МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$tg\alpha = ?$

$\sin 2(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin 2(\alpha+\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sin(2\alpha+2\beta)} = -\frac{1}{5}\cdot -\sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$2\beta = \left[\begin{array}{l} \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n \\ -\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n \end{array}\right., n\in\mathbb{Z}$$

$2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ или $2\alpha+2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+2\pi k$

$$\alpha = \left[\begin{array}{l} \dfrac{-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi(k-n)}{2} \\ \dfrac{\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi(k-n)}{2} \end{array}\right. \quad \alpha = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi m}{2} \\ \dfrac{\pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi m}{2} \end{array}\right.$$

$$tg\alpha = \left[\begin{array}{l} tg\left(-\dfrac{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}}{2} + \pi m\right) \\ tg\left(\dfrac{\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}{2} + \pi m\right) \\ tg\left(\dfrac{\pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}}{2} + \pi m\right) \\ tg\left(\dfrac{\pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}}{2} + \pi m\right) \end{array}\right.$$

I $tg\left(-\frac{\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+\arccos\frac{1}{\sqrt5}}{2}\right)$ $\quad x=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\quad y=\arccos\frac{1}{\sqrt5}$

$$tg\left(-\frac{x+y}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{-(x+y)}{2}\right)}{\cos\left(-\frac{x+y}{2}\right)}=\frac{-\sin\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}}=$$

$$=-\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}-\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}$$

$$\cancel{\sin\frac{x}{2}=}\quad \cos x=\sqrt{1-\sin^2x}=\sqrt{1-\frac15}=\frac{2}{\sqrt5}=2\cos^2\frac{x}{2}-1$$

$$\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1}{\sqrt5}+\frac12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt5}}{\sqrt{2\sqrt5}}\cancel{=\frac{4\sqrt5+10}{2\sqrt5}}\sqrt{\frac{2+\sqrt5}{2\sqrt5}}$$

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{\sqrt5-2}{2\sqrt5}}\qquad \cos\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}}\qquad \sin\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{\sqrt5-1}{2\sqrt5}}$$

$$tg\left(-\frac{x+y}{2}\right)=-\frac{\sqrt{\frac{(\sqrt5-2)(\sqrt5+2)}{(2\sqrt5)^2}}+\sqrt{\frac{(\sqrt5-1)(1+\sqrt5)}{(2\sqrt5)^2}}}{\sqrt{\frac{(\sqrt5+2)(\sqrt5+1)}{(2\sqrt5)^2}}-\sqrt{\frac{(\sqrt5-1)(\sqrt5-2)}{(2\sqrt5)^2}}}=-\frac{3}{\sqrt{8+3\sqrt5}-\sqrt{8-3\sqrt5}}=$$

$$=-\frac{\sqrt{8+3\sqrt5}+\sqrt{8-3\sqrt5}}{2\sqrt5}$$

$$tg\left(\frac{y-x}{2}\right)=\frac{\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}=\frac{1}{\sqrt{8+3\sqrt5}+\sqrt{8-3\sqrt5}}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x-y}{2}\right)=-ctg\left(\frac{x-y}{2}\right)=ctg\left(\frac{y-x}{2}\right)=\sqrt{8+3\sqrt5}+\sqrt{8-3\sqrt5}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x+y}{2}\right)=ctg\left(-\frac{x+y}{2}\right)=-\frac{2\sqrt5}{\sqrt{8+3\sqrt5}+\sqrt{8-3\sqrt5}}$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{8+3\sqrt5}+\sqrt{8-3\sqrt5}}{2\sqrt5}$; $-\frac{2\sqrt5}{\sqrt{8+3\sqrt5}+\sqrt{8-3\sqrt5}}$;

$\frac{1}{\sqrt{8+3\sqrt5}+\sqrt{8+3\sqrt5}}$; $\sqrt{8+3\sqrt5}+\sqrt{8+3\sqrt5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x-12y\geq 0 \\ 2xy-12y-x+6\geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$$ ~~окруж. с ц. в~~

$$\begin{cases} x^2-26xy+x+12y+144y^2-6=0 \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$$

