МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & 1) \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} & 2) \end{cases}$$

2) $\Leftrightarrow$ применим синус суммы

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta)}$

1) $\to$ 2) $\Rightarrow$ $\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{4}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \\ 8\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0 \end{array}\right.$$

$\cos\alpha = 0$ не решение исх. сист.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos^2\alpha\,(4\,\mathrm{tg}\,\alpha + 1) = 0 \\ 2\cos^2\alpha\,(4\,\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{4} \\ \mathrm{tg}\,\alpha = 0 \\ \mathrm{tg}\,\alpha = -4 \end{array}\right.$$

№ 2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 2x \geq 0 \\ (3y-2x)^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \quad (1) \\ 27x^2 + 27y^2 - 54x - 36y = 36 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$ $9y^2 - (15x-3)y + 2x + 4x^2 - 2 = 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

(1) $D = 81x^2 - 162x + 81 = 81(x-1)^2$

$\Rightarrow y = \dfrac{15x - 3 \pm 9(x-1)}{18}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{4x-2}{3} \to (1) \quad 75x^2 - 150x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} (1) \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} (2) \end{array}\right. \\ y = \dfrac{x+1}{3} \to (2) \quad 30x^2 - 60x - 45 = 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{4+\sqrt{5}}{6} \end{cases} (3) \\ \begin{cases} x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{4-\sqrt{5}}{6} \end{cases} (4) \end{array}\right.$

ОДЗ $3y - 2x \geq 0 \Rightarrow$

(1) $-2 - 0 \geq 0$ $\varnothing$

(2) $6 - 4 \geq 0$ ✓

(3) $\frac{4+\sqrt{5}}{2} - 2 - \sqrt{5} \geq 0$

$\cancel{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \sqrt{5} - \cancel{2} \geq 0$ $\varnothing$

(4) $\frac{4-\sqrt{5}}{2} - 2 + \sqrt{5} \geq 0$

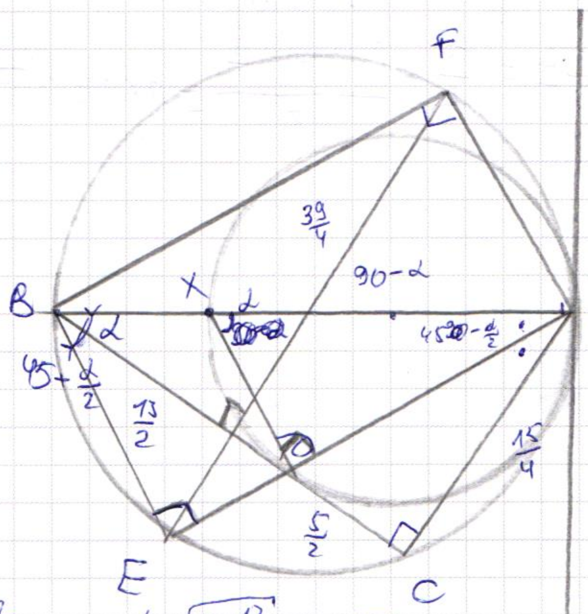
$\cancel{2} - \cancel{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5} \geq 0$ ✓

Ответ: $(2; 2)$ и $\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{4-\sqrt{5}}{6}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



По лемме Архимеда AD - биссектриса $\angle BAC \Rightarrow$

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{13}{5}$

$\Rightarrow \sin\angle ABC = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos\angle ABC = \frac{12}{13}$

$\Rightarrow AB = BC \cdot \cos\angle ABC$

$AB = \frac{3 \cdot 13}{4 \cdot 13} = \frac{39}{4} \Rightarrow AC = \frac{39}{4} \cdot \frac{5}{13}$

$AC = \frac{15}{4}$

$\Rightarrow R = \frac{39}{8}$

$\cos\alpha = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{26}}$

$\angle BAD = 45 - \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \angle EBA = 90 - 45 + \frac{\alpha}{2} = 45 + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle EFA = \angle EBA$ (вписанные)

$\Rightarrow \angle AFE = 45 + \frac{\alpha}{2}$ $\alpha = \angle ABC = \arcsin\frac{5}{13}$

$\angle AFE = \frac{\pi}{4} + \frac{\arcsin\frac{5}{13}}{2}$

AD - биссектриса AD - хорда $\Rightarrow AD = 2r \cdot \sin\angle$ (т.к. $DX \parallel BE$) D и E опираются на диаметр.

