МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

$2\alpha+4\beta=\frac{x+y}{2}$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6},\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45.\end{cases}$$

$2\alpha=\frac{x-y}{2}$

$4\alpha+8\beta=x+y$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

$4\alpha=x-y$

$4\alpha+4\beta$ $y=4\beta$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$\cancel{b^2-13}\ b^2+36a^2=13ab$

$9p+q=90$ $\Rightarrow 90+27p=13\sqrt{pq}$

$q+36p=13\sqrt{pq}$

$27^2p^2+2\cdot 27\cdot 90p+8100=13p\cancel{q}(9p-90)$

$\frac{9\cdot 90}{25}+x=90$

$9\cdot 90+25x=2250$

$$\begin{array}{r} 2250 \\ -\ 810 \\ \hline 1440 \end{array}$$

$25x=1440$

$\sin 2x+\sin 2y = \sin(x+y)\sin(x-y)$

$(\underbrace{\sin x\cos y}_{a}+\underbrace{\sin y\cos x}_{b})(\underbrace{\sin x\cos y}_{a}-\underbrace{\sin y\cos x}_{b})$

$\sin^2 x\cos^2 y-\sin^2 y\cos^2 x$

$\cancel{\sin^2 x\cos^2 y}-((1-\cos^2 y)(1-\sin^2 x))$

$(\cos y-\cos x)(\cos y+\cos x)$

$-1\ \cancel{+\sin^2 x\cos^2 y}+\cos^2 y+\sin^2 y$

$\cos^2 y+\sin^2 x-1$

$-\cos^2 x$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha =$

$= -\frac{1}{\sqrt{7}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a^4\,\cancel{9}\cdot(27\cdot 9+13^2)+\cancel{9}a^2(2\cdot10\cdot27-10\cdot13^2)+\cancel{8100}$ 900

$\frac{9\cdot 90}{25}+x=90$ $90a^2(-105$

169

$810+25x=2250$ $270-27=243$ $243+169=412$ $10\cdot(54-169)$ $169-54=115$

$243a^4-1050a^2+900$ $810+25x$ 3,6 $\sqrt{440}$

$-1150a^2+906$ $++$ $\frac{6}{\sqrt{10}}$

$\frac{90}{25}+\frac{440}{25}=90$

$13^2\cdot 9+27^2$ 530

$9\cdot(13^2+3\cdot27)$ $36\times9=324$ 169 81 $-9+$

$7{,}5\sim a$ $7{,}5\cdot 5$

$\frac{90}{25}=1\cdot x^2$ $b^2=9$

$b-6a$ $\sqrt{\frac{440}{25}}-6\sqrt{\frac{90}{25}}$

$a<0$

$b<0$ $\frac{90}{25}+$ $\sqrt{440}-6\sqrt{90}$

$\sqrt{58{,}6}$ 7,5 20 9 5 $\sim 9{,}5$

$8\cdot8=64$ 60

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$(b-6a)^4 = a^2b^2$

$(b^2+36a^2-12ab)^2$ $\qquad$ $b^2-12ab+36a^2=ab$

$(27a^2+90-12ab)^2$ $\qquad$ $b^2+36a^2=13ab$

$9a^2+\left(\frac{27a^2+90}{13a}\right)^2=90$

$9(9a^2-4ab+10)^2=a^2b^2$

$81a^4+16a^2b^2+100-$ $\qquad$ $\frac{27\cdot1+90}{13\cdot1}$

$\cancel{9t}\ 3\cdot27+13$ $\qquad$ 130 $\qquad$ $117 \mid 13$, 9

$9t^2(3\cdot27+13)+9a^2(2\cdot10\cdot27-13\cdot10)+8100=0$

$94t^2+410t+900=0$

$410=205\cdot2$

$94\cdot81+410\cdot9+900=0$ $\qquad$ $2\cdot5\cdot41$

$\cancel{9a^2+b^2=90}$

$\cancel{a=3\quad b=3}$ $\qquad$ $94.$ $\qquad$ $a=1\quad b=9$

$a^2=9$

$(27^2+9\cdot13)+(2\cdot90\cdot27-90\cdot13)+8100=0$

$9.$ $\qquad$ $\sqrt{440}-6\sqrt{90}$

$\sim 9{,}5$

57

☑ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(x+y) = \cancel{\sin}\ \sin x\cos y + \sin y\cos x$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha =$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta = \cancel{1}\ -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\operatorname{tg}\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta + 1 = -\frac{2}{17}$

