МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

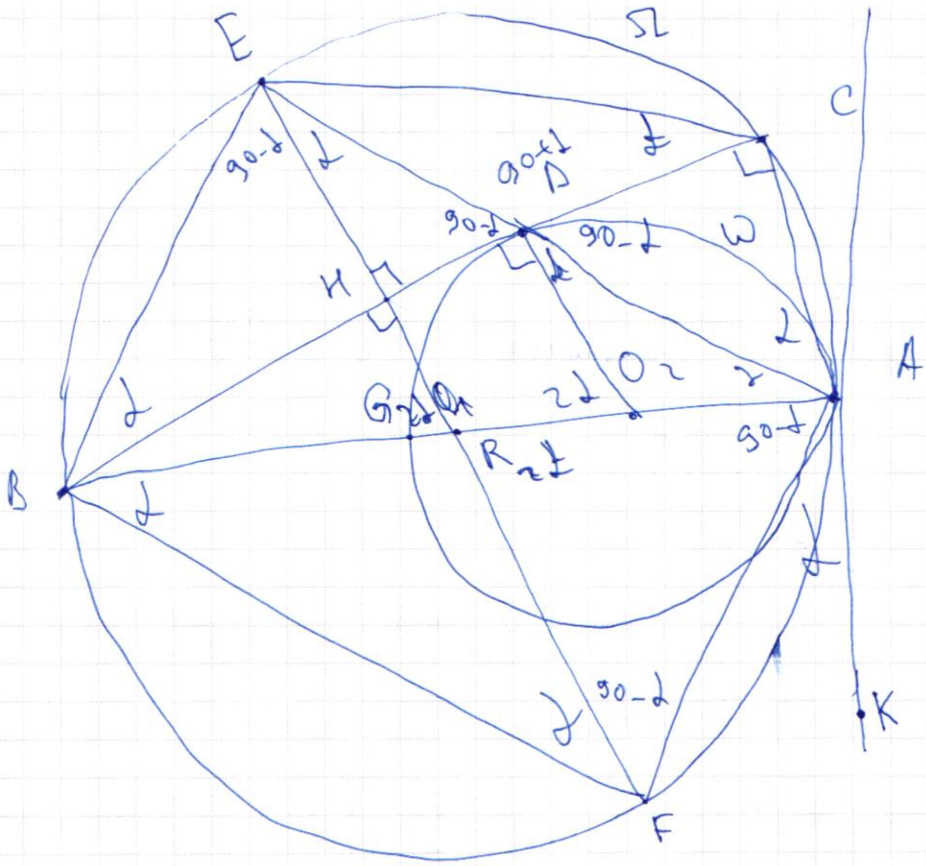
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



1) Пусть точка пересечения EF и AB — R, центр окр-ти Ω — O_1, а окр-ти ω — O_2, точка пересечения EF и BC — H, вторая точка пересечения окр-ти ω и AB — G.

2) Проведём касательную через точку A к обеим окр-тям

3) Возьмём точку K на касательной, обозначим $\angle KAF = \alpha$, тогда $\angle FEA = \alpha = \angle KAF$ (по св-ву касательной) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABF = \angle AEF = \alpha$ (опираются на $\overset{\frown}{AF}$), $AB \perp AK \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAK = 90° = \angle BAF + \alpha \Rightarrow \angle BAF = 90 - \alpha$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1
(Нумеровать только чистовики)

17) $\triangle BDO_2$ – прямоугольный: $\sin BO_2D = \frac{BD}{BO_2} = \sin 2\alpha$

18) Пусть радиус $\omega = r$, а радиус $\Omega = R$.

19) $\sin 2\alpha = \frac{BD}{BO_2} = \frac{BC}{AB}$

$\frac{13}{2BO_2} = \frac{9}{2R}$ $\qquad 13R = 9BO_2$

$13R = 9(BO_1 + O_1A - O_2A)$

$13R = 9(2R - r)$

$9r = 5R \qquad r = \frac{5R}{9}$

20) По ~~св-ву~~ Th о секущей и касательной: $BD^2 = BG \cdot BA$

$BD^2 = (BO_1 - GA + O_1A) \cdot 2R$

$BD^2 = (2R - 2r) \cdot 2R$

$\left(\frac{13}{2}\right)^2 = (2R - \frac{10R}{9}) \cdot 2R$

$\left(\frac{13}{2}\right)^2 = 4R^2 - \frac{20R^2}{9}$

$\frac{16R^2}{9} = \frac{13^2}{2^2}$

$\left(\frac{4R}{3}\right)^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2$

