МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{5}$

$$\begin{cases}\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin2\alpha\cdot\cos4\beta+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha+\sin2\alpha=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

$\cos4\beta=2\cos^2 2\beta-1$

$2\sin2\alpha\cos^2 2\beta+2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\cos2\beta(\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha)=-\frac{1}{5}$

$\cos2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)=-\frac{1}{5}\Rightarrow\cos2\beta=\frac{1}{\sqrt5};\ \sin2\beta=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

1a) $\sin2\alpha+2\cos2\alpha=-1$

$t=\cos2\alpha;\ \sin2\alpha=\sqrt{1-t^2}$

$\sqrt{1-t^2}+2t=-1$ $\qquad 2t+1\le0$

$\sqrt{1-t^2}=-2t-1$ $\qquad \boxed{t\le-\frac{1}{2}}$

$\cancel{1}-t^2=4t^2+4t+\cancel{1}$

$5t^2+4t=0$

$\left[\begin{array}{l}t=0\text{ не удовл. ОДЗ.}\\ t=-0{,}8\Rightarrow\cos2\alpha=-0{,}8;\ \sin2\alpha=0{,}6.\end{array}\right.$

$\sin^2\alpha=\frac{1{,}8}{2};\ \sin\alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{10}};\ \cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\boxed{tg\alpha=3}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

1б) $t = \cos 2\alpha$; $\sin 2\alpha = -\sqrt{1-t^2}$

$-\sqrt{1-t^2} + 2t = -1$ $\qquad 2t+1 \geq 0$

$\sqrt{1-t^2} = 2t+1$ $\qquad \boxed{t \geq -\frac{1}{2}}$

$\left[\begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = 0; \sin 2\alpha = -1. \\ t = -0{,}8 \text{ не удовл. ОДЗ} \end{array}\right.$

$1 - 2\sin^2\alpha = 0.$

$\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\alpha = (-1)\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -1.$

2а) $\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$ $\qquad \cos 2\alpha = t$; $\sin 2\alpha = \sqrt{1-\cos^2 2\alpha}$

$\sqrt{1-t^2} - 2t = -1$ $\qquad 2t-1 \geq 0.$

$\sqrt{1-t^2} = 2t-1$ $\qquad \boxed{t \geq \frac{1}{2}}$

$\left[\begin{array}{l} t = 0 \text{ не удовл. ОДЗ.} \\ t = 0{,}8 \Rightarrow \cos 2\alpha = 0{,}8; \sin 2\alpha = 0{,}6. \end{array}\right.$

$1 - 2\sin^2\alpha = 0{,}8.$

$\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$ $\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$

2б) $\sin 2\alpha = -\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}$ $\qquad \cos 2\alpha = t.$

$-\sqrt{1-t^2} - 2t = -1$ $\qquad 1-2t \geq 0.$

$\sqrt{1-t^2} = 1-2t$ $\qquad \boxed{t \leq \frac{1}{2}}$

$\left[\begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = 0; \sin 2\alpha = -1; \operatorname{tg}\alpha = -1. \\ t = 0{,}8 \text{ не удовл. ОДЗ.} \end{array}\right.$

Ответ: -1; $\frac{1}{3}$; 3.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$2xy-12y-x+6=(2y-1)(x-6)$

$x^2+36y^2-12x-36y=(x-6)^2+9(2y-1)^2-45.$

$$\begin{cases} (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \\ x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \end{cases}$$

$a=x-6$

$b=2y-1.$

$$\begin{cases} a^2+9b^2=90. \\ a-6b=\sqrt{ab} \end{cases}$$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$D=169b^2-144b^2=25b^2.$

$a=\dfrac{13b\pm5b}{2}$ $\left[\begin{array}{l} a_1=9b \\ a_2=4b \end{array}\right.$

1) $a=9b$:

$90b^2=90.$

$\boxed{b=\pm1.}$

$\begin{cases} a=9 \\ b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-9 \\ b=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$

$a=9\Rightarrow x=15.$ $b=1\Rightarrow y=1$

$a=-9\Rightarrow x=-3$ $b=-1\Rightarrow y=0.$

2) $a=4b$:

$\cancel{25}^{5}b^2=\cancel{90}^{18}$

$\boxed{b=\pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}$

$b = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$; $a = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$; $x = \frac{12\sqrt{10}}{5} + 6 = \frac{12\sqrt{10}+30}{5}$

$y = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{5}+1}{2} = \frac{3\sqrt{10}+5}{10}$ не соотв. ОДЗ.

