МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$(9x^2-18x+9)-9+(y^2-12y+36)-36=45.$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90.$

$\boxed{a=x-1;\ b=y-6}$ $\qquad x=a+1;\ y=b+6$

$9a^2+b^2=90.$

$6a=6x-6;\qquad b-6a=y-6-6x+6=y-6x$

$$\begin{cases}(b-6a)^2=ab.\\ 9a^2+b^2=90.\end{cases}$$

$$\begin{cases}b^2-12ab+36a^2=ab\\ 9a^2+b^2=90.\end{cases}$$

$b^2-13ab+36a^2=0.;\quad \left(\frac{b}{a}\right)^2-13\frac{b}{a}+36=0.$

$t=\frac{b}{a};\ D=169-4\cdot 36=25.$

$t=\frac{13\pm5}{2}=\left[\begin{array}{l}9\\4\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\frac{b}{a}=9\\ \frac{b}{a}=4\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}b=9a\\ b=4a.\end{array}\right.$

1) $b=9a$

$\cancel{(9a-6a)^2=9a^2}$;

$9a^2+81a^2=90;\quad 90a^2=90;\ a^2=1;\ a=\pm1.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\ b=9\end{cases}\Rightarrow x=2;\ y=15\\ \begin{cases}a=-1\\ b=-9\end{cases}\Rightarrow \cancel{x=0;\ y=-3}\end{array}\right.$$ — не удовл. условию $y-6x\geq1$.

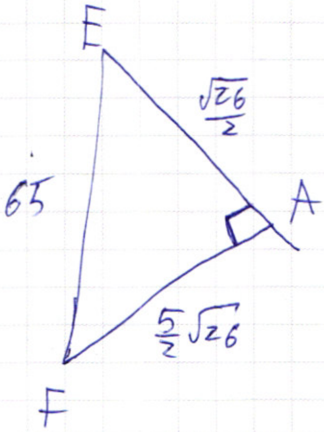
2) $b=4a$

$9a^2+16a^2=90;\quad 25a^2=90;\ 5a^2=18;\ a=$

$y-6x\geq0;\ b-6a\geq0.\ 4a$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



По т. Пифагора:

$EA^2 = 65^2 - \frac{25 \cdot 26}{4} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 13 - 25 \cdot 13 \cdot 2}{4} =$

$= \frac{2 \cdot 13}{4}(26 - 25) = \frac{26}{4} \Rightarrow EA = \frac{\sqrt{26}}{2}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{26} \cdot \frac{\sqrt{26}}{2} = \frac{5 \cdot 26}{8} = \frac{5 \cdot 13}{4} = \frac{65}{4}$

$\triangle BOO_2$: $tg 2\alpha = \frac{13}{r} \Rightarrow r = 13 ctg 2\alpha =$

$= 13\, ctg 2\alpha = 13 \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 13 \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = 13 \cdot$

$= \cancel{13} \cdot \frac{12}{\cancel{13}} \cdot \frac{13}{5} = \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{24 \cdot 13}{10} = 31,2$

Ответ: $\angle AFE = \arccos \frac{1}{\sqrt{26}}$; $R = 32,5$; $r = 31,2$; $S_{AFE} = \frac{65}{4}$

№ 2.

$9x^2 + y^2 - 18x - 12y - 45 = 0$

$9x^2 - 18x + (y^2 - 12y - 45) = 0$

$D = 9^2 \cdot 4 - 9 \cdot 4(y^2 - 12y - 45) = -9 \cdot 4(-9 + y^2 - 12y - 45) =$

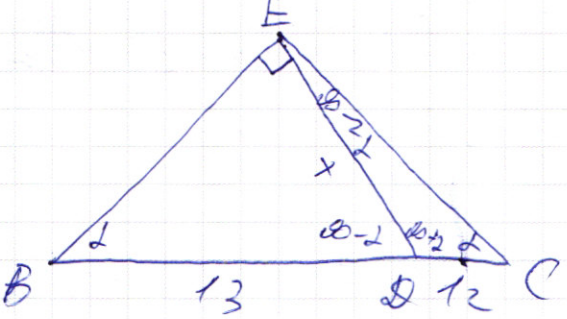
$= -9 \cdot 4(y^2 - 12y - 36 - 18) = -9 \cdot 4((y-6)^2 - 18) =$