$\frac{1}{17}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cancel{281}\ 1-\sin^2 x$

$(1-\sin^2 2\beta)$

$\sin 2x + \sin 2y$

$\sin\frac{(x+y)}{\cancel{\cos 2}} \cdot \sin(x-y)$

$(\sin x \cos y + \sin y \cos x) \cdot (\sin x \cos y - \sin y \cos x)$

$(\sin x \cos y)^2 - (\sin y \cos x)^2$

$\sin x \cos x$

$\sin(x+y)\cos(x-y)$ $\quad 2(\cos x \sin x + \cos y \sin y)$

$(\sin x \cos y + \sin y \cos x)(\cos x \cos y$

$\cancel{\sin}$

$\cos(x+y) \cdot \cos(\cancel{\cos} x - y)$ $\quad (\cos x + \sin y)(\cos y + \sin x)$

$\cancel{x^2 - y^2}$

$(\cos x \cos y - \sin y \sin x)(\cos$

$\sin 2x + \sin 2y = 2(\sin x \cos x + \sin y \cos y)$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y$

$(\sin x \cos y)^2 - (\sin y \cos x)^2$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b-6a=\sqrt{ab}$

$9a^2+b^2=90$

$(3a+b)^2=90+6ab$

$(b-6a)^2=ab$

$\underbrace{b^2+36a^2}-12ab=ab$

$90+27a^2=13ab$

$36a^2+b^2=13ab$

$\cancel{13ab-27a^2}=$

$\cancel{13ab-27a^2}=90$

$$9a^2+\frac{27^2a^4+2\cdot90\cdot27a^2+8100}{13a^2}=90$$

$9\cdot13a^4+27^2a^4+2\cdot90\cdot27a^2+8100=90\cdot13a^2$

$81+13=94$

$9\cdot(13+3\cdot27)$

$9\cdot$

$9\cdot2\cdot47$

$9\cdot(20\cdot27-10\cdot13)$

$9\cdot10\cdot(54-13)=9\cdot10\cdot41$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=9x^2-18x+9+y^2-12y+36=$

$\mathrm{II}: (3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$b-6a$

$\cancel{(3a)^2+b^2=90}$

$$\boxed{\begin{aligned} b-6a&=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2&=90 \end{aligned}}$$

$\cancel{(x-1)(y-6)=xy-6x}$

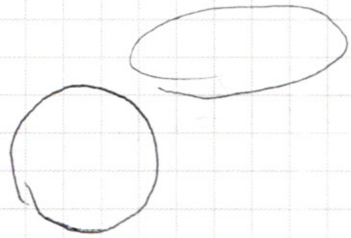
$x\geq 1$

$y-6-(6(x-1)=y-6-6x+6$

$(b-6a)^2=b^2-12ab+36a^2=ab$

$b^2+36a^2=13ab$

$(3a)^2$



$90-9a^2+36a^2=13ab$

$90+27a^2=13ab$

$b=\frac{90+27a^2}{13a}$

$b>6a$

$a>0$ $\quad$ $a<0$

$b>0$ $\quad$ $b<0$

$9a^2+\left(\frac{90+27a^2}{13a}\right)^2=90$

$47a^4+410a^2+900=0$

$47t^2+410t+900=0$

$-6a=\sqrt{b}$

$9a^2=90$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_5 b}$ $\log_5 b^{\log_5 b}$ $\log_5 b \log_5 b$