$\frac{4R}{3} = \frac{13}{2}$

$R = \frac{3 \cdot 13}{8}$

$R = \frac{39}{8}$

$r = \frac{5 \cdot \cancel{3}^{1} \cdot 13}{\cancel{9}_{3} \cdot 8} = \frac{65}{24}$

21) $\angle EAF = 90^\circ$ (EF – диаметр) => $\angle EFA = 90 - \alpha$

22) $\angle AO_1F = 2 \cdot \angle AEF = 2\alpha$

□ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) $BC \perp EF \Rightarrow \angle EHD = 90^\circ = \angle HDE + \alpha \Rightarrow \angle HDE = 90 - \alpha = \angle CDA$ (вер.)

5) $\angle BCA = 90^\circ$ (AB - диаметр) $= \angle DAC + 90 - \alpha \Rightarrow \angle DAC = \alpha$

6) $\angle BEF = \angle BAF = 90 - \alpha$, $\angle EBC = \angle \cancel{EAC}\, EAC = \alpha$

7) $\angle EDC + \angle CDA = 180^\circ$ (смежные) $= \angle EDC + 90 - \alpha \Rightarrow \angle \cancel{EDC}\, EDC =$

$= 90 + \alpha$

8) $\angle EDC = \angle BDA$ (вер.) $= \angle BDO_2 + \angle O_2DA = 90 + \alpha$

9) BD - касательная $\Rightarrow \angle \cancel{BO_2}\, BDO_2 = 90$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_2DA = \alpha$

10) $O_2D = O_2A$ - радиусы $\Rightarrow \triangle DO_2A$ - р/б $\Rightarrow \angle BAE = \angle DAB = \alpha$

11) $\angle BAE = \angle BFE = \alpha = \angle BCE$ (опираются на $\overset{\frown}{BE}$)

12) $\triangle BRF$: $\angle BRF = 180^\circ - \angle RBF - \angle BFR = 180^\circ - 2\alpha$

13) $\angle BRE = 180^\circ - \angle BRF = 2\alpha$ (смежные)

14) $\angle BFE = \alpha$, $\angle BRE = 2\alpha$, они опираются на $\overset{\frown}{BE}$,

$2 \cdot \angle BFE = \angle BRE \Rightarrow R$ - центр Ω, R - совпадает с $O_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow EF$ - диаметр

15) $\angle BO_2D = 2 \cdot \angle BAD = 2\alpha$, $\angle BAC = \angle BAE + \angle EAC = 2\alpha$

16) $\triangle BCA$ - прямоугольный : $\sin BAC = \frac{BC}{AB} = \sin 2\alpha$

23) $\angle DO_2A = 180^\circ - \angle BO_2D = 180 - 2\alpha$

24) $\cos BO_2D = \frac{DO_2}{BO_2} = \frac{r}{2R-r} = \cos(2\alpha)$

25) $\triangle DO_2A$: По Th косинусов: $AD^2 = 2r^2 - 2r^2\cos(180-2\alpha)$

$AD^2 = 2r^2(1+\cos 2\alpha)$

$AD = \sqrt{2r^2\left(1+\frac{r}{2R-r}\right)} = \sqrt{\frac{2r^2(2R-r+r)}{2R-r}} =$

$= \sqrt{\frac{2r^2\cdot 2R}{2R-r}}$

26) $\triangle DCA$ - прямоуг. $\Rightarrow$ $\cancel{\sin}\ \cancel{\cos}\ DAC = \cancel{\sin\alpha}\ \cancel{\cos} = \sin DAC = \sin\alpha =$

$= \frac{CD}{AD}$

27) $\sin FEA = \sin\alpha = \cancel{\frac{AF}{EA}}\ \frac{AF}{EF}$

28) ~~sin~~ $\cos EFA = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha = \frac{CA}{AD} = \frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{2R-r}{4r^2R}} =$