~~$\mathcal{D}=646y^2$~~ $x^2-(26y-1)x+144y^2+12y-6=0$

$$\mathcal{D}=676y^2-52y+1-576y^2-48y+24=$$
$$=100y^2-100y+25=(10y-5)^2$$

$$x=\frac{26y-1\pm|10y-5|}{2}$$

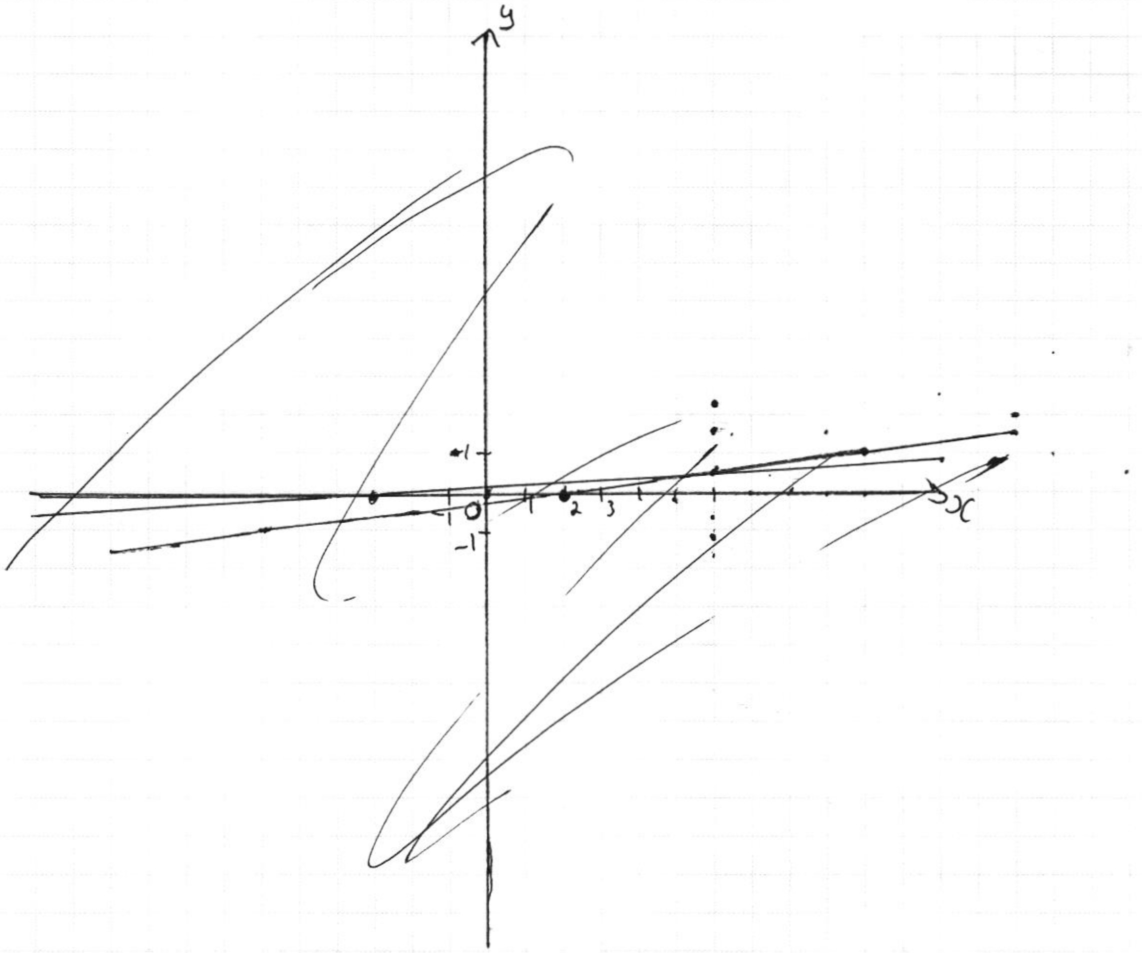
I. $\begin{cases} x=18y-3, \quad y\geq \frac{1}{2} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90=(3\sqrt{10})^2 \end{cases}$

