МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

$a^{\log_{12} b}$

$b^{\log_{12} a}$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

40 28

$-8x^2-30x-17=-\frac{3}{4}$ $|\cdot(-4)$

$\cancel{32x^2+120x+58-11=0}$

$\cancel{32x^2+}$ $-8x^2-30x-20=0$ $|:2$

$4x^2+15x+10=0$

$\frac{121}{4}-\frac{15\cdot 11}{4}+\frac{40}{4}=6$

$x_{1,2}=\frac{-15\pm}{8}$

$121-165+40=0$

210.

$-8\cdot\frac{121}{16_2}+\frac{15}{30}\cdot\frac{11}{4_2}-17=-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-\frac{34}{2}$

155

$5^{\log_{12}a}+a-a^{\log_{12}13}\geq 0$

$\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)$

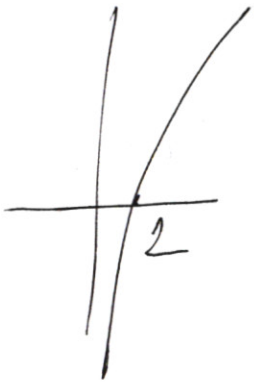
$\begin{array}{r} 85 \\ \times\ 85 \\ \hline \end{array}$

$5^{\log_{12}a}=a^{\log_{12}13}\cancel{-1}a$

$(80+5)^2=$

$5^{\log_{12}a}\geq a\left(a^{\log_{12}13-1}-1\right)$

$=6400+800+25=7225$



$17+8$

$a=1$

$a=12$

$\begin{array}{r} 34\cdot 6 \\ \times\ 6 \\ \hline 204 \end{array}$

$\frac{1+\frac{8}{17}}{2}=\frac{25}{34}$

$5+12($

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ [1] и $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{4}{5}$ [2]

1. Преобразуем ур-ие [1]

$\sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\cos(2\alpha)\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos(2\alpha)\sin(2\beta) = -1/\sqrt{5} - \sin(2\alpha)\cos(2\beta)$. [3]

2. Преобразуем равенство [2]!

$\sin(2\alpha)\cos(4\beta)+\cos(2\alpha)\sin(4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha)\left(\cos(4\beta)+1\right) + 2\sin(2\beta)\cos(2\beta)\cos(2\alpha) = -4/5$

Используем полученное равенство [3], подставив его.

$\sin(2\alpha)\left(\cos^2(2\beta) - \cancel{\sin^2(2\beta)} + \cos^2(2\beta) + \cancel{\sin^2(2\beta)}\right) +$

$+2\cos(2\beta)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}} - \sin(2\alpha)\cos(2\beta)\right) = -\frac{4}{5}$

$2\sin(2\alpha)\cdot\cos^2(2\beta) - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos(2\beta) - 2\sin(2\alpha)\cdot\cos^2(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\cos(2\beta) = \frac{2}{5} \Rightarrow \cos(2\beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ [4].

$\sin(2\beta) = \pm\sqrt{1-\cos^2(2\beta)} = \pm\sqrt{\frac{5-4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

3.~~8~~ а) $\begin{cases} \cos(2\beta) = \frac{2}{\sqrt5} \\ \sin(2\beta) = -1/\sqrt5 \\ \sin(2\alpha + 2\beta) = -1/\sqrt5 \end{cases}$

$\sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \cos(2\alpha)\sin(2\beta) = -1/\sqrt5$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin(2\alpha) - \frac{1}{\sqrt5}\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot(-\sqrt5)$

$-2\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha) = 1$

$-4\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cancel{\cos^2(\alpha)} - \sin^2(\alpha) - \cancel{\cos^2(\alpha)} - \sin^2(\alpha) = 0$

$-4\sin(\alpha)\cos(\alpha) - 2\sin^2(\alpha) = 0 \quad |:(-2)$

$2\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 0$

$\sin(\alpha)\left(2\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\right) = 0$

а.1) $\sin(\alpha) = 0 \Rightarrow tg(\alpha) = 0$

а.2) $2\cos(\alpha) + \sin(\alpha) = 0$

$\sin(\alpha) = -2\cos(\alpha)$, тогда

$tg(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{-2\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -2.$