$AD = \frac{2AB \cdot AC}{AB + AC} \cdot \cos\left(\frac{BAC}{2}\right)$

$AD = \frac{2 \cdot \frac{39}{4} \cdot \frac{15}{4}}{\frac{39}{4} + \frac{15}{4}} \cdot \cos\left(\frac{90-\alpha}{2}\right) = \frac{39 \cdot 15}{2 \cdot 54} \cdot \cos\left(\frac{90-\alpha}{2}\right) =$

$\frac{65}{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \Rightarrow 2r = \frac{\frac{65 \cdot 13}{12\sqrt{26}}}{5} = \frac{13^2}{12\sqrt{26}} =$

$$\frac{13^2}{12\sqrt{26}} = \frac{13^2\sqrt{26}}{24\cdot 13} = \frac{13\sqrt{26}}{24} \Rightarrow r = \frac{13\sqrt{26}}{48}$$

$$\angle AFE = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{5}{\sqrt{26}}\right) = \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{26}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \angle AFE = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

Ответ: $R = \frac{39}{8} \quad r = \frac{13\sqrt{26}}{48}$

$$\angle AFE = \frac{\pi}{4} + \frac{\arcsin\frac{5}{13}}{2} = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Найдем значения f для простых чисел ≤ 27

$\boxed{f(2)=0}$ Также справедливо $f(a\cdot a)=2f(a)$

$f(3)=0$ $\Rightarrow f(4)=0$ Также: $f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(5)=1$ $f(9)=0$ $\Rightarrow f(6)=0$ $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(7)=1$ $f(25)=2$ $f(8)=0$

$f(11)=2$ $f(16)=0$ $f(10)=1$ Иначе говоря,

$f(13)=3$ $f(12)=0$ $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, когда

$f(17)=4$ $f(14)=1$ $f(x)<f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(19)=4$ $f(15)=1$ $f\left(\frac{2}{2}\right)$

$f(23)=5$ $f(18)=0$ $f\left(\frac{2}{2}\right)=f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(20)=1$ $0=0+f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(21)=1$ $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$f(22)=2$ $f\left(\frac{x}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(24)=0$ $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1)-f(x)$

$f(26)=3$ $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

$f(27)=0$ $f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$

1 типу пар: $10\cdot(7+3+2+2+1)=150$

2 типу пар: $7\cdot(3+2+2+1)=56$

3 пар: $3\cdot(2+2+1)=15$

4: $2\cdot(2+1)=6$

5: $2\cdot 1=2$

6: нет.

$f(x)=0$ – 10 пар 1 тип

$f(x)=1$ – 7 пар 2 тип

$f(x)=2$ – 3 пар 3 тип

$f(x)=3$ – 2 пар 4 тип

$f(x)=4$ – 2 пар 5 тип

$f(x)=5$ – 1 пар 6 тип

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, когда

Ответ: $\sum$ пар $=150+56+15+6+2=229$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y) \Rightarrow f(x)<f(y)$

для $x=3, 4, 9, 16, 6, 8, 12, 24, 27$ есть пара: $5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 25, 10, 14, 15, 20, 21, 22, 26$

т.е.

Ответ: 229

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \\ ax+b \geq 8x^2-34x+30 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 8x^2-(34+a)x+30-b \leq 0 \\ 2ax^2-2ax+2bx-2b-4x+3 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 8x^2-(34+a)x+30-b \leq 0 \quad - g(x) \\ 2ax^2-2x(a+b+2)-2b+3 \leq 0 - f(x) \end{cases}$

$g(x)$

$g(x) \quad \forall x \in (1;3] \quad g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) < 0 \\ g(3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 4-b \\ a \geq -\frac{b}{3} \end{cases}$

$f(x) \quad \forall x \in (1;3] \quad f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0 \\ f(1)<0 \\ f(3) \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ f(1)<0 \\ f(3)\leq 0 \\ x_0 \notin (1;3] \end{cases} \\ \begin{cases} a=0 \\ f(1)<0 \\ f(3) \leq 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$f(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$

$g(x) = 8x^2 - 34x + 30$

$g(x) = 8(x-3)(x-\frac{5}{4})$

$g(1) = 4 \quad g(3) = 0 \quad g(2) = -6$

$f'(x) = -\frac{2}{(2x-2)^2} < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow\downarrow \quad \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$