$= \frac{5\cdot}{4\cdot r}\sqrt{\frac{2R-r}{R}} = \frac{\cancel{5}^{1}\cdot\cancel{24}^{6}}{\cancel{4}_{1}\cdot\cancel{65}_{13}}\sqrt{\frac{\frac{9\cdot13\cdot2}{8\cdot3}-\frac{5\cdot13}{3\cdot8}}{\frac{9\cdot13}{8\cdot3}}} =$

$= \sqrt{\frac{13(18-5)}{9\cdot13}}\cdot\frac{6}{13} = \frac{\cancel{13}\cdot\cancel{6}^{2}}{\cancel{13}\cdot\cancel{3}_{1}\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EFA = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$

29) $\angle EFA$ - острый, т.к. $\triangle EAF$ - прямоуг. $\Rightarrow \sin\overset{EFA}{\cancel{\alpha}} = \sqrt{1-\cos^2 EFA} =$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= \sin EFA = \sqrt{1 - \frac{4}{13}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

30) $AF = \sin\alpha \cdot EF = \cos(90-\alpha) \cdot EF = \cancel{\frac{2}{\sqrt{13}}} = \cos(90-\alpha) \cdot 2R$

31) $S_{AEF} = \sin EFA \cdot EF \cdot AF \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin(90-\alpha) \cdot EF^2 \cos(90-\alpha) =$

$= \frac{(2R)^2 \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}}}{2} = \frac{2 \cdot 6 \cdot R^2}{13} = \frac{12 \cdot 3^2 \cdot 13^2}{13 \cdot 8^2} = \frac{9 \cdot 13 \cdot 3}{8 \cdot 2} =$

$= \frac{27 \cdot 13}{16} = \frac{351}{16}$

Ответ: радиус $\omega = \frac{65}{24}$, $\Omega = \frac{39}{8}$; $\angle AFE = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$;

$S_{AEF} = \frac{351}{16}$.

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2 + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$\begin{cases} x^2+6x > 0, \\ 3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} \end{cases}$

Пусть $t = x^2+6x$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$, $t = 4^{\log_4 t}$, $t^{\log_4 5} = 5^{\log_4 t}$

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

$f(t) = 3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t}$

$f(t)$ - монотонно возрастающая функция, выпукла вниз

$g(t) = 5^{\log_4 t}$

$g(t)$ - монотонно возрастающая функция, выпукла вниз $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f(t)$ и $g(t)$ могут иметь только одну точку пересечения.

$f(t) = g(t)$

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} = 5^{\log_4 t}$

Если $\log_4 t = 2$, то $9+16=25$ $25=25$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $t=16$ $f(t)$ и $g(t)$ пересекаются $\Rightarrow$

Если $t=4$, то $\log_4 t = 1$, $3+4 \geq 5$ $7 \geq 5$

$\Rightarrow$ $3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$, при $t \in [-\infty; 16]$

~~$\log_4 t \in ($~~

$t = x^2 + 6x$

$\begin{cases} x^2 + 6x > 0, \\ x^2 + 6x \leq 16 \end{cases}$

$\begin{cases} x(x+6) > 0, \\ x^2 + 6x - 16 \leq 0 \end{cases}$

$x^2 + 6x - 16 = 0$

$D = 36 + 64 = 100$

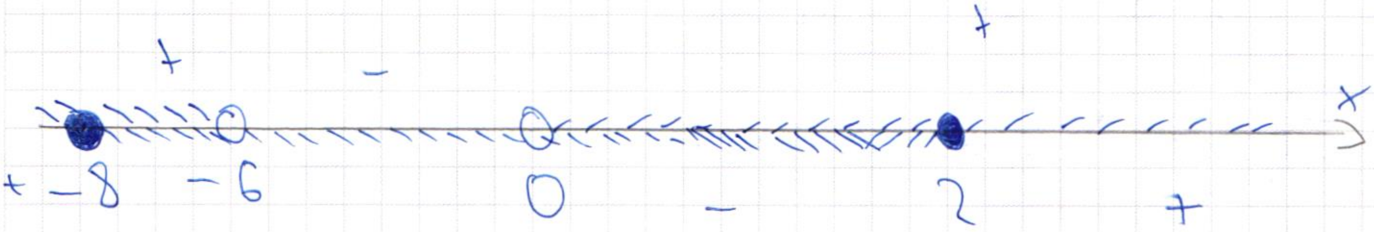
$x = \frac{-6 \pm 10}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x = -8 \\ x = 2 \end{array} \right.$

$\begin{cases} x(x+6) > 0, \\ (x+8)(x-2) \leq 0 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x(x+6)>0, \\ (x+8)(x-2)\le 0 \end{cases}$$



$x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$.