$y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \Longleftrightarrow \begin{cases} y - 6x \geq 0 \\ y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6 \end{cases}$

$(y - 6x)^2 = x(y-6) - 1(y-6) = (x-1)(y-6)$

$= \cup EA$; тогда $\cup ECAF = \cup EA + \cup AF = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow EF$ — диаметр $\Omega \Rightarrow O_1 \in EF \Rightarrow \angle EAF = 90°$

Считая в получившейся картинке углы, получаем следующий треугольник:



По т. Синусов:

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{13}{\sin 90°} = 13; \; x = 13\sin\alpha.$$

$$\frac{12}{\sin(90°-2\alpha)} = \frac{x}{\sin\alpha} = 13$$

$12 = 13\cdot\cos 2\alpha$; $\cos 2\alpha = \frac{12}{13} = 1 - 2\sin^2\alpha$; $2\sin^2\alpha = \frac{1}{13}$

$\angle AFE = 90° - \alpha$ $\quad \cos^2 2\alpha = \frac{144}{169}$ $\quad \sin^2\alpha = \frac{1}{26}$; $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}} =$

$\sin^2 2\alpha = \frac{25}{169}$; $\sin 2\alpha = \frac{5}{13}$ (2α — остр. угол) $\quad = \cos(90°-\alpha) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 90° - \alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{26}} = \angle AFE$$

$$x = \frac{13}{\sqrt{26}} = \frac{13\sqrt{26}}{26} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

По т. Пифагора: $BE^2 = 13^2 - x^2 = \frac{13^2\cdot 4}{4} - \frac{2\cdot 13}{4} = \frac{13\cdot 2}{4}(26-1) =$
$= 26\cdot\frac{25}{4} \Rightarrow BE = \frac{5}{2}\sqrt{26}$

По т. Синусов для Ω: (R — радиус Ω, r — радиус ω)

$\frac{BE}{\sin\alpha} = 2R$; $R = \frac{BE}{2\sin\alpha} = \frac{5}{2}\sqrt{26}\cdot\frac{\sqrt{26}}{2} = \frac{5\cdot 26}{4} = \frac{5\cdot 13}{2} =$
$= \frac{65}{2} = 32{,}5$

AF и BE стягивают равные дуги одной окр. $\Rightarrow$
$\Rightarrow AF = BE = \frac{5}{2}\sqrt{26}$

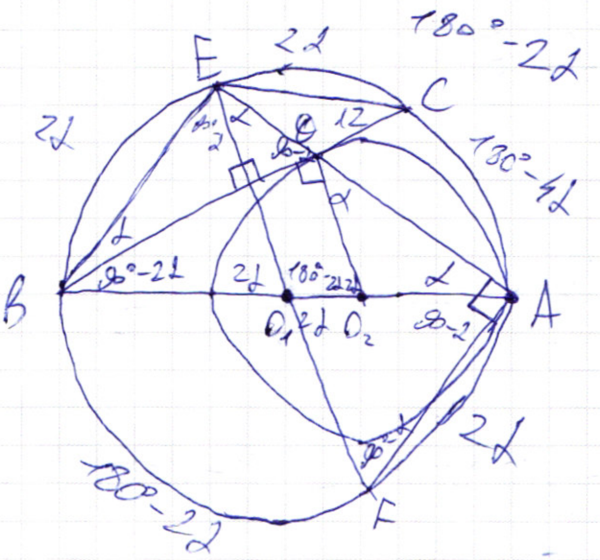
Если $f(x) = 1$, то $\left[\begin{array}{l} f(y) = 2 \\ \vdots \\ f(y) = 5 \end{array}\right.$ $\Leftarrow$ кол-во способов выбрать x: 8, а y: $3+2+2+1$ тогда кол-во пар (x,y) по правилу произв. $8(3+2+2+1)$

Аналогично рассматривая случаи, находим итоговое кол-во пар $(x;y)$

$9(8+3+2+2+1) + 8(3+2+2+1) + 3(2+2+1) +$
$+ 2(2+1) + 2\cdot 1 = 9\cdot 16 + 8\cdot 8 + 3\cdot 5 + 2\cdot 3 + 2 =$
$= 144 + 64 + 15 + 8 = 231$

Ответ: 231

№ 4.