$f'(3) = -\frac{1}{8}$

$\Rightarrow f(3) = \frac{9}{4}$

Чтобы для $\forall x \in (1;3]$ выполнялось заданное условие введем вспомогательную ось x', тогда b' – точка на ней, где функция $ax+b$ пересекает её,

тогда $a = tg\alpha$

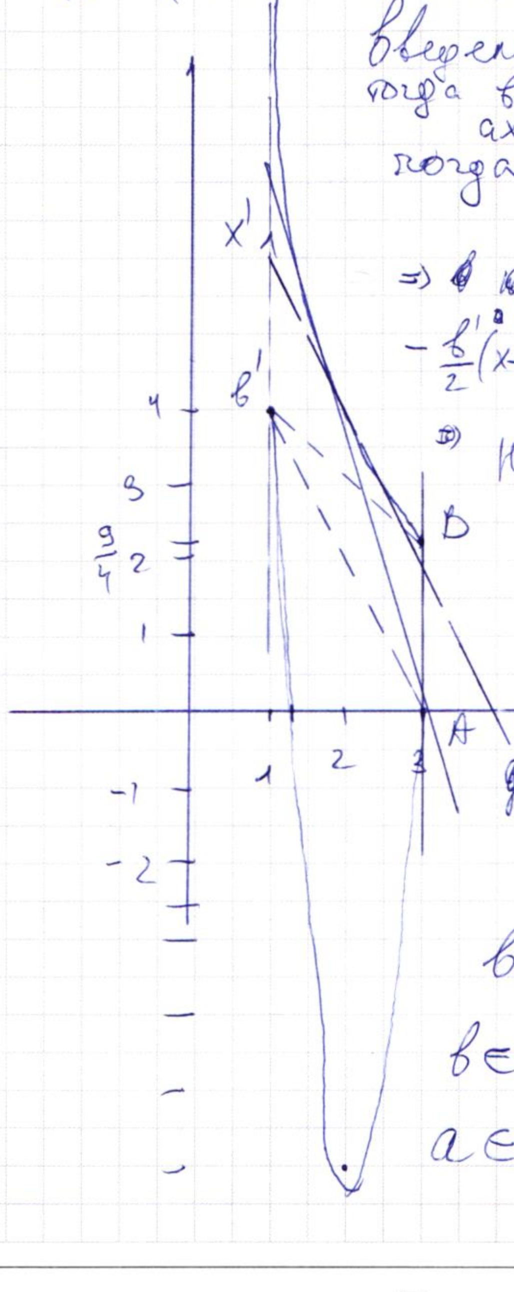
$tg\alpha \in \left(\frac{-b'}{2}; -\frac{(b'-\frac{9}{4})}{2}\right]$ где $b' \in [4;+\infty)$

$\Rightarrow$ $g(x) = a(x-2) + b'$

$-\frac{b'}{2}(x-2)+b' <$ решения $\leq -\frac{(b'-\frac{9}{4})}{2} + b'$

$\forall x \in (1;3]$

$\Rightarrow$ но $|tg\alpha| < |tg\beta|$ $tg\beta = f'(x)$



~~$g(x) = ax - 2a + b'$~~

~~$b = b' - 2a = b'$~~

$b \in \left[b' + \frac{b'}{2} - \frac{9}{8}; b' + \frac{1}{2}\right)$ где $b' \in [4;+\infty)$

$b \in \left[\frac{3}{2}b' - \frac{9}{8}; \frac{3}{2}b'\right)$, где $b' \in [4;+\infty)$

$a \in \left(-\frac{b'}{2}; -\frac{b'-\frac{9}{4}}{2}\right]$ где $b' \in [4;+\infty)$

~~Тогда пара чисел а и в~~

~~из рисунка видно, что для фиксированного~~

~~х, которые могут~~

из рисунка видно, что решениями будут прямые вращающиеся вокруг точек из отрезку AB, лежащих ниже $f(x)$, крайней верхней точкой будет касание с $f(x)$ или $D(\cdot f(x) = ax+b) = 0$