б) $\begin{cases} \cos(2\beta) = \frac{2}{\sqrt5} \\ \sin(2\beta) = 1/\sqrt5 \\ \sin(2\alpha + 2\beta) = -1/\sqrt5 \end{cases}$

$\sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \cos(2\alpha)\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha)\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \cos(2\alpha)\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot\sqrt5$

$2\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha) + 1 = 0$

$4\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) - \cancel{\sin^2(\alpha)} + \cos^2(\alpha) + \cancel{\sin^2(\alpha)} = 0$

$4\sin(\alpha)\cos(\alpha) + 2\cos^2(\alpha) = 0$

т.к $tg(\alpha)$ существует

$2\cos(\alpha)\left(2\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\right) = 0 \quad |:2\cos(\alpha) \neq 0$

$2\sin(\alpha) + \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow 2\sin(\alpha) = -\cos(\alpha)$

$\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\cos(\alpha)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$tg(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{-\frac{1}{2}\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $tg(\alpha)=0$;

$tg(\alpha)=-2$;

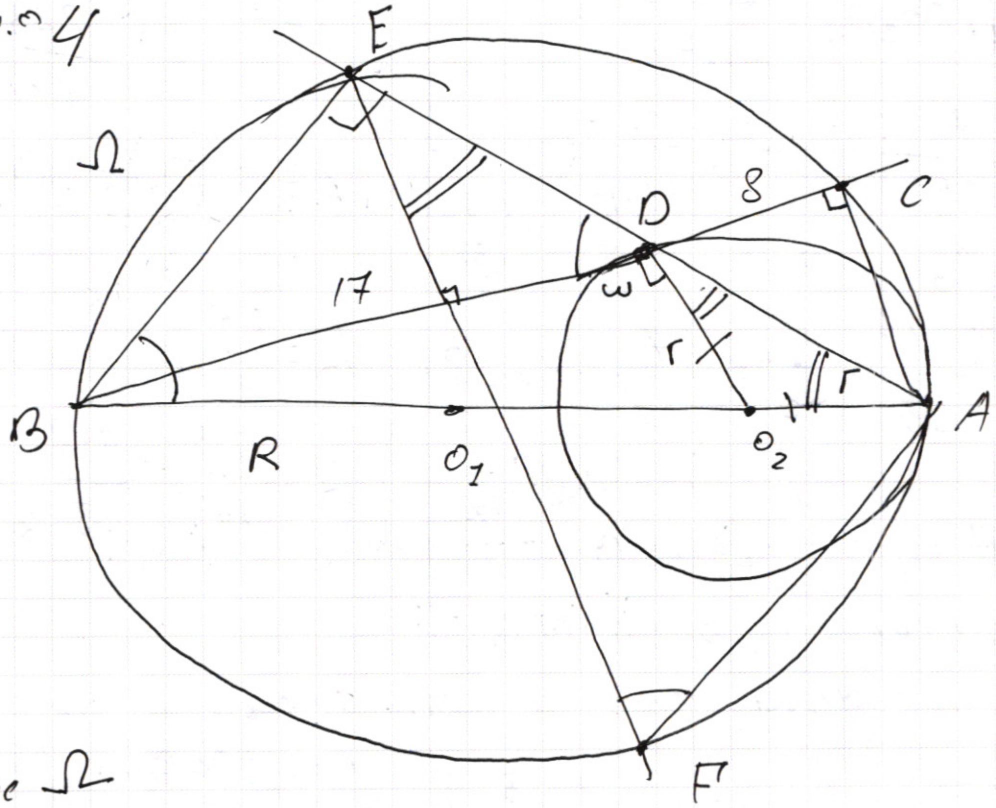
$tg(\alpha)=-1/2$.

Задача №4

$R=?$ $r=?$

$\angle AFE=?$

$S_{AEF}=?$



1) R - радиус Ω

r - радиус ω

$\triangle BDO_2$: $DO_2 \perp BD$ (касательная) $\Rightarrow$ Th. пиф: $17^2 + r^2 = (2R-r)^2$ [1]

(·) O_1 и (·) O_2 лежат на одной прямой, как центры кас-ся окр-тей ($O_1A \perp l$; $O_2A \perp l$, l = кас. через (·) A)

· $\angle BCA = 90°$ (AB = диаметр) $\Rightarrow \triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ по 3-м углам: $\angle B$ = общий; $\angle BDO_2 = \angle BCA = 90°$