Ответ: $[-8; -6) \cup (0; 2]$.

№1

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$$

$$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)=-\frac{8}{17}$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$$

$$\cos 2\beta=\frac{4\sqrt{17}}{17} \qquad \cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}\ (*)$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta=-\frac{8}{17}-\sin 2\alpha$$

$-\frac{4}{17}+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta=-\frac{8}{17}-\sin 2\alpha$

$\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta+\frac{4}{17}=-\sin 2\alpha$

~~Сл.1 $\cos(2\alpha+2\beta)>0$~~

Сл.1 a $\sin 2\beta>0$ $\cos(2\alpha+2\beta)>0$

$\sqrt{1-\frac{1}{17}}\sqrt{1-\frac{16}{17}}+\frac{4}{17}=-\sin 2\alpha$

$\frac{16}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{4}{17}=-\sin 2\alpha$

$\frac{16}{17}+\frac{4}{17}=-\sin 2\alpha$

$\frac{20}{17}=-\sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha=-\frac{20}{17}$ - ~~нет решений~~ не может быть $\sin 2\alpha\geq -1$

Сл. ~~1 a~~ 2 $\sin 2\beta<0$ $\cos(2\alpha+2\beta)<0$

$-\frac{16}{17}+\frac{4}{17}=-\sin 2\alpha$

$-\frac{12}{17}=-\sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha=\frac{12}{17}$ ~~$2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{12}{17}$~~

~~Сл.2 $\cos(2\alpha+2\beta)<0$~~

~~Сл.2а $\cos 2\beta>0$~~

Сл. 2a $\cos 2\alpha>0$

$\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{17^2-12^2}}{17}$ $\quad tg 2\alpha=\frac{12}{\sqrt{17^2-12^2}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg2\alpha = \cancel{1-2tg}\ \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$(1-tg^2\alpha)\,tg2\alpha = 2tg\alpha$

$tg^2\alpha\, tg2\alpha - 2tg\alpha - tg2\alpha = 0$

$\cancel{t} = tg\alpha$

$t^2\frac{12}{\sqrt{5\cdot 29}} - 2t - \frac{12}{\sqrt{5\cdot 29}} = 0$

$d = 4 + 4\frac{144^2}{5\cdot 29} = 4\left(\frac{289^{=17^2}}{5\cdot 29}\right)$ $\sqrt{d} = 34\sqrt{\frac{1}{145}}$

$t = \frac{2 \pm 34\sqrt{\frac{1}{145}}}{\frac{24}{\sqrt{145}}}$ $t = \frac{\sqrt{145} \pm 17}{12}$

$tg\alpha = t$

$tg\alpha = \frac{\sqrt{145}+17}{12}$ или $tg\alpha = \frac{\sqrt{145}-17}{12}$

Сл. 2б $\cos 2\alpha < 0$

$\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{145}}{17}$ $tg2\alpha = -\frac{12}{\sqrt{145}}$

$\cancel{tg\alpha = t}$ $tg\alpha = t$

$-\frac{12}{\sqrt{145}}t^2 - 2t + \frac{12}{\sqrt{145}} = 0$ $t = \frac{2 \pm 34\sqrt{\frac{1}{145}}}{-2\frac{12}{\sqrt{145}}}$

$tg\alpha = t$

$$tg\,\alpha = \frac{\sqrt{145} \pm 17}{-12}$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = \dfrac{\sqrt{145}+17}{-12} \\ tg\,\alpha = \dfrac{\sqrt{145}-17}{-12} \end{array}\right.$$

$\cancel{\sqrt{145}+17 \neq \sqrt{145}-17}$

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = \dfrac{\sqrt{145}+17}{12} \\ tg\,\alpha = \dfrac{\sqrt{145}-17}{12} \\ tg\,\alpha = \dfrac{-\sqrt{145}-17}{12} \\ tg\,\alpha = \dfrac{-\sqrt{145}+17}{12} \end{array}\right.$$ – все различные

Ответ: $\dfrac{\sqrt{145}+17}{12}$, $\dfrac{\sqrt{145}-17}{12}$, $\dfrac{-\sqrt{145}-17}{12}$, $\dfrac{17-\sqrt{145}}{12}$.

