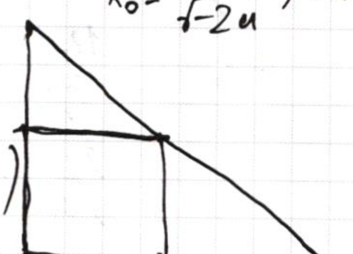


$(1-h_1)^2=(2-h_2)^2$

$x_0=\frac{1+2\sqrt{-2a}}{\sqrt{-2a}}+2$

$(2x_0-2)^2=-\frac{2}{a}$

$2x_0-2=\sqrt{-\frac{2}{a}}$



$xf'(x_0)-xf'(x_0)$

$2x_0=\sqrt{-\frac{2}{a}}+2$

$x\cdot f'(x_0)$ $\quad f(x)$

$xf'(x_0)-x_0(f'(x_0)-f(x))$

$x_0=\sqrt{\frac{1}{-2a}}+1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)