$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{BA} \Rightarrow \frac{17}{25} = \frac{2R-r}{2R}$ $\quad 34R = 50R - 25r$

$25r = 16R$

$R = \frac{25}{16} r$

2) Подставим в ур-ие [1]

$17^2 + r^2 = (2R - r)^2$

$17^2 + r^2 = \left(\frac{25}{8} r - r\right)^2$

$17^2 + r^2 = \left(\frac{17}{8}\right)^2 r^2$

$17^2 = r^2\left(\left(\frac{17}{8}\right)^2 - 1\right)$

$17^2 = r^2 \cdot \frac{289-64}{64}$

$17^2 = r^2 \cdot \frac{225}{64}$

$17 = r \cdot \frac{15}{8} \Rightarrow r = \frac{17 \cdot 8}{15}$

$\left[r = \frac{136}{15}\right]$

$R = \frac{25}{16} \cdot r$

$\left[R = \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{16}_{2}} \cdot \frac{17 \cdot \cancel{8}}{\cancel{15}_{3}} = \frac{17 \cdot 5}{6} = \frac{85}{6}\right]$

3) ~~$\angle DO_2B =$~~

$\sin(\angle DO_2B) = \frac{17}{2R - r} =$

$= \frac{17}{2 \cdot \frac{85}{\cancel{6}_{3}} - \frac{136}{15}} = \frac{17}{\frac{85 \cdot 5}{15} - \frac{136}{15}} =$

$= \frac{17 \cdot 15}{289} = \frac{\cancel{17} \cdot 15}{\cancel{17} \cdot 17} = \frac{15}{17}$

$\cos = \sqrt{\frac{289 - 225}{289}} = \frac{8}{17}$

$\angle DAO_2 = \frac{1}{2} \cdot \angle DO_2B$

(вписанный, опир на ту же дугу, что и центральный в окр ω) угол острый в прям △.

$\angle DAO_2 = \frac{1}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{15}{17}\right)$ $\quad \cos\angle DAB = $ ~~$\sin\angle DAO_2 =$~~ $\sqrt{\frac{1 + \cos DO_2B}{2}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

· $\angle EFA = \angle EBA$ (опир на дугу ECA)

· $\angle BEA = 90°$ (опир. на диаметр AB)

$\angle EBA = 90° - \angle EAB = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{15}{17}\right) = \angle EFA$

4) на рисунке $\angle EFA =$ "(", а "|||" $= 90 - \angle EFA$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & \left[\frac{3}{4}\right] \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ (x-2)^2-4+(3y-3)^2-9=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Введем замену. $a=x-2$; $b=y-1$.

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}; \begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab & [1] \\ a^2+9b^2=25 & [2] \end{cases}$$

$a^2-5ab+4b^2=0$. Рассмотрим следствие [2]

$a^2-ab+4b^2-4ab=0$

$a(a-b)+4b(b-a)=0$

$(a-b)(a-4b)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right.$

1) $\begin{cases} a=b \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$ $10b^2=25$, $2b^2=5$, $b^2=\frac{5}{2}$

$b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$; $a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$b=\sqrt{5/2}$, $a=\sqrt{5/2}$; $b=-\sqrt{5/2}$, $a=-\sqrt{5/2}$

2) $\begin{cases} a=4b & \cancel{4b} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$,

$\begin{cases}(4b)^2+9b^2=25\\ a=4b\end{cases}$, $\begin{cases}16b^2+9b^2=25\\ a=4b\end{cases}$ $\begin{cases}25b^2=25\\ a=4b\end{cases}$

$\begin{cases}b=\pm 1\\ a=\pm 4\end{cases}$ $\Rightarrow$ ~~$b=1$~~ ~~$a=4$~~ ~~$b=\pm 1$~~ ~~$a=4$~~ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=1\\ a=4\end{cases}\\ \begin{cases}b=-1\\ a=-4\end{cases}\end{array}\right.$

Вернемся к исходной ~~системе~~.