$b = -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$x = a + 6$. $\quad a + \cancel{6} \geq 6b + \cancel{6}$.

$y = \frac{b+1}{2}$ $\quad \boxed{a \geq 6b}$

Ответ: $(x; y) = (15; 1)$; $(-3; 0)$

№3.

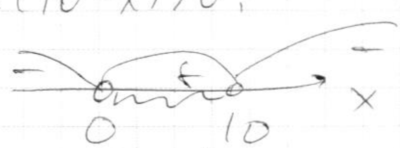
$\boxed{a^{\log_b c}}$ пусть $c = a^x \Rightarrow a^{\log_b a^x} = a^{x\log_b a} = (a^x)^{\log_b a} = c^{\log_b a}$

$\boxed{a^{\log_b c} = c^{\log_b a}}$

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 > 0$.

$x(10-x) > 0$.



$x \in (0; 10)$

$a = 10x - x^2$

$a + a^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 a}$

$a + a^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$.

ф-ии монотонно возрастают и пересекаются 1 раз.

$a = 9$:

$9 + 16 = 25$

при $a = 9$ ф-ии пересекаются.

при $a < 9$ неравенство выполняется.

$\boxed{a \in (0; 9]}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x - x^2 \leq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0.$

$D = 100 - 36 = 64 \Rightarrow 2к.$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{2} = 5 \pm 4.$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = 9 \\ x_2 = 1 \end{array}\right.$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

№5.

$f(ab) = f(a) + f(b).$

$\cancel{f(ab) = f(k\cdot ab) + f\left(\frac{ab}{k}\right) = f(k) + f(ab) + f(ab)\ f\left(\frac{ab}{k}\right)}$

$f(a) = f(k\cdot a) + f\left(\frac{1}{k}\right) = f(k) + f(a) + f\left(\frac{1}{k}\right)$

$f(k) = -f\left(\frac{1}{k}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \neq$

$f(z)$, где $z \in N$: $f(z) = \left[\frac{p_1}{4}\right] + \left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{p_n}{4}\right]$, где p_1, p_2, p_n – простые делители z.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \left[\frac{p_{x1}}{4}\right] + \left[\frac{p_{x2}}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{p_{xn}}{4}\right] - \left[\frac{p_{y1}}{4}\right] - \left[\frac{p_{y2}}{4}\right] - \left[\frac{p_{ym}}{4}\right]$

$f(2)=0$ $f(6)=0$ $f(10)=1$ $f(14)=1$ $f(18)=0$ $f(22)=2$

$f(3)=0$ $f(7)=1$ $f(11)=2$ $f(15)=1$ $f(19)=4$ $f(23)=5$

$f(4)=0$ $f(8)=0$ $f(12)=0$ $f(16)=0$ $f(20)=1$ $f(24)=0$

$f(5)=1$ $f(9)=0$ $f(13)=3$ $f(17)=4$ $f(21)=1$ $f(25)=2$

$f(x)=0$ может быть в 10 различных случаях.

При $f(x)=0$ y может принять 14 различн. знач. $f(y)>0$

$f(x)=1$ 7 различ. случаев

$f(y)>1$ 7 различ. случаев

$f(x)=2$ 3 различ. случаев

$f(y)>2$ 4 различ. случаев

$f(x)=3$ 1 случай

$f(y)>3$ 3 различ. случаев.

$f(x)=4$ 2 случая

$f(y)>4$ 1 ~~различ~~ случай.

$14\cdot 10+7\cdot 7+4\cdot 3+3\cdot 1+2\cdot 1=206$

Ответ: 206.