II $\begin{cases} x=8y+2, \quad y\leq\frac{1}{2} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=18y-3 \\ x=8y+2 \end{array}\right. \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$

III $\begin{cases} x=8y+2, \quad y\geq\frac{1}{2} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$

IV $\begin{cases} x=18y-3, \quad y\leq\frac{1}{2} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$



I. $x = 18y - 3$

$(18y-9)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$81(2y-1)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$90(2y-1)^2 = 90$

$\left[\begin{array}{l} 2y-1=1 \\ 2y-1=-1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=0 \end{array}\right.$

$\begin{cases} y=1 \\ x=15 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ x=-3 \end{cases}$

II $x = 8y + 2$

$(8y-4)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$16(2y-1)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$(2y-1)^2 = \frac{90}{25} = \frac{18}{5}$

$\left[\begin{array}{l} 2y-1=\frac{18}{5} \\ 2y-1=-\frac{18}{15} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y=\frac{23}{10} \\ y=-\frac{13}{10} \end{array}\right.$

$\begin{cases} y=2,3 \\ x=20,4 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-1,3 \\ x=-8,4 \end{cases}$

Ответ: $(15;1); (-3;0); (20,4;2,3); (-8,4;-1,3)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

ОДЗ: $10x-x^2>0 \Rightarrow x^2-10x<0$

$x \in (0;10)$

$\cancel{x^2-10x}$ $10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4}-5^{\log_3(10x-x^2)} \geq 0$

$t=10x-x^2$

$t+t^{\log_3 4}-5^{\log_3 t} \geq 0$

$t+t^{\log_3 4}-5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 3}} \geq 0$

$t+t^{\log_3 4}-t^{\frac{1}{\log_5 3}} \geq 0$

$t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5} \geq 0$

I. Если $t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5} \geq 0$, $4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$

$\log_3 t \leq 0$

$t \in (0;1]$

При $t \in (0;1]$ $t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5} \geq 0$ всегда

II Если $t^{\log_3 5} > t^{\log_3 4}$, $t \in (1;10)$

$t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5} \geq 0$

~~$f(t)=t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}=t+4^{\log_3 t}-5^{\log_3 t}$~~

~~$f'(t)=1+$~~ ~~$3^{\log_3 t}+4^{\log_3 t}-5^{\log_3 t} \geq 0$~~

~~$m=\log_3 t$ $f(m)=3^m+4^m-5^m$~~

~~$f'(m)=\ln 3\cdot 3^m+\ln 4\cdot 4^m-\ln 5\cdot 5^m$~~

$f(t)=t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}$

$f'(t)=1+\log_3 4\cdot t^{(\log_3 4-1)}-\log_3 5\cdot t^{(\log_3 5-1)}$

$1+\log_3 4\cdot t^{\log_3\frac{4}{3}}-\log_3 5\cdot t^{\log_3\frac{5}{3}}$

$\cancel{1+\log_3 4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 t}-\log_3 5\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 t}}$

~~Рассмотрим:~~

$\cancel{\log_3 4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 t}\geq\log_3 5\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 t}}$

$\cancel{\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_3 t}\geq\log_4 5}$

$\cancel{\log_4 5>1,\ \frac{4}{5}<1\Rightarrow\log_3 t}$ ~~точно~~ $\cancel{<0}$, ~~но~~ $\cancel{\log_3 t>0\Rightarrow}$

$f''(t)=\log_3 4(\log_3 4-1)\cdot t^{\log_3\frac{4}{9}}-\log_3 5(\log_3 5-1)\cdot t^{\log_3\frac{5}{9}}$

$t^{\log_3\frac{4}{9}}>t^{\log_3\frac{5}{9}}$ т.к. $t>1$

$t^{\log_3\frac{4}{9}-\log_3\frac{5}{9}}<1<\log_4 5\cdot\log_{\frac{4}{3}}\frac{5}{3}\Rightarrow f'(t)\downarrow$ на $\mathbb{R}\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(1)>f'(9)$ $\quad f'(10)<f'(1)=1+\log_3\frac{4}{5}=\log_3\frac{12}{5}>0$