Замене: $a=x-2$, $b=y-1$

а) $\begin{cases}\sqrt{\frac{5}{2}}=x-2\\ \sqrt{\frac{5}{2}}=y-1\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x=2+\sqrt{\frac{5}{2}}$, $y=1+\sqrt{5/2}$

б) $\begin{cases}-\sqrt{5/2}=x-2\\ -\sqrt{5/2}=y-1\end{cases}$ $x=2-\sqrt{5/2}$, $y=1-\sqrt{5/2}$

в) $\begin{cases}4=x-2\\ 1=y-1\end{cases}$ $x=6$, $y=2$

г) $-4=x-2$ $x=-2$

$-1=y-1$ $y=0$

. Из ~~ел~~ [3] следует, что $x-2y\geq 0$ $\Rightarrow$ проверим это

• сл. а: $2+\sqrt{5/2}-2(1+\sqrt{5/2})=2+\sqrt{\frac{5}{2}}-2-2\sqrt{5/2}=-\sqrt{5/2}<0$

пара "а" не подходит.

• сл. б $2-\sqrt{\frac{5}{2}}-2(1-\sqrt{5/2})=\cancel{2}-\sqrt{\frac{5}{2}}-\cancel{2}+2\sqrt{5/2}=\sqrt{5/2}\geq 0$

• сл. в $6-2\cdot 2=6-4=2\geq 0$

• сл. ~~в~~ г $-2-0=-2<0$ не подходит

случаи

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 7

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Можно убе~~ $\Rightarrow$ пары $(x;y)$ "б" и "в" также соответствуем подкор. выр. ≥ 0 ур-ся [3]

$(x-2)(y-1)$, $x=6; y=2 \Rightarrow 4>0$

$x = 2-\sqrt{\frac{5}{2}}, y = 1-\sqrt{\frac{5}{2}}$; $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \geq 0$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

Задача № 3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

Сделаем замену $a = x^2+18x$

$5^{\log_{12}a} + a \geq |a|^{\log_{12}13}$ ТК $5^{\log_{12}a}$, то $a>0 \Rightarrow |a| = a$

$5^{\log_{12}a} + a - a^{\log_{12}13} \geq 0$

$5^{\log_{12}a} + a(1-a^{\beta}) \geq 0$, где: $1+\beta = \log_{12}13$

$\beta = \log_{12}13 - 1 = \log_{12}\left(\frac{13}{12}\right) = \log_{12}\left(\frac{12+1}{12}\right) = \log_{12}\left(1+\frac{1}{12}\right) =$

$5^{\log_{12}a} + a\left(1-a^{\log_{12}(1+\frac{1}{12})}\right) \geq 0$

$\Rightarrow 5^{\log_{12}(a)} \geq 5^{\log_5\left(a^{\log_{12}13}-a\right)}$ $5^x \uparrow\uparrow \Rightarrow$

$\log_{12}a \geq \log_5\left(a^{\log_{12}13} - a\right)$; $\log_{12}a \geq \log_5\left(a\left(a^{\log_{12}13-1}-1\right)\right)$

$\log_{12}a \geq \log_5 a + \log_5\left(a^{\log_{12}13-1}-1\right)$ ...

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 8

(Нумеровать только чистовики)

Выходит, что $(\triangle O_2DA = p/б)$

$\angle EFA = \angle FBA$; $\angle EAB = 90 - \angle EBA = \angle O_2DA \Rightarrow$

$\angle EDB = 90 - \angle ADO_2 \Rightarrow \angle FEA = 90 - \angle EDB$

$\Rightarrow \angle AEF + \angle EFA = 90°! \Rightarrow EF = 2R$

$\cancel{\sin(EFA)} = \cos\angle DAB = \cos\angle AEF = \dfrac{AE}{EF}$

$AE = \dfrac{5}{\sqrt{34}} \cdot 2R = \dfrac{2 \cdot 5}{\sqrt{34}} \cdot \dfrac{85}{6} = \dfrac{425}{6\sqrt{34}}$

$\sin\underset{\text{острый}}{\angle AEF} = \sqrt{\dfrac{34-25}{34}} = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$; $\left[AF = 2R \cdot \sin\angle AEF = 2R \cdot \dfrac{3}{\sqrt{34}}\right]$

$\cancel{S_\triangle AEF = \dfrac{1}{2} \cdot \sin AEF \cdot AE \cdot EF = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{34}} \cdot \dfrac{485 \cdot 5}{6 \cdot \sqrt{34}} \cdot \dfrac{2 \cdot 85}{6}}$