№ 3 $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$4^{\log_4(x^2+6x)\cdot\log_4 3} - |x^2+6x|^{\log_4 5} + x^2+6x \geq 0$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} - |x^2+6x|^{\log_4 5} + x^2+6x \geq 0$ Заметим, что модуль во втором слагаемом лишний, т.к. для существования логарифма $x^2+6x>0$

$\Rightarrow x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$

Пусть $\alpha = x^2+6x$, тогда

$\alpha^{\log_4 3} - \alpha^{\log_4 5} + \alpha \geq 0$ – степенное нер-во

$\Leftrightarrow$ ~~α log~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$$\begin{cases} 8x^2-(34+a)x+30-b \leq 0 \\ \frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2-(34+a)x+30-b \leq 0 \\ 2ax^2-2ax+2bx-2b-4x+3 \leq 0 \end{cases}$$

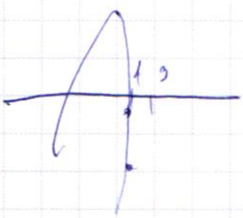
$\forall x \in (1;3]$

$$\begin{cases} 8x^2-(34+a)x+30-b \leq 0 \\ \cancel{2ax^2-2x(a+b)}- \end{cases}$$

$2ax^2-2x(a+b+2)-2b+3 \leq 0$

$f(1) \leq 0$

$f(3) \leq 0$



$$\begin{cases} 8-34-a+30-b \leq 0 \\ 72-34\cdot 3-3a+30-b \leq 0 \end{cases}$$

-30

$$\begin{cases} -a-b+4 \leq 0 \\ -3a-b \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq 4-b \\ a \geq -\frac{b}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>0 \\ 2a-2a-2b-4-2b+3 \leq 0 \end{cases}$$

$-4b-1 \leq 0$

$18a-6a-6b-12-2b+3 \leq 0$

$12a-8b-9 \leq 0$

$$\begin{cases} b \geq -\frac{1}{4} \\ a \leq \frac{2}{3}b+\frac{3}{4} \\ a>0 \end{cases}$$

$a \quad \frac{2}{3}b+\frac{3}{4}>0 \quad -\frac{1}{4}$

$b \quad \frac{3}{2}$

$b \quad -\frac{9}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(x^2+6x)^{\log_3 4} - (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$3^{\log_3(x^2+6x)}, \; 4^{\log_4 3}$