$\cancel{f(1)=1+\log_3 4-\log_3 5=1+\log_3\frac{4}{5}>0}$

$\cancel{f(10)=1+\log_3 4\cdot 10^{\log_3\frac{4}{3}}-\log_3 5\cdot 10^{\log_3\frac{5}{3}}}$

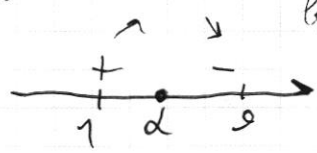
$\cancel{1+\log_3\frac{4^{10\log_3\frac{4}{3}}}{5^{10\log_3\frac{5}{3}}}}$ $\quad\cancel{\log_3(5)\cdot t^{\log_3\frac{5}{3}}-\log_3(4)\cdot t^{\log_3\frac{4}{3}}=}$

$\cancel{f'(9)=1+\log_3 4}$ $\quad\cancel{=\log_3\frac{5^{t^{\log_3\frac{5}{3}}}}{4^{t^{\log_3\frac{4}{3}}}}=1}$

$\cancel{5^{t^{\log_3\frac{5}{3}}}=3\cdot 4^{t^{\log_3\frac{4}{3}}}=4^{t^{\log_3\frac{4}{3}}+\log_4 3}}$

$\cancel{\{t^{\log_3\frac{5}{3}}}$

~~всегда, когда~~ $\cancel{t>0\Rightarrow}$



$\left.\begin{aligned}f(1)=1>0\\ f(9)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow t\in(1;9],\Rightarrow t\in(0;9]$

$10x-x^2\leq 9\Rightarrow x^2-10x+9\geq 0\Rightarrow x\in(0;1]\cup[9;10)$

Отв: $(0;1]\cup[9;10)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

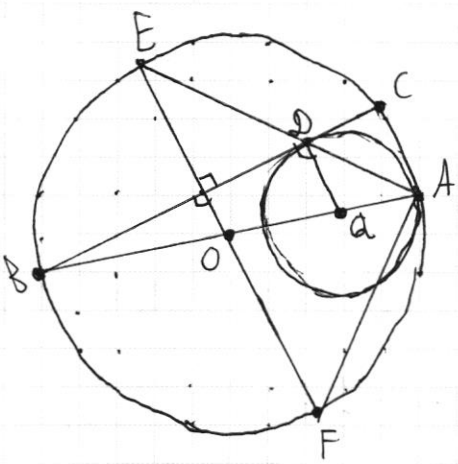
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано: Ок-ти Ω и w касаются в т. A.

O – центр Ω, Q – центр w

BC кас. $w = D$; $BD = \frac{17}{2}$; $DC = \frac{15}{2}$

$AD \cap \Omega = E$; $EF \perp BC$; $F \in \Omega$

$OA = ?$ $QA = ?$ $\angle AFE = ?$ $S_{\triangle AFE} = ?$

Решение:

№5

$f(ab)=f(a)+f(b) \qquad f(p)=[p/4]$, p – простое число

$2 \le x \le 25 \ , \quad 2 \le y \le 25, \quad f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \quad (x;y)=? \quad , x;y \in \mathbb{N}$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(xy)=f(x)+f(y)$

$\left.\begin{array}{l} f(1)+f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0 \\ f(1)+f(2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(2)=f(3) \\ f(1)=-f(3) \end{array}\right.$

$\cancel{f(7)=f(1\cdot 7)=f(1)+f(7)=1} \Rightarrow f(7)=f(5) \ , \ \cancel{f(11)=1}$