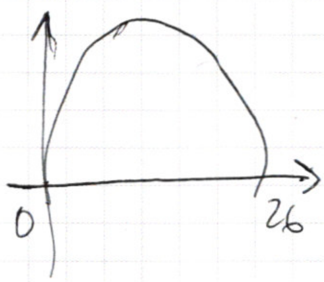
$\log_5 b \log_5 5$

$a^{\log_b c}$ $c^{\log_b a}$

$\log_b a \cdot \log_b c$ $\log_b c \cdot \log_b a$

$b^{\log_5 5}$

$x(26-x)$



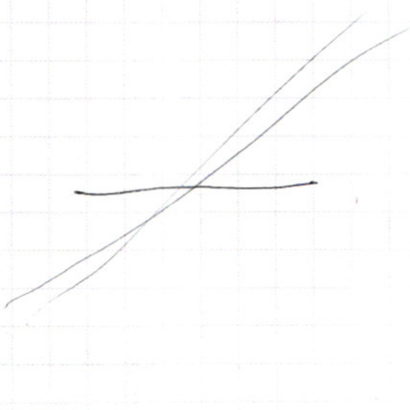
$\left(\frac{5}{12}\right)^p \cdot \left(\left(\frac{13}{12\cdot 5}\right)^p\right.$ $\left(\left(\frac{13}{5}\right)^p - 1\right)$

$13\cdot(26-13) =$

13^2

$5^p + 12^p \geq 13^p$

$\left(\frac{5}{13}\right)^p + \left(\frac{12}{13}\right)^p \geq 1$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$|a|^{\log_5 12} \geq a + 13^{\log_5(-a)}$ $\quad -a>0$

$a<0$

$-a^{\log_5 12} \geq a + 13^{\log_5 -a}$

$b^{\log_5 12} \geq 13^{\log_5 b} - b$ $\quad b>0$

$\vee$
0

$\log_a x^y = y\log_a x$

$\log_5 12 \log_5 b \geq \log_5 b \log_5 13$

$12^p \geq 13^p - 5^p$

$\log_5(13^{\log_5 b} - b)$

$x^2-26x=-1$

$x^2-26x+1=0$

$\cancel{\log_b a^{\log_b c} = \log_b c \log_b a}$

$\cancel{\log_b c^{\log_b a} = \log_b a \log_b c}$

$12^{\log_5 b} \geq 13^{\log_5 b} - b$ $\quad 5^{\log_5 b}$

$\cancel{1 \geq \frac{13}{12}^{\log_5 b} - b}$ $\quad b \geq 13^{\log_5 b} - 12^{\log_5 b}$

$\cancel{25}$ $\quad 5^t = 5^{\log_5 b}$

$12^2 \geq 13^2 - 25$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

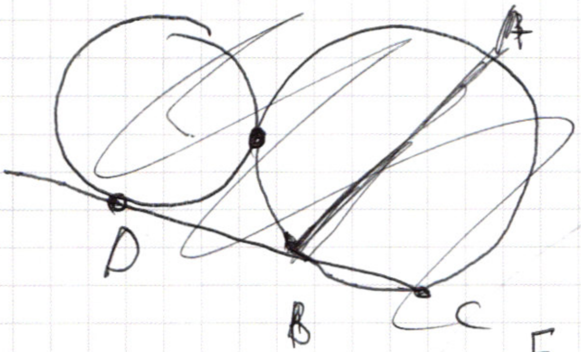
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

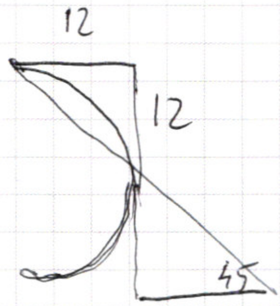
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