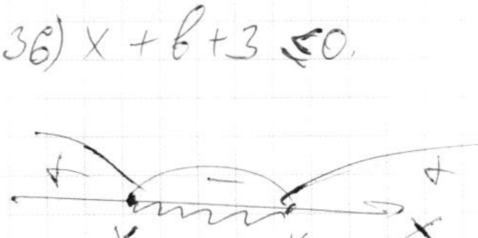
№6.

$$\frac{16x-16}{4x-5}\le ax+b\le -32x^2+36x-3, \qquad x\in\left[\frac{1}{4};1\right]$$

$32x^2-36x+3+ax+b\le 0.$

$32x^2+(a-36)x+b+3\le 0.$

$\left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$



Если при $x=\frac{1}{4}$ и при $x=1$ выполняется неравенство, оно выполняется для всех $x\in\left[\frac{1}{4};1\right]$

$x = \frac{1}{4}$:

$32 \cdot \frac{1}{16} + \frac{a}{4} - 9 + b + 3 \leq 0$

$\boxed{a + 4b \leq 16}$

$x = 1$:

$32 + a - 36 + b + 3 \leq 0$

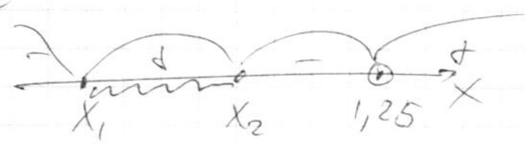
$\boxed{a + b \leq 1}$

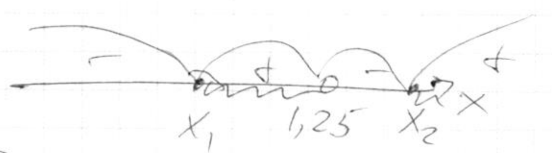
$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b.$

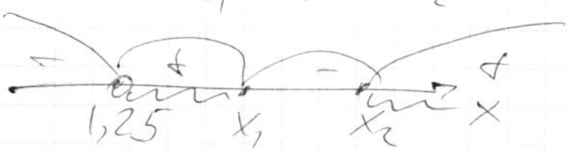
$\frac{16x - 16 - 4ax^2 - 4bx + 5ax + 5b}{4x - 5} \leq 0.$

$\frac{4ax^2 - (5a - 4b + 16)x + 16 - 5b}{4x - 5} \geq 0.$

$\left[\begin{array}{l} x = 1,25 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \end{array}\right.$

1) 

2) 

3) 

Если неравенство выполняется при $x = 1$ и $x = \frac{1}{4}$, то оно выполняется при любом $x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$

$x=\frac{1}{4}$;

$\frac{a}{4}-\frac{1}{4}(5a-4b+16)+16-5b\leq 0$

$-a+b-4+16-5b\leq 0.$

$\boxed{a+4b\geq 12}$.

$x=1$:

$4a-5a+4b-16+16-5b\leq 0$

$a+b\geq 0.$

$\begin{cases} a+b\in[0;1] \\ a+4b\in[12;16] \end{cases}$ $b\in\left[\frac{11}{3};\frac{16}{3}\right]$

Ответ: $a\in[-b;1-b]\cap[12-4b;16-4b]$; $b\in\left[\frac{11}{3};\frac{16}{3}\right]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x=1$:

$4a-5a+4b-16+16-5b\le 0$

$-a-b\le 0$

$\boxed{a+b\ge 0}$

$1-\frac{11}{3}=-\frac{8}{3}$

$\begin{cases} a+b\in[0;1] \\ a+4b\in[12;16] \end{cases}$

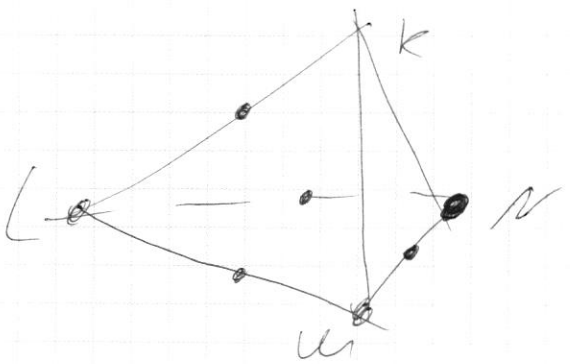
$\begin{cases} a+b=1 \\ a+4b=12 \end{cases}$ $\boxed{b_{min}=\frac{11}{3}} \Rightarrow a=-\frac{8}{3}$