$x(x+6)^{\log_4 3} - x(x+6)^{\log_4 5} + x(x+6) \geq 0$

$\alpha^{\log_4 3} - \alpha^{\log_4 5} + \alpha \geq 0$

$3-5+1$

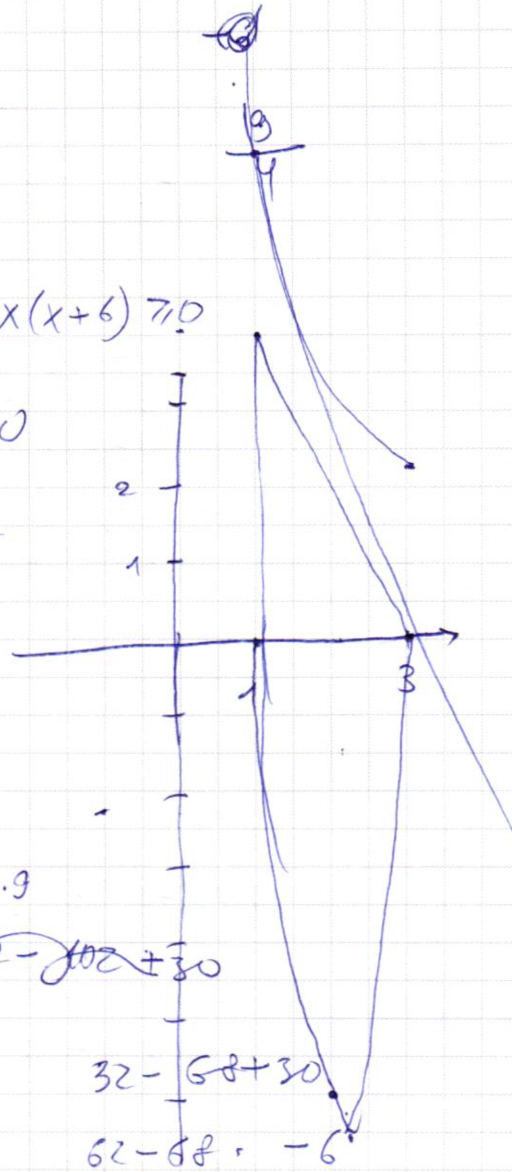
$3-5+4$

$\alpha^{\log_4 3 - 1} - \alpha^{\log_4 5 - 1} \geq -1$

$3-5+4=2$

$1-\log_4 5+\log_4 3$

$1-\log_4 \frac{3}{5}$ $\quad \frac{3}{5} \geq \frac{1}{2}$



$a(x-2)+b'$ $\quad b' \in [4;+\infty)$

$ax-2a+b'$

$ax-$

$2ax^2-2ax+2bx-2b-9x+3=0$

$D=0 \quad 4(a+b+2)^2+16ab-24a=0$

$4(a^2+b^2+4+4b+4a+2ab)$

$4a^2+4b^2+16+16b+16a+8ab+16ab-24a=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

81

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$1+\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta$

$8\sin^2(2\alpha+2\beta) + \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha$

$8\sin^2(2\alpha+2\beta)+\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{2}{h}$

$h =$

$\sin 2\alpha(1+\cos 4\beta) + \cos 2\alpha \sin 4\beta = -\frac{8}{17}$

$AB\sin\alpha$

$\frac{39}{4}\cdot\frac{5}{13} = \frac{15}{4}$

$$\begin{cases} \boxed{\sin 2\alpha\cos^2 2\beta + \cos 2\alpha(\sin 2\beta\cos 2\beta) = -\frac{4}{17}} \\ \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\beta + 8\sin 2\alpha\cos 2\alpha \sin 2\beta\cos 2\beta + 4\cos^2 2\alpha \sin^2 2\beta = \frac{4}{17}$

$\cancel{(4\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha)\cos^2 2\beta + 4\cos^2 2\alpha}$

$(1-\sin^2 2\beta)(1-\cos^2 2\beta)$

$\cancel{4(\sin^2 2\alpha \cos^2 2\beta + 4\cos^2 2\alpha - 4\cos^2 2\beta\cos^2 2\alpha)} =$

$\cancel{4\cos^2 2\beta(1}$

$\cancel{4(\sin^2 2\alpha\cos^2 2\beta + 1 + \cos^2 2\beta\sin^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha - \cos^2 2\beta}$

$\cancel{4(\cos^2 2\beta + \cos^2 2\alpha)}$

$\cos^2 2\beta(4\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha) + \sin^2 \cancel{2\beta(4\cos^2} 2\alpha$

$\cancel{4(\cos^2 2\beta}$

$\cos^2 2\beta(4\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha) + \cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta(1+8\sin 2\alpha) + 4\cos^2 2\alpha\sin^2 2\beta = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$3x^2-6x-4y-4+3y^2=0$ $\quad$ $3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$D=36+48y+48-36y^2$ $\quad$ $3y+2x=t$ $\quad$ $l(x)$ $\quad$ $kx+b$

$D=-(36y^2-48y-84)$ $\quad$ $t^2=9y^2+4x^2+12xy$ $\quad$ k

$-4(9y^2-12y-21)$

$D=144+21\cdot9\cdot4$

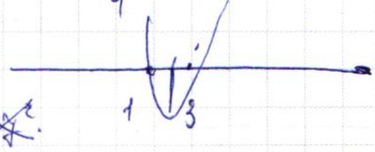
$ax+b$ $\quad$ $a\in$ $\quad$ $\frac{b'}{2}$; $\quad$ $b'-$

№6

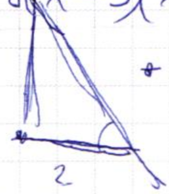
$\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b\geq 8x^2-34x+30$ $\quad$ $x\in(1;3]$

$\left(\frac{4x-3}{2x-2}\right)'=\frac{4(2x-2)-2(4x-3)}{(2x-2)^2}=\frac{-8+6}{(2x-2)^2}=-\frac{2}{(2x-2)^2}\Rightarrow\downarrow$