O_1 – центр Ω, O_2 – центр ω. Очевидно, O_2 лежит на AB (если предположить обратное и провести касат. к Ω в т. A, то она будет и касат. к окр. ω, тогда $O_1A \perp$ касат., $O_2A \perp$ касат. $\Rightarrow O_1A \parallel O_2A$, но они проход. через т. A, значит это одна прямая)

$O_2O \perp BC$ (BC – касат.)
$O_1E \perp BC$ (по усл.) $\Rightarrow O_2O \parallel O_1E$
Пусть $\smile AF = 2\alpha \Rightarrow \angle FEA = \alpha = \angle AOO_2$ (углы при параллельных)
$O_2O = O_2A$ (как радиусы) $\Rightarrow \angle OAO_2 = \alpha \Rightarrow \smile BE = 2\alpha$
Поскольку AB – диаметр, $\smile BF = 180° - \smile AF = 180° - 2\alpha =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{17} = \sin^2 2\alpha\cos^2 2\beta + 2\sin 2\alpha\cos 2\beta\sin 2\beta\cos 2\alpha +$
$+ \sin^2 2\beta\cos^2 2\alpha \; (1)$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha +$
$+\sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$
$= \sin 2\alpha\cos^2 2\beta - \sin 2\alpha\sin^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$

$-\frac{2}{17}\sin 2\alpha = \sin^2 2\alpha\cos^2 2\beta - \sin^2 2\alpha\sin^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha\sin 2\alpha +$
$+\sin^2 2\alpha.$

$(1) \Rightarrow \sin^2 2\alpha\cos^2 2\beta + 2\sin 2\alpha\cos 2\beta\sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{1}{17} - \sin^2 2\beta\cos^2 2\alpha$

$-\frac{2}{17}\sin 2\alpha = \frac{1}{17} - \sin^2 2\beta\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha\sin^2 2\beta + \sin^2 2\alpha$

$-\frac{2}{17}\sin 2\alpha = \frac{1}{17} - \sin^2 2\beta$

№5.

$f(ab) = f(a)+f(b)$; $a=1, b=1$: $f(1) = f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$a=a, b=\frac{1}{a}$: $f(1) = f(a)+f(\frac{1}{a}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x)+f(\frac{1}{y}) = f(x)-f(y)$

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Rightarrow f(x)-f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

$f(1)=0$

$f(2)=[\frac{2}{4}]=0.$

$f(3)=[\frac{3}{4}]=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0.$

$f(5)=[\frac{5}{4}]=1.$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=1$ (далее вычисляем аналогично)

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(23)=5$

$f(24)=0$

$f(25)=2$

$f(26)=3$

$f(27)=0$

$f(28)=1.$

Выбрав некоторый $x \in [4;28]$, нам можно выбрать y такой, что $f(x) < f(y)$ и $y \in [4;28]$. При условии, что x и y леж. в допустимом отрезке, значение имеют лишь значения $f(x)$ и $f(y)$. Пользуясь таблицей выше, посчитаем, при скольких разл. значениях из отрезка $[4;28]$ f принимает то или иное значение

$f(x)$	0	1	2	3	4	5
кол-во x / y $[4;28]$	9	8	3	2	2	1

(2)

Далее возможны случаи:

Если $f(x)=0$, то $\left[\begin{array}{l} f(y)=1 \\ f(y)=2 \\ \vdots \\ f(y)=5 \end{array}\right.$ Кол-во способов выбрать x (у табл. (2)) равно 9, а способов выбр. y: $8+3+2+2+1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq \frac{(3x-2)(ax+b)}{3x-2}$

$36 \cdot 12$

$18 \cdot 18$, 144, 18, 324

$f(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$ $\quad f'(x) = \frac{(8-6x)'(3x-2) - (8-6x)(3x-2)'}{(3x-2)^2} =$

$= \frac{-6(3x-2) - 3(8-6x)}{(3x-2)^2} = \frac{\cancel{-6(3x-2)} + \cancel{-18x} + 12 - 24 + 18x}{(3x-2)^2} =$