$\begin{cases} a+b=0 \\ a+4b=16 \end{cases}$ $\boxed{b_{max}=\frac{16}{3}} \Rightarrow a=-\frac{16}{3}$

$\begin{cases} a\in[-b;1-b] \\ a\in[12-4b;16-4b] \end{cases}$

Ответ: $a\in[-b;1-b]\cap[12-4b;16-4b]$; $b\in\left[\frac{11}{3};\frac{16}{3}\right]$

№7.



$KL=3$.

$KM=1$

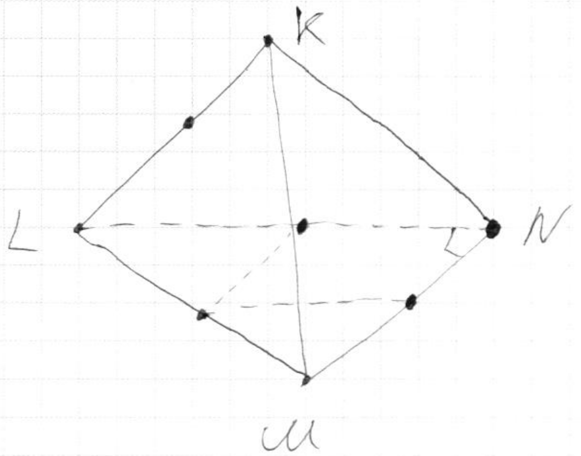
$MN=\sqrt{2}$

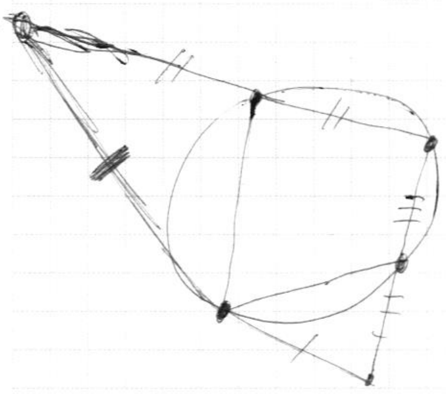
☑ черновик ☐ чистовик

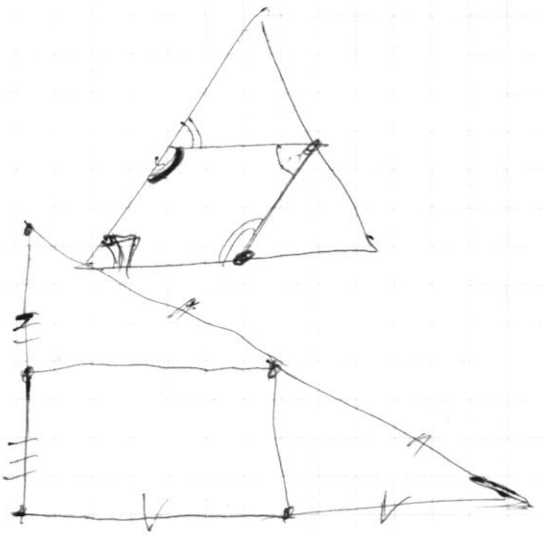
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

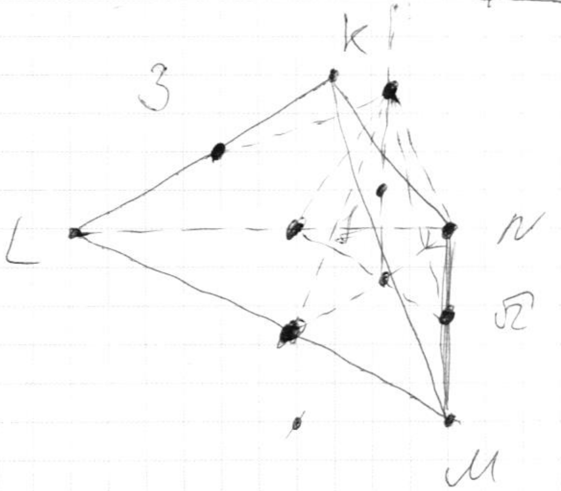
(Нумеровать только чистовики)







3



KL = 3.
KM = 1
MN = √2.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2xy-12y-x+6=x(2y-1)-6(2y-1)=\boxed{(2y-1)(x-6)}$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

$x-6=a$. $\quad x-12y=a-6b$.