$f(3)=\frac{12-3}{6-2}=\frac{9}{4}$ $\quad$ $\frac{9}{4}\geq ax+b$



$8x^2-34x+30$ $\quad$ $8(x-3)\left(x-\frac{5}{4}\right)$



x_0 $\quad$ $\frac{34}{16}=\frac{17}{8}$ $\quad$ $+\frac{1}{8}$

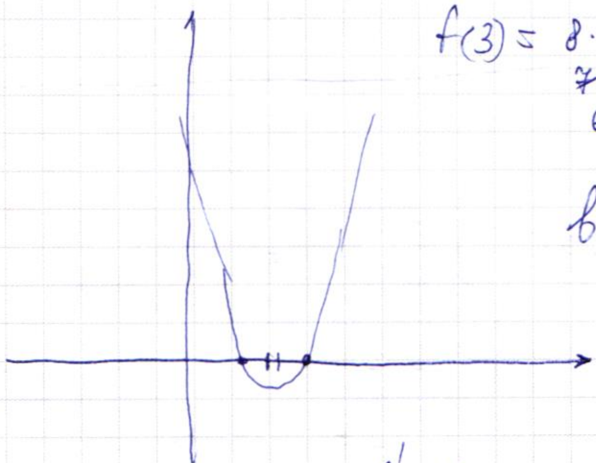
2,125

$f(1)=8-34+30=4$

$f(3)=8\cdot9-34\cdot3+30$ $\quad$ $\frac{9}{4}$

$72-90-12+30=0$

$60-30$



b' $\quad$ $a=tg\,\alpha=$

$a\in\left[-\frac{b'}{2};-\frac{b'-\frac{9}{4}}{2}\right)$

$b'\in[4;+\infty)$

$b'=4$

$\alpha\in\left(-\frac{4}{2}-2;-\frac{7}{8}\right.$

$4-\frac{9}{4}=\frac{7}{4}$ $\quad$ $-\frac{\frac{7}{4}}{2}$ $\quad$ $f'(3)=\frac{-2}{16}$

☑ черновик $\quad$ ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$208-72=153$

$225-144$

81

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2x\geq 0 \\ 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+2y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$225x^2-90x+9-72x-144x^2+72=0$

$81x^2-162x+81$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2x\geq 0 \\ 9y^2-(15x-3)y+2x+4x^2-2=0 \end{cases}$$

$81(x^2-2x+1)=0$

$y=\dfrac{15x-3\pm 9(x-1)}{18}$

$$\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{24x-12}{18}=\boxed{\dfrac{4}{3}x-\dfrac{2}{3}} \\ y=\dfrac{6x+6}{18}=\boxed{\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3}} \end{array}\right.$$

$3x^2+x+1+6x-$

$y=\dfrac{x+1}{3}$ $\quad y=\dfrac{4x-2}{3}$

$3x^2+\dfrac{x^2+2x+1}{3}$.

$27x^2+27y^2-54x-36y=36$

$\cancel{27x^2+3x^2+6x+3-54x-12x-12=36}$

$-(108)=-150$

$\cancel{30x^2-60x-45=0}$

$\cancel{2x^2-4x-3=0}$

$48x^2-48x+12+27x^2-54x-48x+24=36$

$$\left[\begin{array}{l} x= \\ x= \end{array}\right.$$

$6\,(75x^2-72x=6$

$75x^2-150x$

$16+24=40$

$x=\dfrac{4\pm 2\sqrt{5}}{4}$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

