МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

√ 1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

√ 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

√ 3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

√ 4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$. 1, 2

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$$

$$5^{\log_{12}y}+y \geq y^{\log_{12}13}$$

$$y^{\log_{12}5}+y \geq y^{\log_{12}13} \quad |:y$$

$$y^{\log_{12}5-1}+1 \geq y^{\log_{12}13-1}$$

$\log_{12}13=\log_{5}12\cdot\log_{12}13$

$$y^{\log_{12}5}+y \geq y^{\log_{12}13}$$

$$y^{\log_{12}5}+y^{\log_{12}12} \geq y^{\log_{5}12\cdot\log_{12}13}$$

$$y^{\log_{12}13\cdot\log_{13}5}$$

$D=$

$18\cdot18=144+18=324$

$144\cdot4=576$

$576+324=900$

-18

$30-18=12$

$\frac{-48}{2}=-24$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

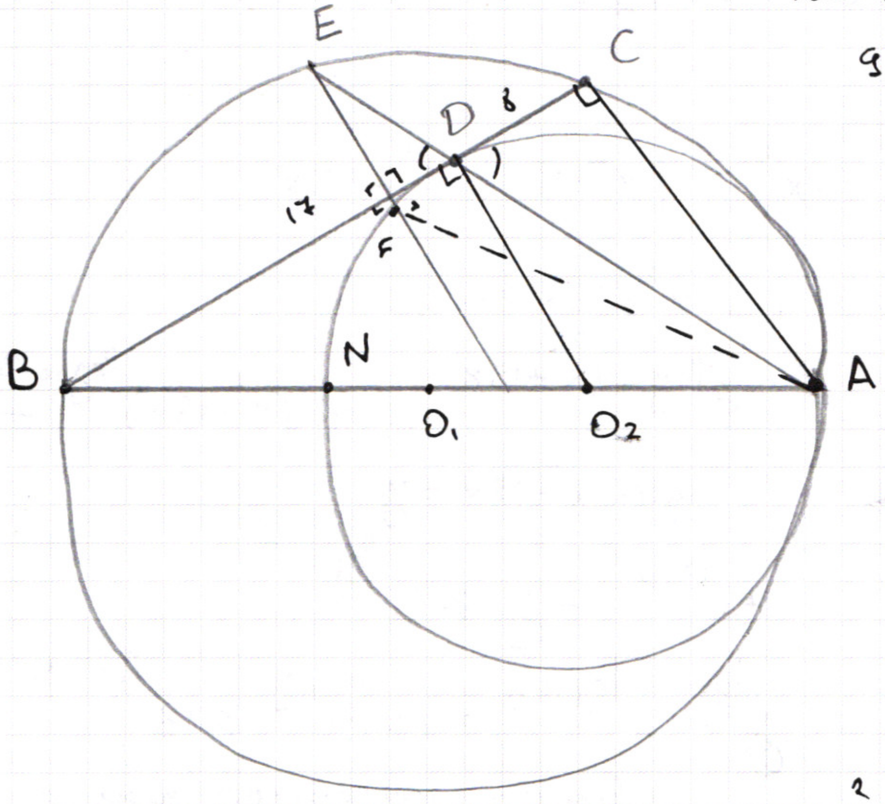
ШИФР

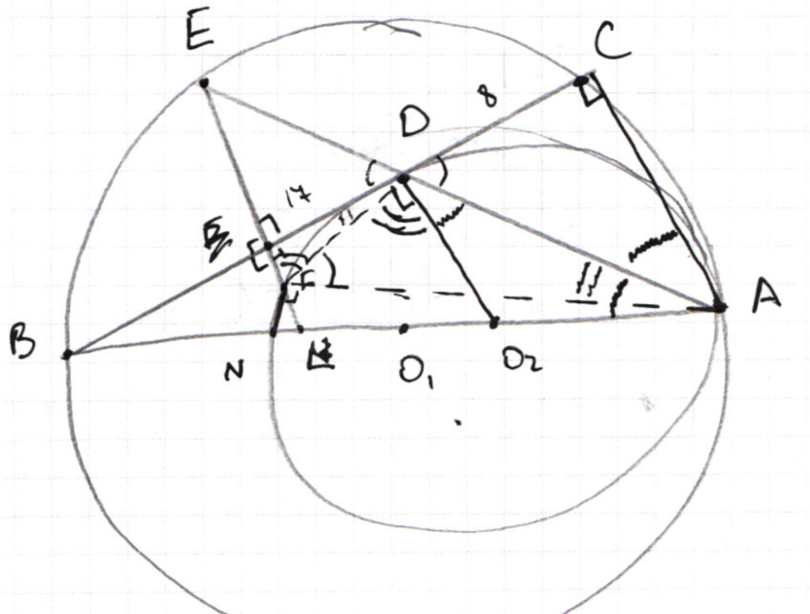
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$180-(90-\alpha+\beta+\alpha)$

$90-\beta$





$34 \times 5 = 170$

$34 \times 5 = 170$

$25 \times 6 = 150$

$170 + 150 = 320$

$+170$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

4) $x_1 = 2+\sqrt{\frac{5}{2}};\ y_1 = 1+\sqrt{\frac{5}{2}}$

$(1):\ 2+\sqrt{\frac{5}{2}} - 2 - 2\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\dots}$

$-\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\dots}$ не подходит

Ответ: $(6;2);\ \left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

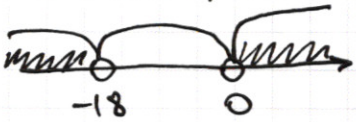
3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

ОДЗ:

$x^2+18x>0$

$x(x+18)>0$