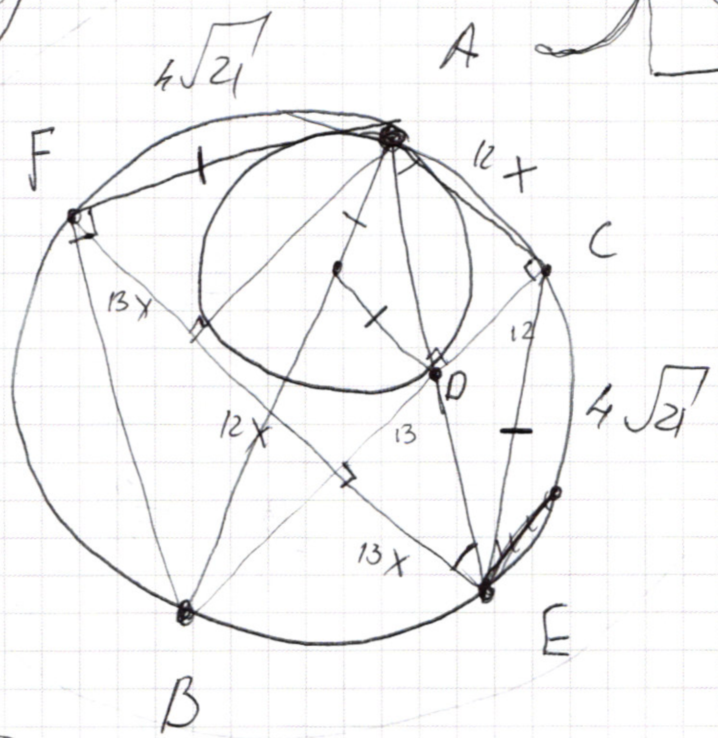
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