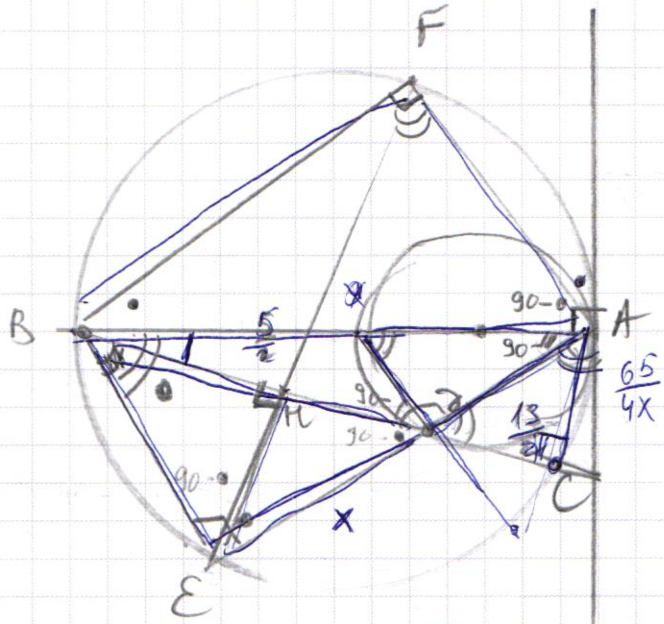
☑ черновик ☐ чистовик

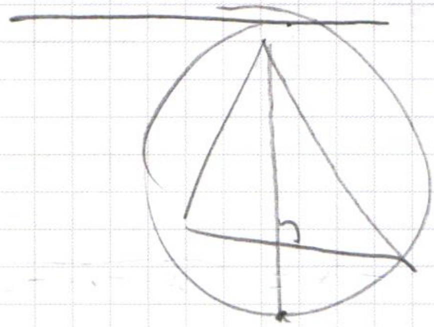
(Поставьте галочку в нужном поле)

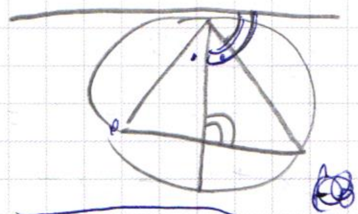
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}$$







$\boxed{f(a^2) = 2f(a)}$

$f(2) = 0 \Rightarrow f(4) = 0$

$f(3) = 0 \quad f(9) = 0$

$f(5) = 1 \quad f(25) = 2$

$f(7) = 1 \quad f(6) = 0$

$f(11) = 2 \quad f(8) = 0$

$f(13) = 3 \quad f(10) = 1$

$f(17) = 4$

$f(23) = 5$

$f(29) = 7$

$AF^2 + BE^2 = 4R^2 \qquad EH \cdot HF$

$ED \cdot AD = \frac{65}{4}$

$BC = 9 \qquad (2R)^2 =$

$$\frac{ED}{2R} = \frac{EH}{BF}$$

$$\frac{5}{4R} = \qquad \frac{\frac{5}{2}}{2R} = \frac{EB}{BF}$$

$$\frac{5}{4R} = \frac{EB}{BF}$$

$f(\frac{1}{3}) = \cancel{f(1)} + f(\frac{1}{3})$

$f(\frac{2}{3}) = \cancel{f(2)} + f(\frac{1}{3})$

$f(\frac{2}{3}) = f(\frac{1}{3})$

$f(\frac{5}{3}) - f(\frac{4}{3}) = 1 \qquad \frac{2r}{2R} = \frac{AD}{EA}$

$\frac{r}{R} = \frac{AD}{EA + AD} \qquad 4R^2$

$f(\frac{4}{3}) = \cancel{f(4)} + f(\frac{1}{3})$

$f(\frac{4}{3}) = f(\frac{1}{3})$

$f(\frac{5}{3}) = 1 + f(\frac{1}{3})$

$$\boxed{\frac{r}{R} = \frac{65}{4x\left(\frac{65}{4x} + x\right)}}$$

$f(\frac{5}{3}) - 1 = f(\frac{1}{3}) = f(\frac{4}{3})$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha$

$\sin 3x\cos 5x - \cos 3x \sin 5x + \sin 5x \cos 3x -$

$\sin(3x+5x)+\sin(5x-3x)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$4^{\log_4 3\cdot\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$

$(x^2+6x)^{\log_4 3}-(x^2+6x)^{\log_4 5}+(x^2+6x)^1 \geqslant 0$

$\frac{5}{3}$

$t^{\log_4 3}-t^{\log_4 5}+t\geqslant 0 \quad |:t \quad \cancel{2-2+2 \geqslant 0}$

$\frac{3+5}{2}$

$\cancel{(t-1)(\log_4 3-\log_4 5+1)}\geqslant 0$

$t^{\log_4 5}=t^{\log_4 3}+t$

$\cancel{2^5-2^7+2^1} \vee 0$

$t^{\log_4 3-1}-t^{\log_4 5-1}\geqslant$

$\cancel{5-7+1} \vee 0$

$\cancel{2^2-2^3+2}$

x^2+6x

$\begin{cases} 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$

$2\cos^2\alpha\,(tg^2\alpha+4\,tg\,\alpha)=0$

$\cos 2\beta = \frac{8}{17}\cdot\sqrt{17}=\frac{8}{\sqrt{17}}$

$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha=-4 \\ tg\,\alpha=0 \end{array}\right.$