т.к $x^2+18x>0$, то:

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$$

пусть $x^2+18x = y$

$$5^{\log_{12}y} + y \geq y^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}y} + 12^{\log_{12}y} \geq 13^{\log_{12}y}$$

равенство достигается при $\log_{12}y = 2$

$5^2+12^2=13^2$

$\log_{12}(x^2+18x)=2$

$x^2+18x=144$

$x^2+18x-144=0$

$x = \frac{-18\pm30}{2} = \left[\begin{matrix}6\\-24\end{matrix}\right.$

при $\log_{12}y \leq 2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-2)^2+9\left(\frac{x+2}{4}-1\right)^2=25$

$(x-2)^2+9\left(\frac{x-2}{4}\right)^2=25$

$(x-2)^2+\frac{9}{16}(x-2)^2=25$

$\frac{25}{16}(x-2)^2=25$

$(x-2)^2=16$

$\left[\begin{array}{l}x-2=4\\x-2=-4\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}x=6\\x=-2\end{array}\right.$

Проверка

$xy-x-2y+2\geq 0$

$x(y-1)-2(y-1)\geq 0$

$(x-2)(y-1)\geq 0$

1 $(-2;0)$ ✗

$-2\geq$

2. $(6;4)$ ✗

3. $\left(2+\frac{2}{\sqrt{10}};1+\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ ✗

$2+\frac{2}{\sqrt{10}}-2-\frac{4}{\sqrt{10}}$

4. $\left(2-\frac{2}{\sqrt{10}};1-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$

$2-\frac{2}{\sqrt{10}}-2+\frac{4}{\sqrt{10}}$

$\cancel{5^{\log_{12}}}$

$y_3=4$

$y_4=0$

$5^{\log_{12}y}+y\geq 13^{\log_{12}y}$

$5^{\log_{12}y}+12^{\log_{12}y}\geq 13^{\log_{12}y}$

$5^{\alpha}+12^{\alpha}\geq 13^{\alpha}$

$\cancel{5^2+12^2=13^2}$

$x\geq 2y:$

$(11):(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$16+9=25$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq(x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$-18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18}$