$\cancel{= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{34}} \cdot \dfrac{5}{\sqrt{34}} \cdot 2 \cdot \dfrac{85}{6}}$

$S_\triangle = \dfrac{1}{2} \cdot AE \cdot AF = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5}{\sqrt{34}} \cdot 2 \cdot \dfrac{85}{6} \cdot 2 \cdot \dfrac{85}{6} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{34}} =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 2R \cdot \dfrac{5}{\sqrt{34}} \cdot 2R \cdot \dfrac{3}{\sqrt{34}} = \dfrac{30}{34} \cdot \dfrac{85}{6} \cdot \dfrac{85}{6} = \cancel{\dfrac{85^2 \cdot 15}{16 \cdot 8 \cdot 34}} = \dfrac{85^2}{34 \cdot 6} = \dfrac{7225}{204}$

Ответ: 1) $r(\omega) = \dfrac{136}{15}$;

2) $R(\Omega) = \dfrac{85}{6}$;

3) $\angle EFA = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{15}{17}\right)$;

4) $S_\triangle = \dfrac{7225}{204}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 7

т. K, L, M, P = середины соотв. сторон

$PM = x = \frac{BC}{2}$ (ср. линия $\triangle BCD$)

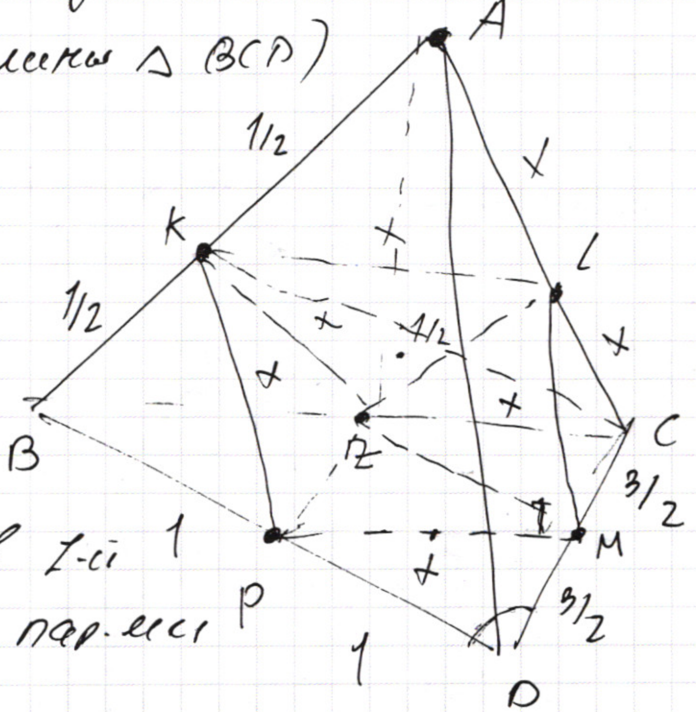
4-к KLMP:

$KP \parallel AD$; $KP = \frac{AD}{2}$

$ML \parallel AD$; $ML = \frac{AD}{2}$

аналог. PM и KL

=> KLMP лежит в 1-ой плоскости; KLMP = пар-м



$\cdot \triangle ABC$ = р/б $(BC = AC = 2x)$

KLZC = пар-м, т.о. $KZ = AL = LC$ в $\triangle ABC$

KLZ = р/б $ZL = 1/2$

Задача № 5

$f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

простые числа из пр-к

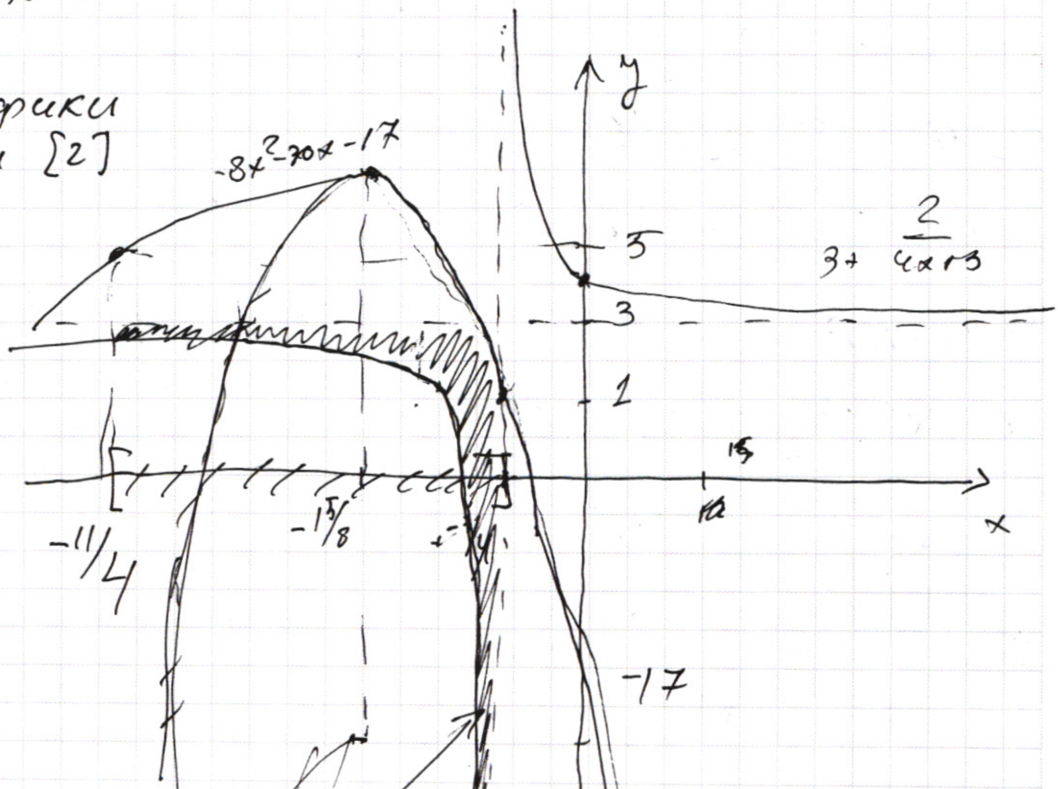
2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 17

Задача № 6

$$3 + \underbrace{\frac{2}{4x+3}}_{} \le ax + b \le -8x^2 - 30x - 17$$

[2] [1]

Изобразим графики функции [1] и [2]



мн-во, которому должно удовлетворять $y = ax + b$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-2)^2-4+(3y-3)^2-9=12$ $\quad 3\cdot 2$

$12+13$

$(x-2)^2+3(y-1)^2=25$ $\quad x-2y>0$

$3+2/3$ $\quad -\frac{3}{4}$ $\quad x>2y$ $\quad =\frac{15^2}{8^2}\cdot 8$

$x(y-1)-2\cancel{y}(y-1)$ $\quad -\frac{30}{16}=-\frac{15}{8}$

$(x-2)(y-1)$ $\quad (x-2)(y-1)\geq 0$

$(3y-3)^2=$ $\quad x\geq 2$

$x-2-$ $\quad =9y-18y+9=$ $\quad y\geq 1$

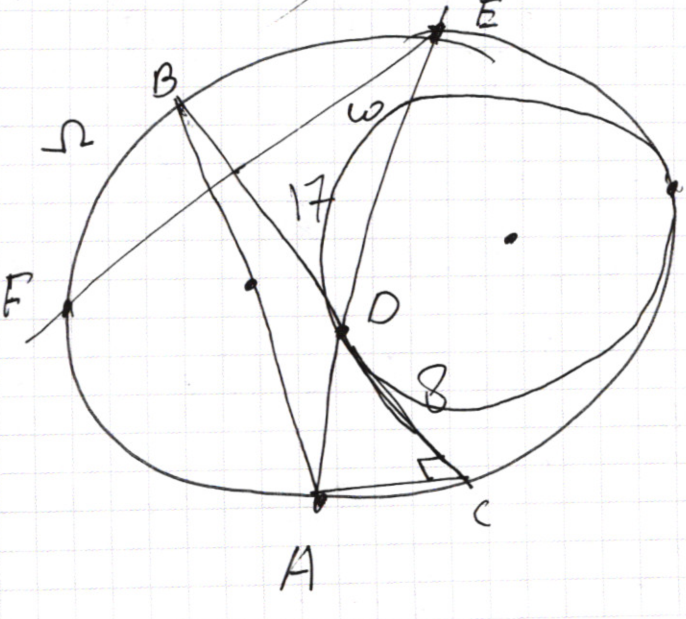
$x-2=-2(y-1)$ $\quad =9(y-1)^2$

$x=6$
$y=2$

$x-2-2y+2$ $\quad 9+4+12$

$13+12=25$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ $\quad x-2y$ $\quad \cancel{2}+\sqrt{\frac{5}{2}}-\cancel{2}-2\sqrt{5/2}<0$