$\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}} \qquad \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+c)$

$8\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha+1=-1$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$8\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=-2\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\cos 2\alpha\left(\pm\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\boxed{2\sin^2\alpha+8\sin\alpha\cos\alpha=0}$

$4\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha=-1$

$8\sin\alpha\cos\alpha\pm(2\cos^2 2\alpha-1)=-1$

$\boxed{8\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2 2\alpha}-1=-1$

$2\cos^2(4\,tg\,\alpha+1)$

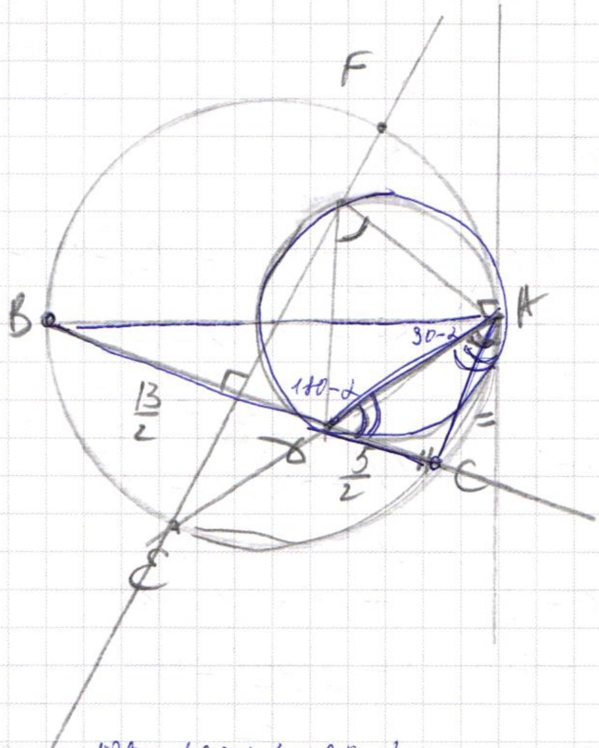
$\boxed{tg\,\alpha=-\frac{1}{4}}$

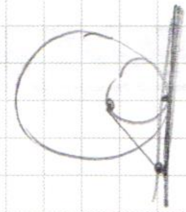
☑ черновик ☐ чистовик

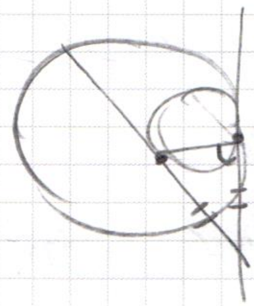
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

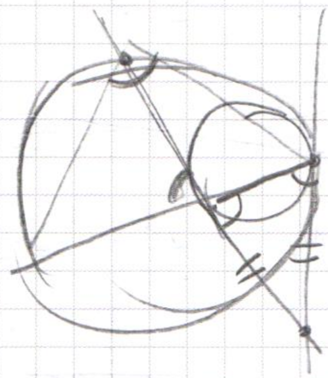


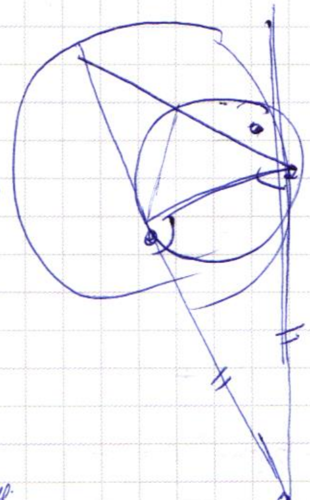




$\cancel{180} - \cancel{180} + \alpha - 90 + \alpha$

$2\alpha - 90$





$(x^2+6x)^{\log_3 4} - (x^2+6x)^{\log_4 5} + x^2+6x \geq 0$

$\alpha^{\log_3 4} - \alpha^{\log_4 5} + \alpha \geq 0$

$\alpha^{\log_4 3} + \alpha \geq \alpha^{\log_4 5}$ 3

$\log_3 4 +$

$\cancel{3 + 4 \geq 5}$

$\log_4 3 - \log_4 5 + 1$

$\log_4 \frac{3}{5} + 1$

$\alpha \; b^{\log}$

$f'(b) = \frac{f(b)}{b^{\log}}$

$(\log_4 3)^{\log}$