$\cancel{5^y+y}$

$y\geq 13^{\log_{12}y}-5^{\log_{12}y}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~180 - β + 90 - β~~

$$\left(2-\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)\left(1-\sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)=2-2\sqrt{\tfrac{5}{2}}-\sqrt{\tfrac{5}{2}}+\tfrac{5}{2}=$$

$$=\cancel{2}-3\sqrt{\tfrac{5}{2}}+\tfrac{5}{2}$$

$$\cancel{-2+\sqrt{\tfrac{5}{2}}-2+2\sqrt{\tfrac{5}{2}}+2}$$

3. $$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

ОДЗ:

$x^2+18x>0$

$x(x+18)>0$

$+ \quad -18 \quad - \quad 0 \quad +$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$$

т.к $x^2+18x>0$ то $|x^2+18x|=x^2+18x$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)}-18x$$

$\cancel{5^{a}+x^2 \geq 13^{a}}$

$x^2+18x=y$

$$5^{\log_{12}y}+y \geq 13^{\log_{12}y}$$

$$y \geq 13^{\log_{12}y}-5^{\log_{12}y}$$

$f(y)=13^{\log_{12}y}-5^{\log_{12}y}$

$(5^x)'=x\ln 5$

$e^{\ln 5^x}$ log

$f'(y)=$

$e^{\ln 13^{\log_{12}y}}$ $\quad \log_{12}y\cdot\ln 13\cdot(\log_{12}y)'$

$5^2=25$ $\quad 13^{2\log_{12}y}=5^{2\log_{12}y}$

$12^2=144$

$\cancel{13}$

$\cancel{y-y^{\log_{12}12+1}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}-(x^2+18x)^{\log_{12}13}+x^2+18x \geq 0$

$\underbrace{(x^2+18x)}_{y}{}^{\log_{12}5}-(x^2+18x)^{\log_{12}13}+x^2+18x \geq 0$

$y^{\log_{12}5}-y^{\log_{12}13}+y \geq 0$

$y^{\log_{12}12}$

$y^{\log_{12}5}-y^{\log_{12}13}+y^{\log_{12}12} \geq 0$

$y^{\log_{12}5}+y^{\log_{12}12} \geqslant y^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}y}+12^{\log_{12}y} \geqslant 13^{\log_{12}y}$

$5^\alpha+12^\alpha \geqslant 13^\alpha \qquad 5^2+12^2=13^2$

$\log_{12}(5^{\log_{12}y}+12^{\log_{12}y}) \geqslant \log_{12}y \cdot \log_{12}13$

$\cancel{5t}\quad y=y^{\log_{12}13}-y^{\log_{12}5}$

$5^\alpha+12^\alpha \vee 13^\alpha$

$f(\alpha)=\cancel{13^\alpha-12^\alpha-5^\alpha}$

$\begin{array}{r|l} 60 & 13 \\ -52 & 4 \\ \hline 8 & \end{array}$

$f(\alpha)=5^\alpha+12^\alpha-13^\alpha$

$f'(\alpha)=\alpha\cdot\ln5+\alpha\cdot\ln12-\alpha\cdot\ln13$

$\cancel{\alpha \ln 1}$

$f'(\alpha)=\alpha(\ln5+\ln12-\ln13)$

$f'(\alpha)=\alpha\cdot\ln\frac{60}{13}$

$- \quad 0 \quad +$

2

$5^a+12^a-13^a$

$f'(a)=5^a\cdot\ln5+\ln12\cdot12^a-13^a\cdot\ln13$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