$= -\frac{12}{(3x-2)^2} < 0.$

$9x^2+y^2-18x-12y-45=0$

$9x^2-18x+(y^2-12y-45)=0$

$\cancel{D = 324 - 36y^2 + 36 \cdot 12y}$

$D = 4 \cdot 9^2 - 4 \cdot 9(y^2-12y-45) =$

$= \cancel{4 \cdot 9}(\cancel{9 - y^2 + 12y}$

$= -4 \cdot 9(-9+y^2-12y-45) =$

$= -4 \cdot 9(y^2-12y-54$

$\frac{8-6x-3ax^2-3bx+2ax+2b}{3x-2} \geq 0$

$\frac{3ax^2+3bx-2ax-2b-8+6x}{3x-2} \leq 0.$

$\frac{3ax^2+(3b-2a+6)x-(2b+8)}{3x-2} \leq 0$

$D = 9b^2+4a^2+36-12ab+36b-$

$\begin{cases} y^2-13xy+36x^2+6x+y-6=0. \\ 9x^2+y^2-18x-12y-45=0. \end{cases}$

$36x^2+4y^2-72x-48y-180=0.$

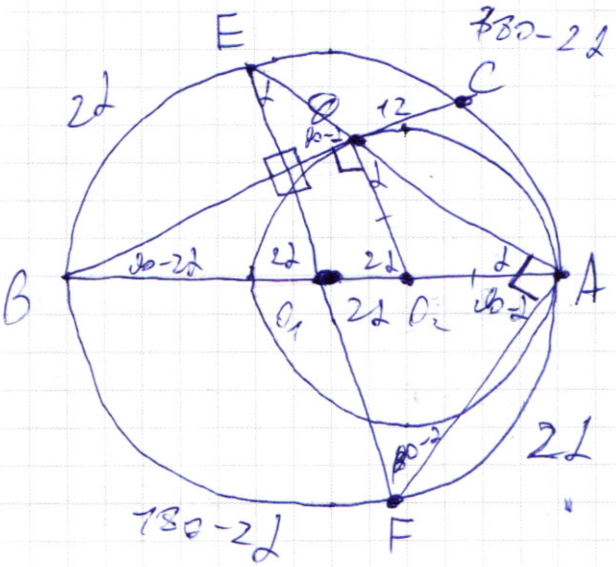
$3y^2+13xy-78x-49y-174=0.$

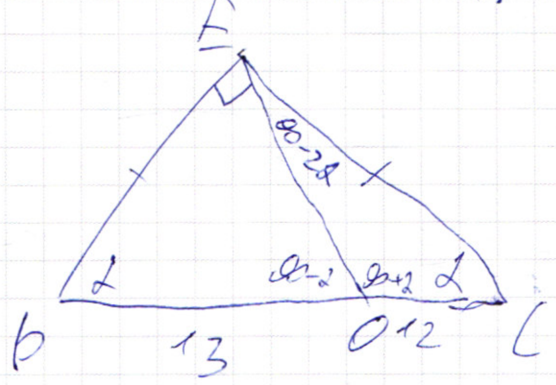
$\cancel{9x^2}+13xy-\cancel{24}x-\cancel{27}x^2-13y-39=0.$

$\begin{array}{r} 24 \\ \times 13 \\ \hline 172 \\ 24 \\ \hline 312 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1404 \\ +624 \\ \hline 2028 \end{array}$

1014





$a^{\log_b c} = \cancel{b}^{\log_b a \cdot \log_b c}$

$= c^{\log_c a \cdot \log_b c} = c^{\log_b a}$

$t^{\log_5 12} + t \geqslant t^{\log_5 13}$

$a = \log_5 12;\ b = \log_5 13 \qquad f(t) = t^a - t^b + t$

$1 < a < b < 2. \qquad f'(t) = at^{a-1} - bt^{b-1} + 1$

$t^a + t \geqslant t^b$

$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1404 \\ \times 3 \\ \hline 4212 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 26 \\ \times 24 \\ \hline 104 \\ 52 \\ \hline 624 \end{array}$

~~$y - 6x =$~~

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

$\begin{cases} y^2 - 13xy + 36x^2 + 6x + y - 6 = 0 \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y - 45 = 0 \end{cases}$