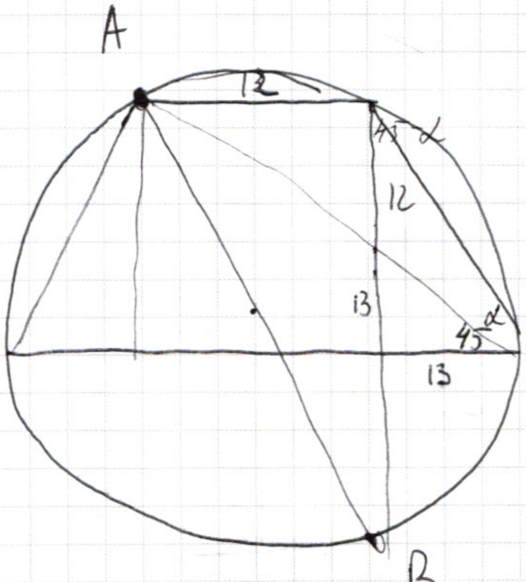


$\sqrt{25^2-13^2}$

$\sqrt{(25-13)(25+13)} =$

$= \sqrt{12 \cdot 28} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7} =$

$= 4\sqrt{21}$



☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

AB - диаметр

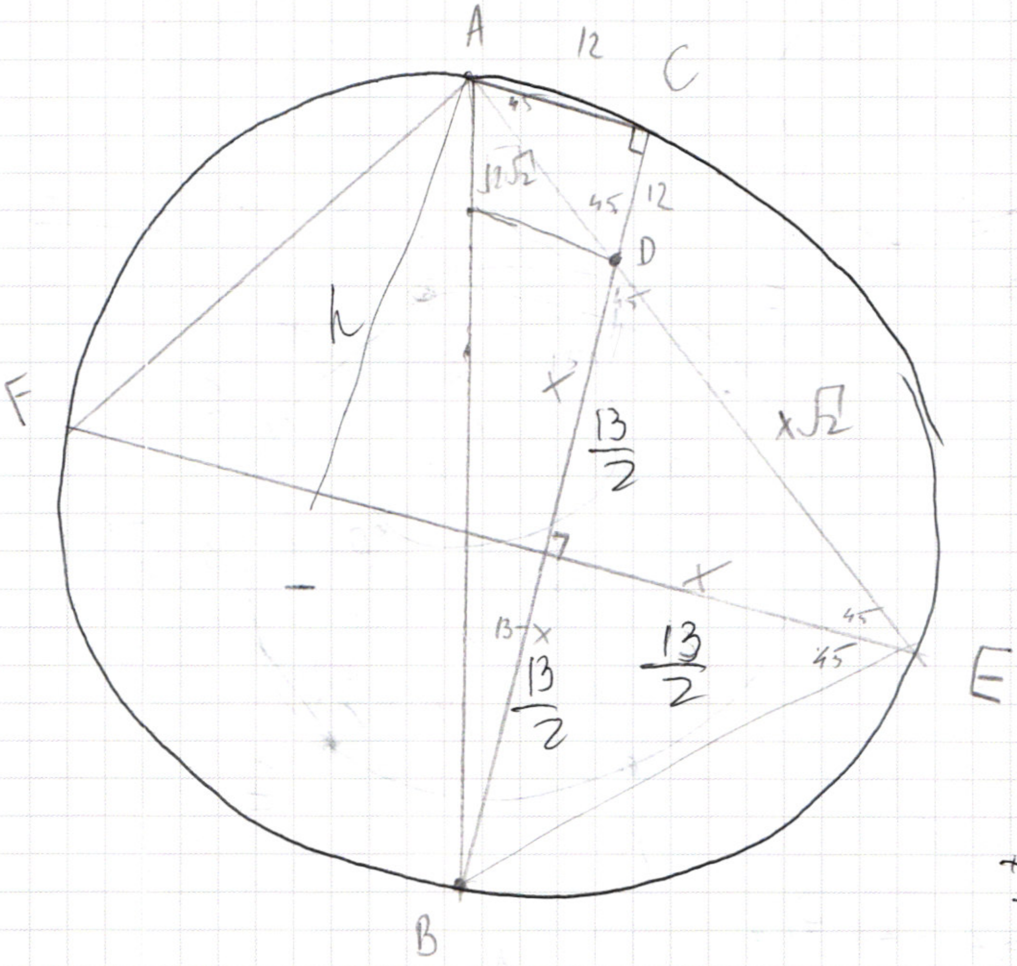
$$\frac{(24+13)\cdot 25}{4} = \frac{37\cdot 25}{4}$$

$(25-13)(25+13) =$

$= 12\cdot 38$

$(4\cdot 3)(2\cdot 19)$

$2\cdot\sqrt{6\cdot 19}$



$$\begin{array}{r} 625 \\ +144 \\ \hline 769 \end{array}$$

$$\left(12+\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2$$

$$\frac{13/2}{\sqrt{3}\cdot 10} = \frac{13}{}$$

$\cancel{12}$ $12\cdot(25) = \sqrt{300}$

$\sqrt{3\cdot 100} = \sqrt{3}\cdot 10$

$$\frac{13}{20\sqrt{3}}$$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

5, 7, 11, 13, 17, 23

$\downarrow$ 1, 1, 2, 3, 4, 5

$f(1) + f(p) = f(p)$

$f(1) = 0$

$p \quad f(p) + f(x) = f\left(\frac{p}{2}\right)$

$f(5) \quad f(23) + f\left(\frac{17}{23}\right) = 4$

5

$4 \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

$\log ab = \log a + \log b$

$1 + f(x) = f(5x) \qquad f(2) + 1 = f(10)$

$f(2) = f(10)$

3

2 − 10

3 − 15

4 − 20

4

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

(3)