$\cancel{f(1)+f(5)=1}$

$\cancel{f(3)=f(2)=f(1)=}$

$\cancel{f(1)=f(1)+f(1)=0 \Rightarrow f(1)=0}$

$\cancel{f(3)=f\left(\frac{3}{1}\right)=f(3)+f\left(\frac{1}{1}\right)=0}$

$\cancel{f(4)=f(2)+f(2)=0}$

$\cancel{f(8)=0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=0}$

$f(4)=f(2)+f(2)=2f(3)=f(9)$

$f(2)=f\left(\frac{4}{2}\right)=f(4)+f\left(\frac{1}{2}\right)=$

$=2f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=-f(2)$

Аналогично: $f\left(\frac{1}{3}\right)=-f(3) \ , \ f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$

$f(1)+f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1=f(1)+f(7)$

$f(1)=1-f(5)=1-f(7) \Rightarrow f(5)=f(7) \Rightarrow f(10)=f(14)$,

$f(15)=f(21)$

$f(4)=f(9), \ f(8)=f(18), \ \cancel{f(12)=f(12)}$

$f(11)+\cancel{f(1)}=2 \qquad f(13)+\cancel{f(1)}=3 \qquad f(17)+\cancel{f(1)}=4$

$f(19)=4 \Rightarrow f(17)=f(19) \ , \ f(23)=5, \ \cancel{f(29)=7}$

Отв: ~~То есть подходят: (2;4), (2;5), (2;6~~ $f(6)=f(2)+f(3)=f(4)$

Подходят все кроме: (2;3), (3;2), (5;7), (7;5), (10;14), (14;10), (15;21), (21;15), (4;9), (9;4), (8;18), (18;8), (17;19), (19;17), (6;4), (4;6), (6;9), (9;6)

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

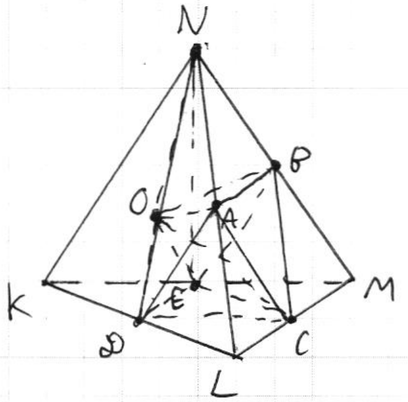
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$

N лежит на одной сфере с серединами NM, NL, LM, KM, KL.

$LM=?$ $R_{min}=?$



Решение:

1. Пусть A, B, C, D, E – середины LN, NM, ML, KL, MK соотв.,

тогда пирамида $ABEDC$ – вписана в сферу., а $ABED$ – пар-мм $\Rightarrow ABED$ – прямоугольник

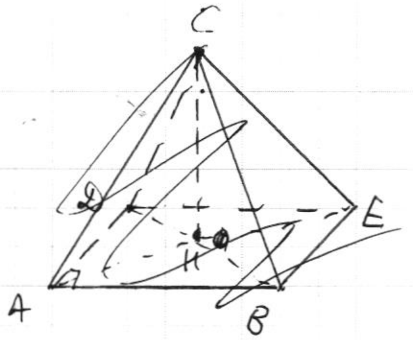
~~Рассмотрим~~ $CBADE$:

$\cancel{DC=\frac{KM}{2}=\frac{1}{2}}$ $\cancel{EC=\frac{KL}{2}=\frac{3}{2}}$

$\cancel{AC=\frac{MN}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}}$

~~Пусть $CH \perp (ABD)$~~

~~$DH=$~~



Пирамида $DNACB$ вписана в сферу $\Rightarrow$

$\Rightarrow NACB$ – прямоугольник $\Rightarrow \Delta LNM$ – прямоугольный $\Rightarrow$

$\Rightarrow CN=CM=CL$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$144 \cdot 4 = 576$ $\quad 26 \cdot 26 = 676$

$t = 3$, $t = 3^2$

$\log_3 t = \frac{\log_5 t}{\log_5 3} = \frac{\log_5 t}{\log_3 3} \cdot \log_3 5$

$3^{\log_3 t}$ $\quad 2x \quad 3x^2 \quad \log_4 5 > 1 \quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ $\quad (x^2)' = 2x \quad \frac{4}{5} < 1 \Rightarrow \log_3 t \leq 0$