$2y-1=b$.

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$a^2-12ab+36b^2=ab$.

$\boxed{a^2+36b^2=13ab.}$

$\boxed{27b^2=90-13ab.}$

$36b^2=120-\frac{13\cdot4ab}{3}$

$39+52=91$

$a^2+120-\frac{52ab}{3}=13ab$.

$\boxed{a^2=\frac{91ab}{3}-120.}$

$$\begin{cases} a^2+9b^2=90 \\ a^2+36b^2=13ab. \end{cases}$$

$(a+3b)^2-6ab=90$.

$(a+3b)^2-6ab+27b^2=13ab$.

$\boxed{27b^2-13ab+90=0}$

$(a+3b)^2-6(a-6b)^2=90$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$a - 6b = \sqrt{ab}$.

$c = \sqrt{a}$.

$d = \sqrt{b}$

$c^2 - 6d^2 = cd$.

$(c - \frac{1}{2}d)^2 - \frac{1}{4}d^2 - 6d^2 = 0$.

$(c - \frac{1}{2}d)^2 = \frac{25}{4}d^2$

$c - \frac{1}{2}d = \pm \frac{5}{2}d$.

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$D = 169b^2 - 144b^2 = 25b^2$.

$a_{1,2} = \frac{13b \pm 5b}{2}$ $\left[\begin{array}{l} a = 9b \\ a = 4b. \end{array}\right.$

№ 3.

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 > 0$.

$x(10 - x) > 0$.

$x = 0$

$x = 10$

$\boxed{x \in (0;10)}$

0 10 x

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 = a$.

$a + a^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 a}$

$a + a^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$

$1 + a^{\log_3 4 - \log_3 3} \geq a^{\log_3 5 - \log_3 3}$.

$\boxed{a^{\log_3 \frac{4}{3}} + 1 \geq a^{\log_3 \frac{5}{3}}}$

$f(a) = a + a^{\log_3 4} - a^{\log_3 5}$.

$f(a)' = 1 + \log_3 4 \cdot a^{\log_3 \frac{4}{3}} - \log_3 5 \cdot a^{\log_3 \frac{5}{3}} = 0$.

$f(a) = 1 + a^{\log_3 \frac{4}{3}} - a^{\log_3 \frac{5}{3}}$

$f(a)' = \log_3 \frac{4}{3} \cdot a^{\log_3 \frac{4}{3}} - \log_3 \frac{5}{3} \cdot a = 0$.

$\cancel{f(a)=} \log_3 \frac{4}{3} \cdot a^{\log_3 \frac{4}{3}} = \log_3 \frac{5}{3} \cdot a^{\log_3 \frac{5}{3}}$

дальше решу

$a^{\log_b c} = a^{x \log_b a} = (a^x)^{\log_b a}$.

$a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_x c}{\log_x b}} =$ $\cancel{a^{\log_x c}}$

$a^{\log_b c} =$ $\boxed{c = a^x}$.

$\log_3 4 + y = \log_3 5$. $y = \log_3 \frac{5}{4}$

$a \geq a^{\log_3 4}(a^{\log_3 \frac{5}{4}} - 1)$

При всех $a \in (0;1]$ выполняется.

$3 + 4 \geq 5$. $\oplus$.

$10 + 4^2 \geq 5^2$ $\boxed{26 \geq 25}$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a + a^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 a}$.

$a + a^{\log_3 4} = 5^{\log_3 a}$.