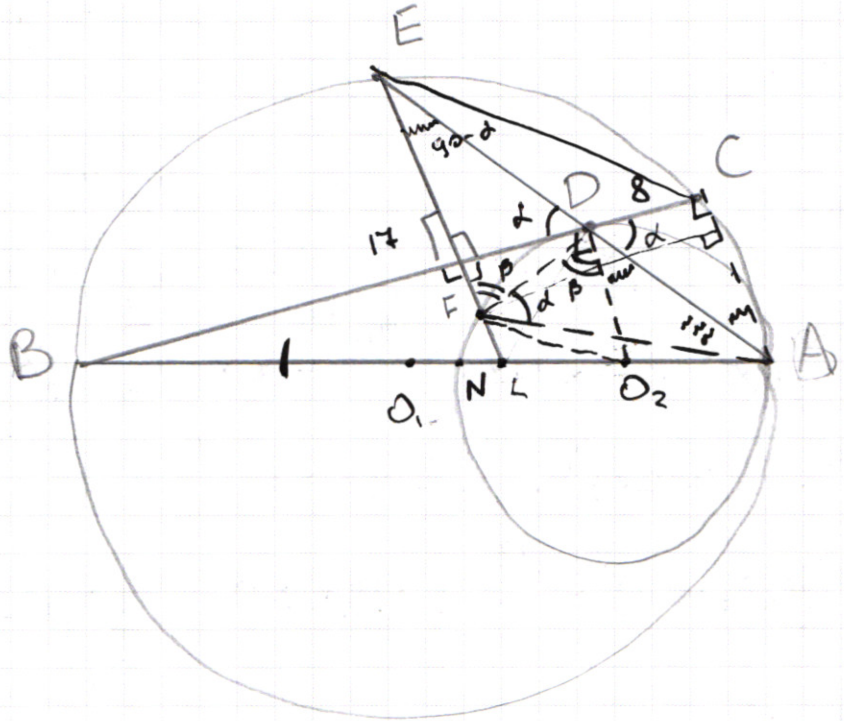
$R_1; R_2 - ?$

$\angle AFE - ?$

$S_{AFE} - ?$

$CD = 8$

$BD = 17$



$$\times \begin{array}{r}17\\8\\\hline 136\end{array}$$

$$\frac{17\cdot\cancel{5}}{\cancel{6}_3}\cdot\frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{255}}$$

$$\frac{17}{25} = \frac{2R - r}{2R}$$

$$O_1N = R - 2r = \cancel{\tfrac{16}{}}R - \frac{16}{25}R$$

$$34R = 50R - 25r$$

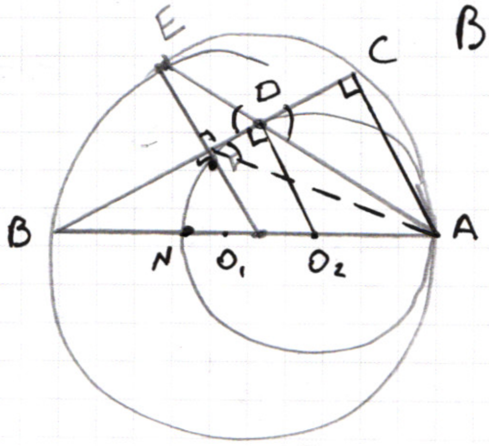
$$BN = 2R - 2r$$

$$16R = 25r$$

$$BN = 2R - \frac{32}{25}R = \frac{50-32}{25}R =$$

$$r = \frac{16}{25}R$$

$$= \frac{18}{25}R$$



$$AB = 2R$$

$$17^2 = \frac{18}{25}\cdot 2R^2$$

$$17^2 = \frac{36}{25}\cdot R^2$$

$$\frac{17}{25} = \frac{R + R - r}{2R}$$

$$\begin{array}{r}170\\+150\\\hline 220\end{array}$$

$$R = \frac{17\cdot 5}{6} = \frac{85}{6}$$

$$AC^2 = AB^2 - BC^2$$

$$\times\begin{array}{r}25\\6\\\hline 150\end{array}$$

$$r = \frac{16}{\cancel{25}_5}\cdot\frac{\cancel{85}17}{6} = \frac{\cancel{16}^8\cdot 17}{\cancel{30}_{15}} = \frac{8\cdot 17}{15}$$