$3^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x\geq \sqrt[\log_{12}13]{x^2+18x}$

$\log_{12}(13\cdot 12+1)=$

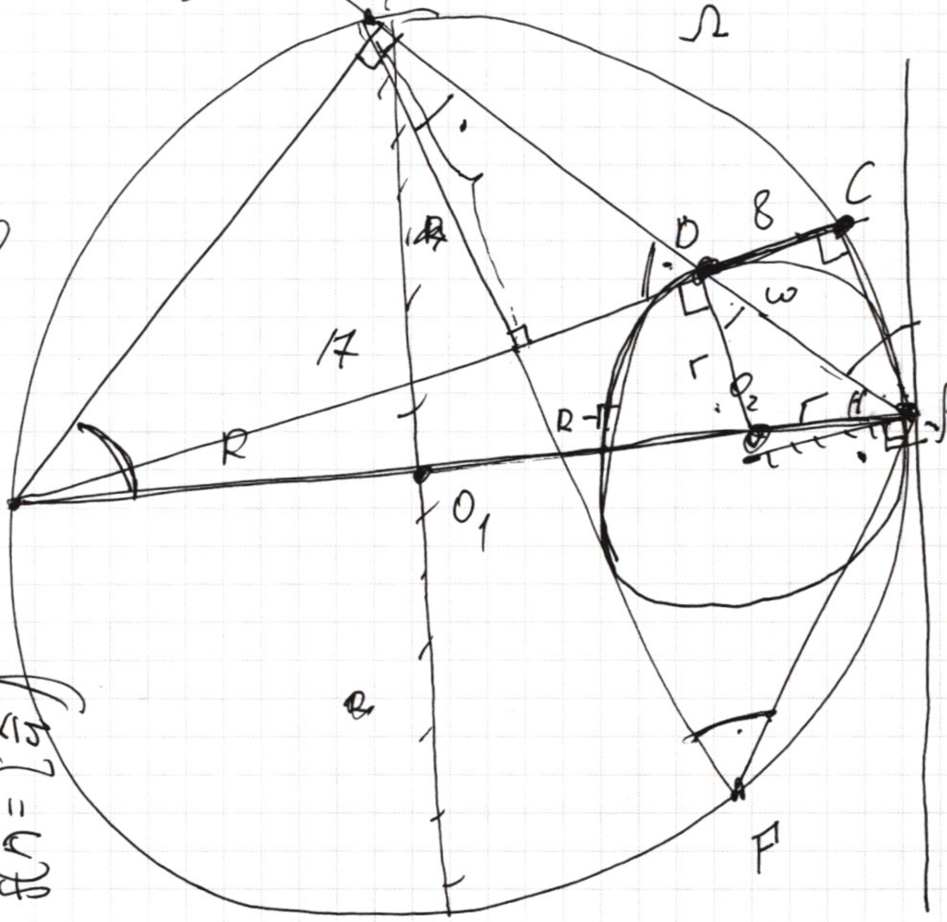
$\log_{12}(ab)=$

$\log_{12}{12\cdot 1}=\log_{12}$

R, r
∠AFE
S_{AEF}

$-8\cdot\frac{9}{16}+30\cdot\frac{3}{4}$ $\quad -9+$ $\quad \frac{36}{2}-17=1$

$\frac{17+8}{17}=\frac{2R}{r}$



$17^2+r^2=(2R-r)^2$ $\qquad \frac{225}{8}+30\cdot\frac{15}{8}-17^2$ $\qquad 50-34=$

$17+8=$ $\qquad \frac{2450-289\cdot 8}{8}$ $\qquad 85\cdot 5=425$ $\qquad 289\cdot 8=2312$

$\frac{289-64}{225}$ $\qquad 25-8$

$17\cdot 6=116$ $\qquad 17\cdot 8=136$ $\qquad 8+5=13$

$17\cdot 5=85$ $\qquad 11-3$ $\qquad 10-7$ $\qquad 15-6$

$(100-15)5$ $\qquad 500-75$ $\qquad 425-136=289$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $tg(\alpha) = ?$