$10 + 10^{\log_3 4} = 10^{\log_3 5}$. 10

$1 + 10^{\log_3 \frac{4}{3}} = 10^{\log_3 \frac{5}{3}}$

$\log_3 \frac{5}{4} < 0$

$a^{\log_3 \frac{5}{4}} < 1$

$a \geq a^{\log_3 4}(a^{\log_3 \frac{5}{4}} - 1)$

~~$a^{\log_3 4} > 0$ выполняется при любых a~~

~~$a^{\log_3 5} - a^{\log_3 4} > 0$ при $a > 3$~~

$a^{\log_3 \frac{5}{4}} \in (1; a)$

$a = 9$;

$9 + 16 = 25$ ⊕.

$a \in (0; 9]$ $x^2 - 10x \leq 9$.

$136 = 34 \cdot 4$

$x^2 - 10x - 9 \leq 0$.

$D = 100 + 36 = 136$

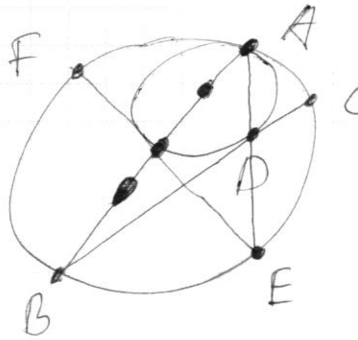
$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{136}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{34}}{2} = 5 \pm \sqrt{34}$.

$5-\sqrt{34}$ $5+\sqrt{34}$ x

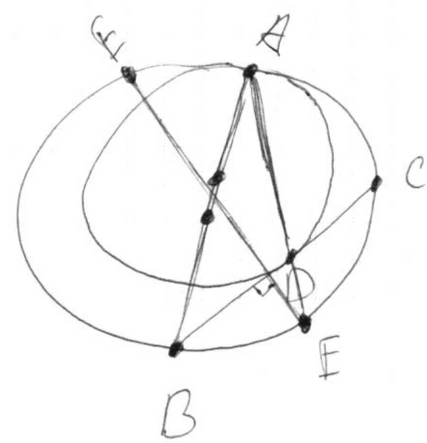
$x \in$

$x \in [0; 10]$

№4.



CD=7,5.
BD=8,5



№5.

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$f(a)=f(p_1\cdot p_2)=\left[\frac{p_1}{4}\right]+\left[\frac{p_2}{4}\right]$

$f(z)=\left[\frac{p_1}{4}\right]+\left[\frac{p_2}{4}\right]+\left[\frac{p_3}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{p_n}{4}\right]$

$f\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=f(z_1)+f\left(\frac{1}{z_2}\right)$

$f\left(\frac{1}{z_2}\right)$ $\quad f\left(\frac{1}{p}\right)=\left[\frac{1}{4p}\right]=0$

$f(ab)=f(a)+f(b)$.

$\frac{1}{ab}=\frac{a+b}{ab}$ $\quad f(a)+f(b)=\frac{1}{a+b}$

$f(ak)+f(b)=f(a)+f(bk)$.

$f(a)-f(b)=f(ak)-f(bk)$.

$f(ab)=-f\left(\frac{1}{ab}\right)$. $\quad f(ab)=\frac{1}{ab}=-a-b$. $\quad f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=0$. $\quad \boxed{f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)}$

$f(8)=f(2)+f(4)$.

$f(ab)=f(ab)+f(1)$. $\quad \boxed{f(1)=0}$

$f(ab)=f(4ab)+f\left(\frac{1}{4}\right)$

$=f(ab)+f(4)+f\left(\frac{1}{4}\right)$.

$\boxed{f(4)+f\left(\frac{1}{4}\right)=0}$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

$\left[\frac{p_{x1}}{4}\right]+\left[\frac{p_{x2}}{4}\right]+\ldots+-\left[\frac{p_{y1}}{4}\right]-\left[\frac{p_{y2}}{4}\right]\ldots$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\cos 4\beta = \boxed{2\cos^2 2\beta - 1}$.

$\cancel{2\sin}$ $2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$.

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha) = -\frac{2}{5}1$

$\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{5}$

$\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

1)

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$. $\quad \sin 2\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

1a): $\cancel{\sin 2\alpha = t}$. $\cos 2\alpha = t$. $\quad \sin 2\alpha = \sqrt{1-\cos^2 2\alpha}$

$\sqrt{1-t^2} + 2t = -1$.