$$AC^2 = 4R^2 - 25^2$$

$$\times\begin{array}{r}34\\5\\\hline 170\end{array}$$

$2\cdot 110\cdot 2\cdot 10$

20 150 $220\cdot 20$

$$AC^2 = 4\cdot\frac{17^2\cdot 5^2}{6^2} - 25^2$$

$$AC^2 = \frac{2^2\cdot 17^2\cdot 5^2 - 25^2\cdot 6^2}{6^2} = \frac{(2\cdot 17\cdot 5 - 25\cdot 6)(2\cdot 17\cdot 5 + 25\cdot 6)}{6^2}$$

$$AC^2 =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.

$BD=17$

$CD=8$

$R_3-?$

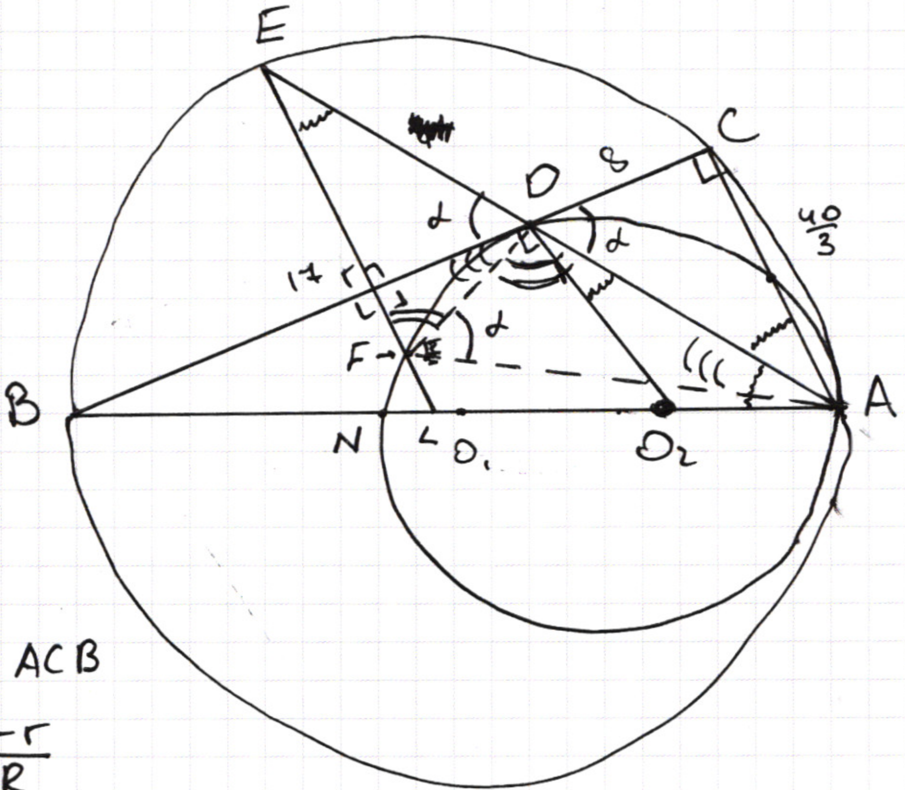
$r-?$

$\angle AFE-?$

$S_{AFE}-?$

$CD=\cancel{17}\,8$

$BD=17$



$\triangle O_2DB \sim \triangle ACB$

$$\frac{17}{25}=\frac{2R-r}{2R}$$

$34R=50R-25r$

$16R=25r$

$r=\frac{16}{25}R$

$2r=\frac{32}{25}R>R$

$BN=2R-2r=2R-\frac{32}{25}R=\frac{18}{25}R$

$BD^2=BN\cdot AB;\ BD^2=\frac{18}{25}R\cdot 2R$

$17^2=\frac{36}{25}R^2$

$R=\frac{17\cdot 5}{6}=\frac{85}{6};\ r=\frac{136}{15}$

$$AC^2=4\cdot R^2-25^2=\frac{4\cdot 17^2\cdot 5^2}{6^2}-25^2=\frac{2^2\cdot 17^2\cdot 5^2-25^2\cdot 6^2}{6^2}=$$