$\frac{16y+4}{2} = 8y+2 \quad x' = 1$

$\frac{26y - 1 \pm |10y - 5|}{2}$

$\frac{\log_t \frac{4}{3}}{\log_t 3}$ $\quad t^{\log_3 t} > \log_4 5 \quad t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$8y + 2 = x^{\frac{4}{5}}$

$2 + 2^{\log_3 4}$ $\quad \log_3 2 = x$

I. $\frac{36y-6}{2} = 3(6y-1) \quad y = \frac{x}{8} - \frac{1}{4}$

$3^x = 4 \quad 3^y > 5$

$x = 18y - 3$ $\quad \frac{5}{4} - \frac{1}{4}$ $\quad 4^{-1} > 5^{-1} \quad x = \log_3 4$

$x^2 - 10x = 1$ $\quad \log_3 4 + \log_3 \frac{5}{4}$

$4 - 3$ $\quad 10x - x^2 = 1$

$18y = 4$

$18 - 3 = 15$ $\quad y = \frac{2}{9}$

$2\cos^2\beta - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \cos^2\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

$y = \frac{x}{18} + \frac{1}{6} = \frac{5}{18} \quad y = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

$4^{\log_3 \frac{1}{3}} = 4^{-1}$ $\quad 23 \cdot 4 = 92$ $\quad \cos\beta = \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} =$

$9 - 3 = 6$ $\quad 4^2 < 5^2$

$\frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{10}$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$2y = \frac{18}{5} + 1 = \frac{23}{5} \quad 4^{\frac{1}{2}} < \sqrt{5} \quad 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$6y - 3 = 3\sqrt{10}$

$2y = \sqrt{10} + 1$ $\quad \frac{13}{5} \quad -\frac{18}{5} + 1 = -\frac{13}{5} \quad t^{\log_3 t} \quad \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$

$y = \frac{\sqrt{10}+1}{2}$ $\quad 3^{-6} \quad \frac{1}{3^6}$

$8 \cdot \frac{23}{10} + 2 = \frac{92}{5} + 2 = \frac{102}{5} = 20,4$

$\frac{\sqrt{10}}{2}$ $\quad -\frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{1}{2}$

$x - 6 = 3\sqrt{10}$ $\quad 2 + 2^{\log_3 4}$ $\quad 2,3 \cdot 8 = 18,4$ $\quad 1,3 \cdot 8 = 10,4$ $\quad \log_3 t$

$x = 6 \pm 3\sqrt{10}$ $\quad 9 + 16 \geq 25$ $\quad \log_t 3$

$3 + 4 \geq 5 \quad 18y - 9$ $\quad 20,4 \quad 8,4 \quad 3^{\frac{1}{\log_3 8}}$

$t + t^2 + \dots$

$t(1 + t^{\log_3 4 - 1})$ $\quad t + t^{\frac{\log_t 4}{\log_t 3}} = t + 4^{\log_3 t} - 5^{\log_3 t} \geq 0$

$t = 9 = 3^2$ $\quad \ln 2 \cdot x^2 \quad 2^x$ $\quad \log_3 t = 0 \quad t = 1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\frac{64}{3125}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{625}{\frac{5}{3125}}$

$R, r = ?$ $\angle AFE = ?$ $S_{AFE} = ?$

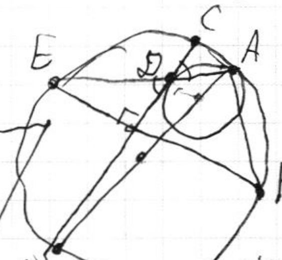
$CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

3·64



$1 - 2x^2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$2x^2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}$ $x = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}}$

$6 + 2^{\log_3 4}\cdot 4 - 2^{\log_3 5}\, 5$

$\frac{16x-16}{4x-15} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$ $x \in [\frac{1}{4}; 1]$