$2 \xrightarrow{1} 10$

$3 \xrightarrow{1} 15$

$4 \xrightarrow{1} 20$

$5 \xrightarrow{1} 25$

$2 \xrightarrow{1} 14$

$3 \xrightarrow{1} 21$

$4 \xrightarrow{1} 28$

$2 \xrightarrow{2} 22$

$2 \xrightarrow{3} 26$

~~2 → 4~~

5	7	11	13	17	23
1	1	2	3	4	5

~~10, 14, 21,~~

~~$f(2) \to 0 = 0$~~

~~$f(3) = 0$~~

0: 4, 9, 1, 2, 3

1: 10, 14, 15, 21, 1

$f(3) + f(7) = f(21)$

12345

~~$f(11)$~~

0: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12

1: 5, 7, 10, 14, 15

2: 11

3 13

4 : 17

150 +

$$\begin{array}{r} 64 \\ +17 \\ \hline 81 \end{array}$$

~~$f(x) + f($~~

$f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)$

$f(y) > f(x)$

0: 9ч

1: 8ч

2: 3ч

3: 2ч

4: 2ч

5: 1ч

$$\begin{array}{r} 160 \\ -16 \\ \hline 144 \end{array}$$

25

$16 \cdot 9$

$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

1) Посчитаем $f(x)$ для $4 \leq x \leq 28$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$
$f(5) = 1$
$f(6) = f(2) + f(3) = 0$
$f(7) = 1$
$f(8) = f(4) + f(2) = 0$
$f(9) = f(3) + f(3) = 0$
$f(10) = f(2) + f(5) = 1$
$f(11) = 2$
$f(12) = f(2) + f(6) = 0$
$f(13) = 3$
$f(14) = f(2) + f(7) = 1$
$f(15) = f(3) + f(5) = 1$
$f(16) = f(8) + f(2) = 0$
$f(17) = 4$
$f(18) = f(9) + f(2) = 0$
$f(19) = 4$
$f(20) = f(10) + f(2) = 1$
$f(21) = f(7) + f(3) = 1$
$f(22) = f(11) + f(2) = 2$
$f(23) = 5$
$f(24) = f(2) + f(12) = 0$
$f(25) = f(5) + f(5) = 2$
$f(26) = f(2) + f(13) = 3$
$f(27) = f(9) + f(3) = 0$
$f(28) = f(14) + f(2) = 1$

Получаем:

0: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27

1: 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21, 28

2: 11, 22, 25

3: 13, 26

4: 17, 19

5: 23

Заметим, что:

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(y) > f(x)$

т.к. $f(y) + f(\frac{x}{y}) = f(x)$

г) ~~Для чисел и каждого ч~~ Посчитаем кол-во $\underbrace{\text{чисел}}_{\text{целых}}$ на [4; 23], для которых ~~у~~

f(y) > значения группы.

0: 16 чисел
1: 8 чисел
2: 5 чисел
3: 3 числа
4: 1 число
5: 0 чисел

Группа	Кол-во элементов
0	9
1	8
2	3
3	2
4	2
5	1

Ответом будет являться сумма произведений кол-в на кол-во подходящих ~~зна~~ значений

$= 16\cdot 9 + 8\cdot 8 + 5\cdot 3 + 3\cdot 2 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 =$

$= \underbrace{144 + 64 + 15} + 6 + 2 = 150 + 81 = 231$

Ответ: 231

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

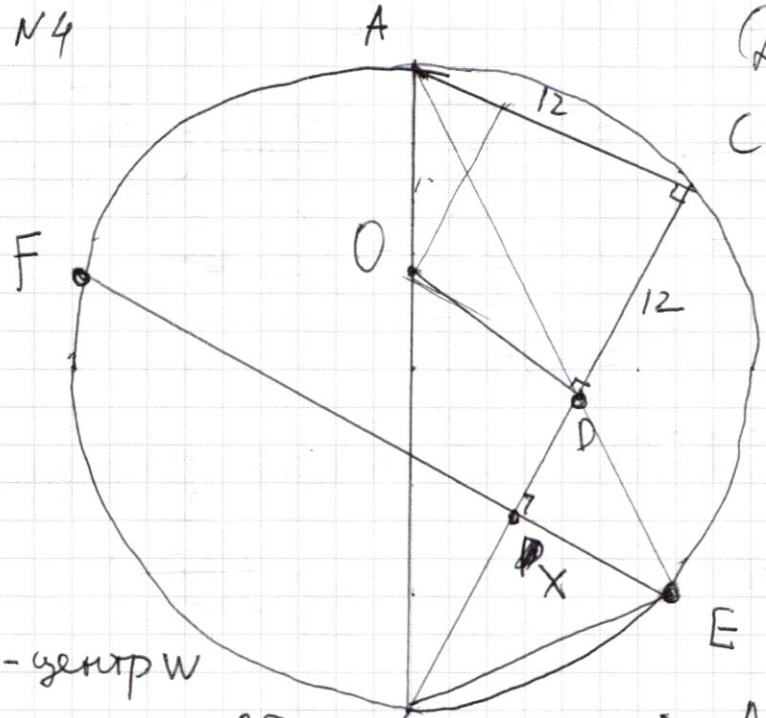
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4