$9x^2 + 13xy - 36x^2 - 18x - 6x - 12y - y - 45 + 6 = 0$

$13xy - 27x^2 - 24x - 13y - 39 = 0$

$13(xy - y - 3) - 3x($

$\begin{array}{r} 52 \\ \times 27 \\ \hline 364 \\ 104 \\ \hline 1404 \end{array}$

$27x^2 - 13xy + 24x + 13y + 39 = 0$

$27x^2 - (13y - 24)x + 13(y + 3) = 0$

$D = 169y^2 - 624y + 576 - 1404y - 4212$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

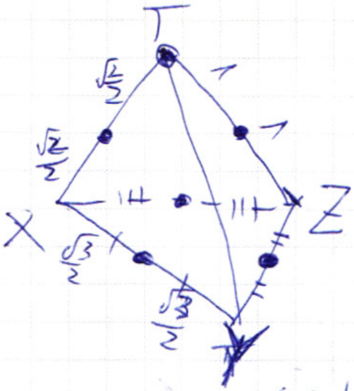
$64-4\cdot 13\cdot 9$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6.$

$$\begin{cases} y^2-13xy+36x^2+6x+y-6=0 \\ y^2+9x^2-18x-12y-45=0 \end{cases}$$

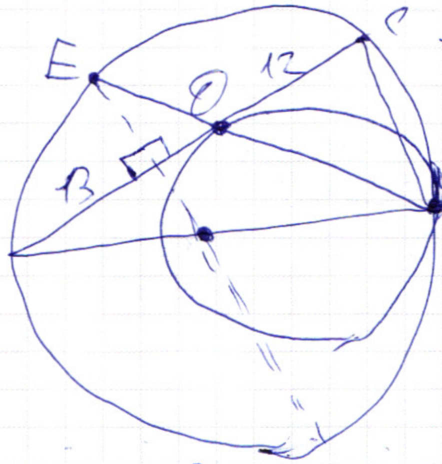
$13xy-27x^2-24x-13y-39=0.$

$13y(x-1)-3(9x^2+8x+13)=0.$



$(8^3)'=$

$(x^p)'=px^{p-1}$



$=3$

$26x-x^2=t;\ t>0$

$t^{\log_5 12}+t\geq 13^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 12}+t\geq t^{\log_5 13}$

$f(t)=t^{\log_5 12}-t^{\log_5 13}+t\geq 0.$

$f'(t)=(\log_5 12)t^{\log_5 2,4}-(\log_5 13)t^{\log_5 2,6}+1\cancel{\geq 0}.$ $\cancel{f(1)=f(1)+f(1)}$

$f(1)=0.$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad \cancel{f(a^2)=f(a}$ $\quad f(a)=f(a)+f(1)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0.;$ $\cancel{f(x)+f(}$ $\quad f(1)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=0$

$f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$

$f(x)<f(y)$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 9 \\ \hline 144 \\ +\ 64 \\ \hline 208 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 208 \\ +\ 15 \\ \hline 223 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 223 \\ +\ 8 \\ \hline 231 \end{array}$$

$f(1)=0$
$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(4)=0$
$f(5)=1$
$f(6)=0$
$f(7)=$
$f(8)=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - ?$ $\quad$ ~~$\sin(2(\alpha+\beta)) =$~~

$$tg2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha =$$

~~$x = \cos 2\alpha$~~ ~~$a = \cos$~~

~~$y = \sin 2\alpha$~~

$$= \sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta\cos 2\beta + \sin 2\alpha =$$

$$\sin^2 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha \sin 2\beta\cos 2\beta + \cos^2 2\alpha \sin^2 2\beta = \frac{1}{17}$$

$$\sin^2 2\alpha \cos^2 2\beta - \sin^2 2\alpha \sin^2 2\beta + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta + \sin^2 2\alpha = \frac{2}{17}\sin 2\alpha$$

$$\cancel{\frac{1}{17}} - \cos^2 2\alpha \sin^2 2\beta - \sin^2 2\alpha \sin^2 2\beta + \sin^2 2\alpha = \frac{1}{17}\sin 2\alpha$$

$$-\sin^2 2\beta(1) + \sin^2 2\alpha = \frac{1}{17}\sin 2\alpha.$$

$$\sin^2 2\alpha - \sin^2 2\beta = \frac{1}{17}\sin 2\alpha$$

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b.$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)