$\sqrt{1-t^2} = -1-2t$. $\quad 2t+1 \le 0$. $\boxed{t \le -\frac{1}{2}}$

$1-t^2 = 1+4t+4t^2$

$5t^2+4t = 0$. $\quad t = 0$. $\ominus$. $\boxed{t=-0{,}8} \Rightarrow \sin 2\alpha = \sqrt{1-0{,}64} = 0{,}6$.

tg

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha = 0{,}6\\ \cos 2\alpha = -0{,}8 = 1-2\sin^2\alpha\end{array}\right.$$

$\sin^2\alpha = 0{,}9 \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{0{,}9} = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$

$2\cdot\pm\sqrt{0{,}9}\cdot\cos\alpha = \cancel{0{,}6}\,0{,}3.$

$\cos\alpha = \pm\frac{0{,}3}{\sqrt{0{,}9}} = \pm\sqrt{\frac{0{,}09}{0{,}9}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\boxed{tg\alpha = 3}$.

1б) $\cos 2\alpha = t$ $\qquad \sin 2\alpha = -\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}$

$-\sqrt{1-t^2} + 2t = -1.$

$\sqrt{1-t^2} = 2t+1$ $\qquad 2t+1 \geq 0.$

$\boxed{t \geq -\frac{1}{2}}$

$\cancel{1}-t^2 = 4t^2+4t+\cancel{1}$

$5t^2+4t = 0.$

$$\left[\begin{array}{l}t = 0.\ \oplus\\ t = -0{,}8\ \ominus\end{array}\right.$$ $\qquad \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \sin 2\alpha = -1$

$1-2\sin^2\alpha = 0.$

$\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$2\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\cos\alpha = -1.$ $\qquad tg\alpha = \cancel{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\cdot(-1)\cdot\cancel{(\pm\sqrt{2})} = -1.$

$(\pm\sqrt{2})\cos\alpha = -1.$

$\cos\alpha = (-1)\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2а) $\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1.$ $\qquad \cos 2\alpha = t;\ \sin 2\alpha = \sqrt{1-\cos^2 2\alpha}$

$\sqrt{1-t^2} - 2t = -1.$ $\qquad 2t-1 \geq 0.$

$\sqrt{1-t^2} = 2t-1.$ $\qquad \boxed{t \geq \frac{1}{2}}$

$\cancel{1}-t^2 = 4t^2-4t+\cancel{1}.$

$5t^2-4t = 0.$ $$\left[\begin{array}{l}t = 0,\ \ominus\\ t = 0{,}8\end{array}\right.$$

☑ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 2\alpha = 0{,}8$; $\sin 2\alpha = 0{,}6$.

$1 - 2\sin^2\alpha = 0{,}8$.

$\sin^2\alpha = 0{,}1$ $\quad \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\cdot\cos\alpha = 0{,}3$.

$\cos\alpha = \frac{3}{10}\cdot\left(\pm\sqrt{10}\right) = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$.

2б) $\sin 2\alpha = -\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}$

$-\sqrt{1-t^2} - 2t = -1$.

$\sqrt{1-t^2} = 1-2t$.

$1-2t \geq 0$.

$\boxed{t \leq \frac{1}{2}}$

$\boxed{t = 0}$

$\cos 2\alpha = 0$

$\sin 2\alpha = -1$.

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\alpha = -1.}$

Ответ: $3;\ \frac{1}{3};\ -1$.

№2.

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$

$x^2 - 12x + 36y^2 - 36y - 45 = 0$

$D = 144 - 144y^2 + 144y + 180 = -(144y^2 - 144y - 324)$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$.