Дано:



O - центр w

X - пересеч EF и CB

B

1) $\angle ACB = 90^\circ$ т.к опир на диаметр

2) $AC = CD$ т.к это касательные к w $\Rightarrow \angle CAD = \angle CDA = \angle EDB = 45^\circ$

3) $AC \perp CB$ и $EF \perp CB$ $\Rightarrow AC \parallel EF$

4) $\angle EBD = 180^\circ - \underset{90^\circ \text{(т.к опир на диаметр)}}{\angle AEB} - \overset{=45^\circ}{\angle EDB} = 45^\circ \Rightarrow \triangle EDB$ - равнобедр, прямоуг с вершиной E. $\Rightarrow$

EX - медиана $= \frac{BD}{2} = \frac{13}{2}$.

5) $AB^2 = AC^2 + (CD+DB)^2 = 12^2 + 25^2 = 769$ по т. Пифагора

$\Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{769}}{2}$

6) $EF = 2EX + AC$ т.к AFEC - равнобокая трапеция (вписана в окр) $= 25$

7) $S_{AFE} = \frac{h \cdot FE}{2} = \frac{CX \cdot EF}{2} = \frac{(12+\frac{13}{2}) \cdot 25}{2} =$

$\overset{\|}{S_{\triangle AEF}}$ (т.к трапеция равнобокая)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$= \frac{37 \cdot 25}{4} = \frac{925}{4}$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 25 \\ \hline 185 \\ 74 \\ \hline 925 \end{array}$$

8) $\triangle BOD \sim \triangle BAC$ т.к $OD \parallel AC$

$\Rightarrow \frac{OD}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{OD}{12} = \frac{13}{25}$

$\Rightarrow OD = \frac{13 \cdot 12}{25} \Rightarrow \frac{OD}{2} = \frac{13 \cdot 6}{25} = \frac{78}{25}$

9) $CE^2 = CX^2 + EX^2 = \left(12 + \frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2 =$

$= 12 \cdot 25 = 300 \Rightarrow CE = \sqrt{300}$

$\angle AFE = \angle CEF$ т.к $AFEC$ - равнобокая трапеция.

$\Rightarrow \angle AFE =$ ~~arccos~~ ~~arcsin~~ $\arccos\left(\frac{13/2}{\sqrt{300}}\right) =$

$= \arccos\left(\frac{13}{20\sqrt{3}}\right)$.

Ответ: радиус $\Omega = \frac{\sqrt{769}}{2}$; радиус $w = \frac{78}{25}$;
площадь $\triangle AEF = \frac{925}{4}$; $\angle AFE = \arccos\left(\frac{13}{20\sqrt{3}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

1) Пусть $a = x-1$; $b = y-6$, тогда

$$\begin{cases} 9x^2+y^2-18x-12y=45 \\ y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2+b^2=90 & \mathrm{I} \\ b-6a=\sqrt{ab} & \mathrm{II} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2-12ab+36a^2=ab \Leftrightarrow b^2+36a^2=13ab$$

$$\Leftrightarrow 90-9a^2+36a^2=13ab \Rightarrow b=\frac{90+27a^2}{13a}$$

Заметим, что если $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$, то нет решений