$3 + 4\log_3 4^4 - \log_3 5^5$ $\sin\frac{x}{2}$

$27 + 64 - 125 < 0$

$\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{2}{2\sqrt{5}}$

$ax+b \ge \frac{16x-16}{4x-15}$

$\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2}$

$8 + 3\sqrt{5}$

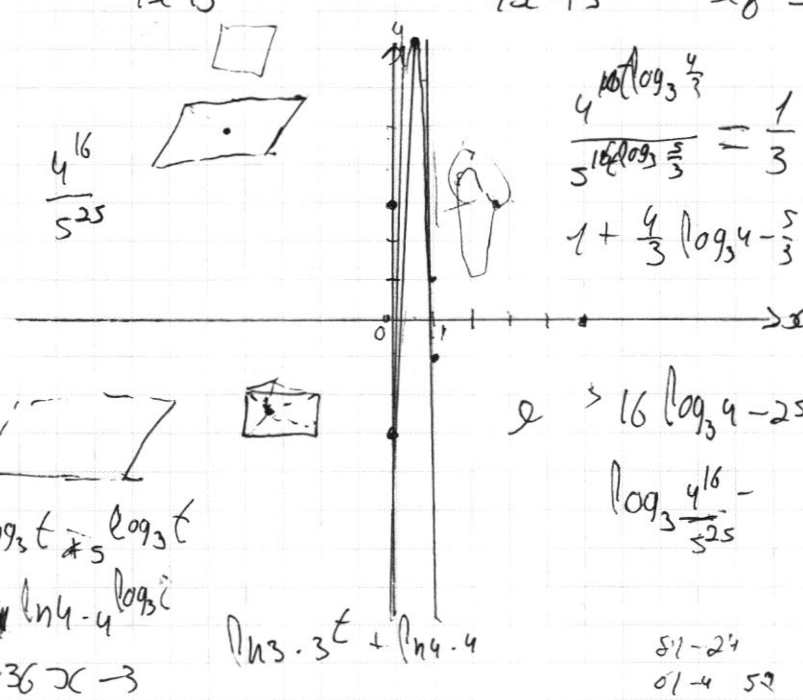
$\frac{(ax+b)(4x-15) - 16(x-1)}{4x-15} \ge 0$

$4ax^2 + (4b-15a)x - 15b - 16x + 16 = 4ax^2 + (4b-15a-16)x - 15b + 16 = 0$

$-60+60-15$

$-(32x^2 - 36x + 3)$

$\frac{6(x-1)}{4x-15}$ $\frac{4(4x-15)+45}{4x-15} = 4 + \frac{45}{4x-15}$ $x_B = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$



$\frac{4^{16\log_3\frac{4}{3}}}{5^{16\log_3\frac{5}{3}}} = \frac{1}{3}$ $32 - 36 + 3$

-1

$\frac{4^{16}}{5^{25}}$

$1 + \frac{4}{3}\log_3 4 - \frac{5}{3}\log_3 5$

$32\cdot 4 > 36\cdot 4 + 3$

$9 > 16\log_3 4 - 25\log_3 5$ $32\cdot\frac{81}{64\cdot 2} - 36\cdot\frac{9}{16} + 3 =$

$\log_3\frac{4^{16}}{5^{25}}$ $= \frac{81}{2} - \frac{81}{4} + 3 =$

$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \cdot 5^{\log_3 t}$

$\ln 3\, t + \ln 4 \cdot 4^{\log_3 t}$ $\ln 3\cdot 3^t + \ln 4\cdot 4$ $= \frac{81}{4} + 3 = \frac{93}{4}$

$-32x^2 + 36x - 3$

$x_B = \frac{9}{16}$ $y_B = -32\cdot\frac{81}{16\cdot 16} + \frac{81}{4} - 3 = \frac{81}{8} - 3 = \frac{57}{8}$

$2 - 1$

$1+1$

$\ln 3 + \ln 4 - \ln 5$ $9\ln 3 + 16\ln 4 - 25\ln 5$ $1 + \log_3 4\cdot\frac{16}{9} - \log_3 5\cdot\frac{25}{9}$

$\ln 12 > \ln 5$ $3^9\cdot 4^{16} > 5^{25}$ $\frac{1}{9}(16\log_3 4 - 25\log_3 5)$

$12^9\cdot 4^7$ 5^{25}