№2

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$3xy-2x-3y+2 \geq 0$

$\cancel{(3y-2)(2x=}$

$$\begin{cases} (3y-2)(x-1) \geq 0, \\ (3y-2x)^2 = (3y-2)(x-1), \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$9y^2-12xy+4x^2-\cancel{15}\overset{3}{}xy+3y+2x-2=0$

$12y^2-15xy+7x^2-4x-y-6=0$

$y(12y-15x-1)+7x^2-4x-6=0$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 9y^2 - 15xy + \cancel{7x^2}\ 4x^2 + 3y + 2x - 2 = 0, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$6y^2 - 15xy + x^2 + 8x + 7y + 2 = 0$$

№6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \leq 8x^2 - 34x + 30$$

$$x \neq 1$$

$$\begin{cases} 4x-3 \leq (2x-2)(8x^2 - 34x + 30), \\ x > 1 \end{cases}$$

$$4x - 3 \leq 16x^3 - 68x^2 + 60x - 16x^2 + 68x - 60$$

$$16x^3 - 84x^2 + 124x - 57 \geq 0$$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t} + t - t^{\log_4 5} \geq 0$

$3^{\log_4 t} - 5^{\log_4 t} + t \geq 0$

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

$3^{\log_2 8}$

$4^{\log_2 3} = 9$

$4^{\log_4 t}$ 124 − 34

36 2 4 16.8 124

8 − 34 + 30 4

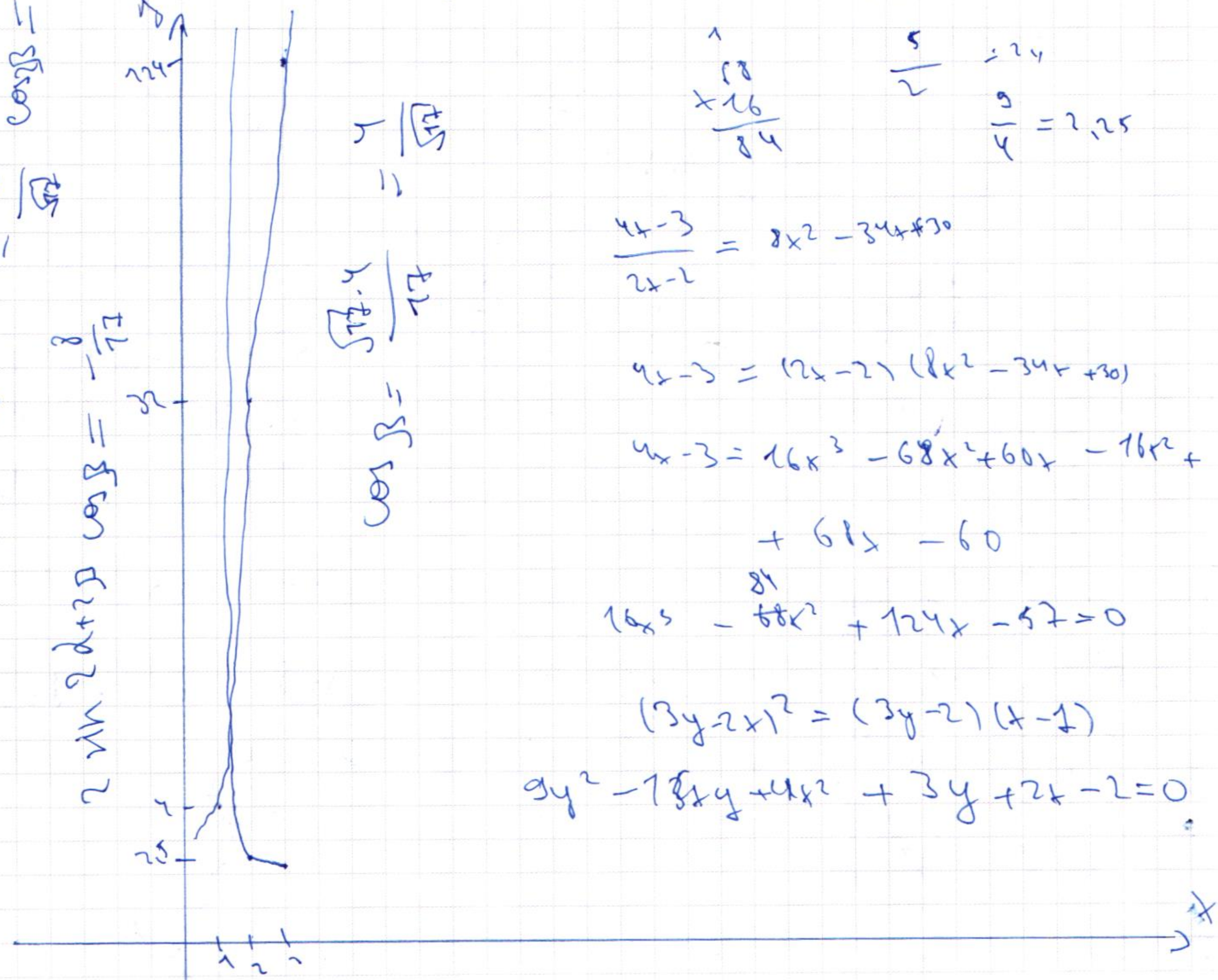