Пусть $t=a^2$

$$\Rightarrow 9a^2+\frac{27^2a^4+2\cdot 90\cdot 27a^2+8100}{13^2a^2}=90$$

$$a^4(27^2+9\cdot 13^2)+a^2(2\cdot 90\cdot 27-90\cdot 13^2)+8100=0 \Leftrightarrow 250a^4-1050a^2+900=0$$

$$\Leftrightarrow 25t^2-105t+90=0$$

Заметим, что $t=1$ корень, тогда: $\Leftrightarrow (t-1)\cdot$

$\left(t-\frac{90}{25}\right)=0$ по т. Виетта. Обр замена:

$$\left[\begin{array}{l} a^2=1 \\ a^2=\frac{90}{25} \end{array}\right.$$

г) Заметим, что если $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$, то решений нет,

а числа a и b должны быть одного знака.

~~Заме~~ Заметим, что если $(a_0; b_0)$ - решение

то $(-a_0; -b_0)$ - не решение т.к левая

часть II поменяет знак.

2.1) $a^2 = 1 \Rightarrow b^2 = 81 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=9 \\ b=-9 \end{array}\right.$

Подходит только пара $(1; 9)$

2.2) $a^2 = \frac{90}{25} \Rightarrow b^2 =$

Подходит только пара $\left(-\sqrt{\frac{90}{25}}; -\sqrt{\frac{440}{25}}\right)$

Ответ: $\{2; 15\}$, $\left\{-\sqrt{\frac{90}{25}}+1; -\sqrt{\frac{440}{25}}+6\right\}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3

1) ~~Зам~~ По условию $26x-x^2>0$ ~~и~~, пусть $26x-x^2=b$, тогда усл $\Leftrightarrow$ $\cancel{b^{\log_5 12} \geq 13^{\log_5 b} - b}$

$$26x-x^{2\,\log_5 12} \geq x^2-26x+13^{\log_5 26x-x^2}$$

(т.к $x^2-26<0$, а модуль >0) $\Leftrightarrow$

$b^{\log_5 12} \geq 13^{\log_5 b} - b \Leftrightarrow 12^{\log_5 b} \geq 13^{\log_5 b} - 5^{\log_5 b}$ (по п.2)

2) ~~$\log_a b$~~ $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ т.к если взять $\log_b$ от обоих частей мы получим равенство.

3) Пусть $p=\log_5 b$, тогда

$12^p \geq 13^p - 5^p \Leftrightarrow$ $\cancel{1 \geq \left(\frac{13}{12}\right)^p - \left(\frac{5}{12}\right)^p}$ ~~(т.к $12^p>0$)~~

~~$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{5}{12}$~~ $12^p+5^p \geq 13^p \Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{12}{13}\right)^p + \left(\frac{5}{13}\right)^p}_{} \geq 1$

(т.к $13^p>0$). Заметим, что равенство $*$

в $*$ достигается при $p=2$, при этом левая часть монотонно $\downarrow$ $\Rightarrow$ решением нер-ва будет $p\in(-\infty;2]$.

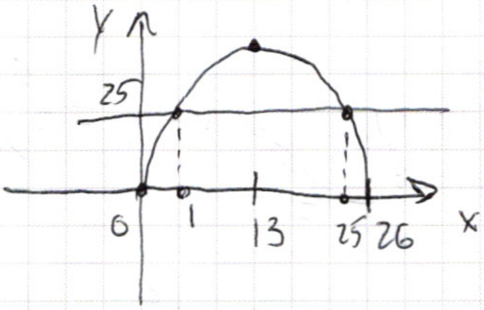
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

4) Обр замена: $p = \log_5 b \Rightarrow b \in (0; 25]$

5) Обр замена: $b = 26x - x^2$

График $f(x) = 26x - x^2$



Решим $f(x) = 25$

$\Updownarrow$

$26x - x^2 - 25 = 0$

$\Updownarrow$

$(x-1)(x-25) = 0$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 25 \end{array}\right.$

Значит:

$\left[\begin{array}{l} x \in (0; 1] \\ x \in [25; 26) \end{array}\right.$

Ответ: $(0; 1] \cup [25; 26)$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)