$\sin(2(\alpha+2\beta)) + \sin(2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$\cancel{2\alpha = x}$

$\cancel{2\beta = y}$

$\cancel{\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5}}$

$\cancel{\sin}\ 2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\left(\cos(\alpha)\cos(2\beta) - \sin(\alpha)\sin(2\beta)\right) = -\frac{4}{5}$

$\left(\sin(\alpha)\cos 2\beta + \cos(\alpha)\sin(2\beta)\right)\left(\cos(\alpha)\cos 2\beta - \sin(\alpha)\sin 2\beta\right) =$

$\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos^2 2\beta - \sin^2(\alpha)\sin 2\beta\cos 2\beta +$

$+ \cos^2(\alpha)\cdot\sin(2\beta)\cos(2\beta) - \cos(\alpha)\sin(\alpha)\sin^2(2\beta) + = \times\frac{1}{2}$ $\sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha\cos^2 2\beta - \sin^2(\alpha)\sin(4\beta) +$

$+ \cos^2(\alpha)\cdot\sin(4\beta) - \sin^2(2\beta)\cdot\sin(2\alpha) + \sin(2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha)\left(\cos^2(2\beta) - \sin^2(2\beta) + 1\right) +$ $+\cos^2(2\beta) + \sin^2(2\ldots$

$+\sin(4\beta)\left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha)\cdot 2\cos^2(2\beta) + \sin(4\beta)\cdot\cos(2\alpha) =$

$= \frac{2}{\frac{17}{8}+1}$; $\frac{2}{1+\cos 2\alpha}$

$x = 6$ $12 - 6 - 4 + 2$

$y = 2$

$= 1 - 2\cos^2(\alpha) = \frac{17}{2} = (\cos\ldots)$; $\frac{17}{15} = (\cos\ldots$

$\frac{34}{17+8} = \frac{34}{25}$

22.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\cos(2\alpha)\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin(2\alpha)\cos(4\beta)+\cos(2\alpha)\cancel{\sin(4\beta)}+\sin(2\alpha)=-\frac{4}{5}$$

$\sin(4\beta)$

$$\sin(2\alpha)\left(\cos(4\beta)+1\right)+2\cos(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)\cdot\sin(2\beta)=-\frac{4}{5}$$

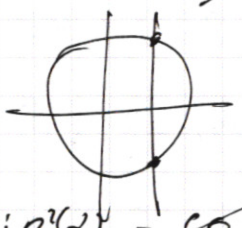
$$\cos(2\alpha)\cdot\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}-\sin(2\alpha)\cos(2\beta)$$

$$\sin(2\alpha)\left(\cos^2(2\beta)-\cancel{\sin^2(2\beta)}+\cos^2(2\beta)+\cancel{\sin^2(2\beta)}\right)+$$

$$+2\cdot\cos(2\beta)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}-\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)\right)=-\frac{4}{5}$$

$$\cancel{2\sin(2\alpha)\cos^2(2\beta)}-\frac{2}{\sqrt5}\cos(2\beta)-\cancel{2\sin(2\alpha)\cos^2(2\beta)}=-\frac{4}{5}$$

$$-\frac{2}{\sqrt5}\cos(2\beta)=-\frac{4}{5}$$



$$-2\sin(\alpha)\cos(\alpha)+\cancel{\cos^2(\alpha)}-\sin^2(\alpha)-\cancel{\cos^2(\alpha)}-\sin^2(\alpha)=0$$

$$-2\sin(\alpha)\cos(\alpha)-2\sin^2(\alpha)$$

$\frac{\sin}{\cos}$ $\qquad \cos 2\beta=\frac{2\sqrt5}{5}=\frac{2}{\sqrt5}$

$$\sin(2\beta)=\sqrt{1-\cos^2(2\beta)}=$$

$$=\sqrt{\frac{5-4}{}}\qquad (x-2)^2+(3y-3)^2$$

$$x^2+9y^2-4x-18y-12=0$$

$$x^2-4x+9y^2-18y-12=0$$

$$3(y^2-6y \qquad -9y^2+18y+14$$

$$x.\ D/4=2\cancel{4}-9y^2+18y+12$$

$x-2$

$2-\sqrt{}$

-2

$1-\sqrt{}-1$