$\frac{5}{2} = 2{,}4$

$\frac{9}{4} = 2{,}25$

68 + 16 = 84

$\cos\beta = \frac{8}{17}$

$\sqrt{17}$



$\cos\beta = \frac{\sqrt{17}}{17}$

$2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cos\frac{2\beta}{2} = -\frac{8}{17}$

$2\sin 2\alpha + 2\beta \cos\beta = -\frac{8}{17}$

$\frac{4x-3}{2x-2} = 8x^2 - 34x + 30$

$4x - 3 = (2x-2)(8x^2 - 34x + 30)$

$4x - 3 = 16x^3 - 68x^2 + 60x - 16x^2 + 68x - 60$

$16x^3 - 68x^2 + 124x - 57 = 0$ (84)

$(3y-2x)^2 = (3y-2)(x-1)$

$9y^2 - 18xy + 4x^2 + 3y + 2x - 2 = 0$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\frac{8}{\sqrt{17}} \sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha)$

$\cos 2\beta \sin(2\alpha+2\beta) + \sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$-\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}} + \frac{4\sin 2\beta}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\frac{4\sin 2\beta - \cos 2\beta}{\sqrt{17}} = -\sin 2\alpha - \frac{8}{17}$

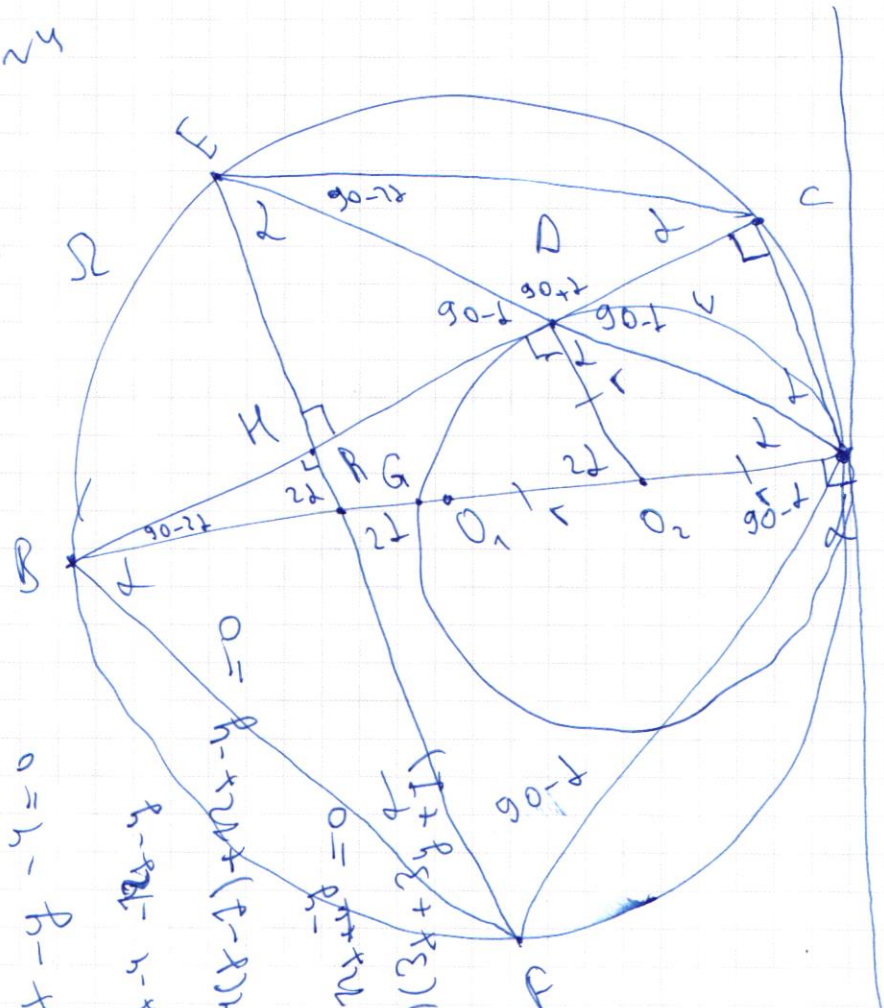
$\frac{8\sin\beta\cos\beta - \cos^2\beta + \sin^2\beta}{\sqrt{17}} = -\sin 2\alpha - \frac{8}{17}$