$x^2 - x + 144y^2 - 12y - 22xy = 6$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -144 \\ 36 \\ \hline \boxed{108} \end{array}$$

$(x+6y)^2-12xy-12x-36y=45.$

$$\begin{cases} (x+6y)^2-12(xy-x-3y)=45. \\ x^2-x+144y^2-12y-22xy=6. \end{cases}$$

$(x+12y)^2-24xy-(x+12y)-22xy=6.$

$\boxed{(x+12y)^2-(x+12y)-46xy-6=0.}$

$(x+12y)^2-24xy-108y^2-12x-36y=45.$

$x+12y+46xy+6-24xy-108y^2-12x-36y=45.$

$-11x-24y+22xy-108y^2=39.$

$108y^2-22xy+24y+11x+39=0.$

$108y^2-y(22x-24)+11x+39=0.$

$(x-6)^2-36+36(y^2-y)=45.$

$(x-6)^2-36+36\left(\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)=45$

$(x-6)^2+36\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=90.$

$\boxed{(x-6)^2+(6y-3)^2=90.}$

$x^2-x+144y^2-12y-22xy=6.$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(12y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-22xy=6.$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(12y-\frac{1}{2}\right)^2-22xy=6,5.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{x=2}$ $f(2)=$

$f(2)=0$	$f(6)=0$	$f(10)=1$	$f(14)=1$	$f(18)=0$	$f(22)=2$
$f(3)=0$	$f(7)=1$	$f(11)=2$	$f(15)=1$	$f(19)=4$	$f(23)=5$
$f(4)=0$	$f(8)=0$	$f(12)=0$	$f(16)=0$	$f(20)=1$	$f(24)=0$
$f(5)=1$	$f(9)=0$	$f(13)=3$	$f(17)=4$	$f(21)=1$	$f(25)=2$

Если $f(x)=0$ у может ~~быть~~ принять 14 знач.

66 17 5

$140+49+12+3+2=206$

Если $f(x)=1$ у может принять 7 знач.

Если $f(x)=2$ у может принять 4 знач.

Если $f(x)=3$ у может принять 3 знач.

Если $f(x)=4$ у может принять 1 знач.

№6.

$\frac{16x-16}{4x-5}\le ax+b\le -32x^2+36x-3.$

152.

$32x^2-36x+3=0.$

$D=36^2-12\cdot32=6\cdot6\cdot6\cdot6-6\cdot64=6(216-64)=6\cdot152$

$-32x^2+36x-3-ax-b\ge0$

$32x^2-36x+3+ax+b\le0$

$32x^2+(a-36)x+b+3\le0$

$D=a^2-72a+36^2-32\cdot4(b+3)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$32x^2+(a-3b)x+b+3\le 0.$

$x=\frac{1}{4}.$

$32\cdot\frac{1}{16}+\frac{a}{4}-9+b+3\le 0$

$2+\frac{a}{4}-9+b+3\le 0.$

$\frac{a}{4}+b-4\le 0.$

$\boxed{a+4b\le 16.}$

$32+a-3b+b+3\le 0.$

$a+b\le 1.$

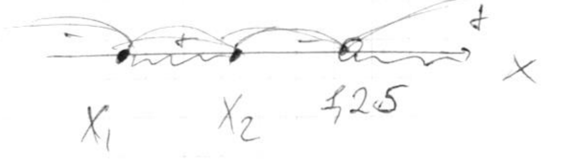
$\boxed{\frac{16x-16}{4x-5}\le ax+b.}$

$$\frac{16x-16-4ax^2-4bx+5ax+5b}{4x-5}\le 0.$$

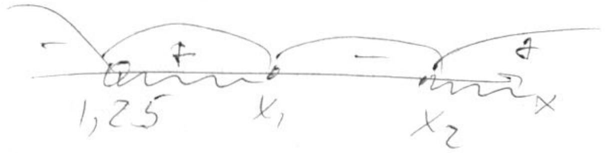
$$\frac{-4ax^2+(5a-4b+16)x+5b-16}{4x-5}\le 0.$$

$$\frac{4ax^2-(5a-4b+16)x+16-5b}{4x-5}\ge 0.$$

$\boxed{x=1{,}25}$ $x_1;\ x_2.$

1) 

2) 

3) 

$x=\frac{1}{4}:$

$\frac{a}{4}-\frac{1}{4}(5a-4b+16)+16-5b\le 0.$

$-a+b-4+16-5b\le 0.$

$-a-4b+12\le 0.$

$a+4b-12\ge 0.$

$\boxed{a+4b\ge 12}$