$\frac{9}{2R} = \frac{13}{2(2R-r)}$

$26R = 18(2R-r)$

$18r = 10R$

$\sin 2\alpha = \frac{9}{2R} = \frac{BD}{R+R-r}$



$CD = \frac{9}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$r^2 + BD^2 = (R+R-r)^2$

$r^2 + BD^2 = (2R-r)^2$

$\cancel{r^2} + BD^2 = 4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2}$

$BD^2 = 4R^2 - 4Rr$

$(R-(2r-R))\cdot 2R = BD^2$

$(2R-2r)\cdot 2R = BD^2$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 13 \\ \hline 81 \\ +27 \\ \hline 351 \end{array}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(3y-2x)^2 = (3y-2)(x-1)$ $\quad 3y \geq 2x$

$\log_2 4 + \log_2 8 =$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 - 3xy + 2x + 3y - 2 = 0$ $\quad \log_2(18?) = 5$

$9y^2 + 4x^2 - 15xy + 2x + 3y - 2 = 0$

$3y^2 + 3x^2 - 6x - 4y - 4 = 0$

$12y^2 + 7x^2 - 18xy - 4x - y - 6 = 0$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y + 13y = 4 + 13y$

$3x^2 + 3y^2 + \frac{3(3y-2)(x-1)}{3y-2x} = 4 + 13y$

$t(t^{\log_4 5 - 1} - 1)$

N3

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2 + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$t = x^2 + 6x$ $\quad \frac{84}{4}$ $\quad 336$

$\log_4(3^{\log_4 t} + t) \geq \log_4(t^{\log_4 5})$

$3^{\log_4 t} + t \geq |t|^{\log_4 5}$ $\quad \geq \log_4 5 \log_4 t$

$\log_4 t \log_4 3 \geq$

$t > 0$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$128 + 124 - 57$

$128 + 67$

$\frac{84}{4}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

№1 не знать $-\frac{4}{\sqrt{17}}$

$-\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}} + \frac{4\sin 2\beta}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ ~~$(x-(y+1))(6y+x+7$~~

$\frac{4\sin 2\beta - \cos 2\beta}{\sqrt{17}} + \frac{8}{17} = -\sin 2\alpha$

$x^2+6y^2+8x+7y-1-15xy=0$

$x(x+8)+y(y+7)-1(1+15xy)$

$x^2-1)$

$\frac{\sqrt{17}(4\sin 2\beta - \cos 2\beta)+8}{17} = -\sin 2\alpha$

№2

$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=1 \end{cases}$

$(3y-2)(x-1)$

~~$(x+y)(x+y-1)$~~

$3y-2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$(3y-2)(x-1) \geq 0$

$(3y-2x)^2 = (3y-2)(x-1)$

$(3y+1)(2x+3y+1)-3xy-2$

$9y^2-12xy+4x^2-3xy+2x+3y-2=0$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$3x^2+3y^2-6x-4y=1=0$

$2y^2-y-6=0$

$1+288=289$

$16+161$

[x] черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)