$$=\frac{(\overset{170}{2\cdot 17\cdot 5}-\overset{150}{25\cdot 6})(\overset{170}{2\cdot 17\cdot 5}+\overset{150}{25\cdot 6})}{6^2}=\cancel{\tfrac{5}{5}}\frac{1}{6^2}\cdot 20\cdot 320=\frac{64\cdot 100}{6^2}$$

$AC=\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 10}{\cancel{6}_3}=\frac{40}{3};\ NO_1=2r-R=\cancel{25}\ \frac{32}{25}r-r=\frac{7}{25}r$

на след. стр.

6. $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2сл. $y = \frac{x+2}{4}$

$x_3 = 6;\ y_3 = \frac{6+2}{4} = 2$

$x_4 = -2;\ y_4 = \frac{-2+2}{4} = 0$

$(x-2)^2 + 9\left(\frac{x+2}{4} - 1\right)^2 = 25$

$(x-2)^2 + 9\left(\frac{x-2}{4}\right)^2 = 25$

$(x-2)^2 + \frac{9}{16}(x-2)^2 = 25$

$\frac{25}{16}(x-2)^2 = 25$

$(x-2)^2 = 16$

$\left[\begin{array}{l} x-2=4 \\ x-2=-4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Проверка:

1) $x_4 = -2;\ y_4 = 0$

(1): $-2 = \sqrt{2+2}$ не подходит

2) $x_3 = 6;\ y_3 = 2$

(1): $6 - 4 = \sqrt{12 - 6 - 4 + 2}$ (11): $16 + 9 = 25$

$2 = \sqrt{4}$

$2 = 2$ — подходит

3) $x_2 = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}};\ y_2 = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}$

$2 - \sqrt{\frac{5}{2}} - 2 + 2\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{2 - 3\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2} - 2 + \sqrt{\frac{5}{2}} - 2 + 2\sqrt{\frac{5}{2}} + 2}$

$\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$ — подходит

см. на след стр.

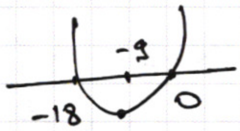
$5^{\log_{12} y} + y \geq y^{\log_{12} 13}$

$y^{\log_{12} 5} + y \geq y^{\log_{12} 13}$ $\quad \log_{12} 13 \cdot \log_{13} y = \log_{12} y$

$\cancel{y^{\log_{12} 5}} + 5^{\log_{12} y} + 12^{\log_{12} y} \geq 13^{\log_{12} y}$

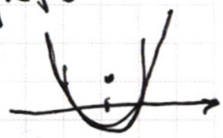
$5^{\alpha} + 12^{\alpha} \geq 13^{\alpha}$ $\quad \alpha < 0$ $\quad \alpha = \log_{12}(x^2+18x)$

$f_1(\alpha) = 5^{\alpha} + 12^{\alpha} > 0$



$\alpha = \log_{12}(x^2+18x)$

$\alpha = \log_{12} 81$



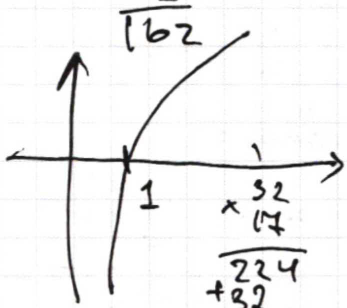
$\cancel{f(\alpha) = 5^{\alpha} + 12^{\alpha} - 13^{\alpha}}$

$\cancel{f'(\alpha) = \ln 5 \cdot 5^{\alpha} + \ln 12 \cdot 12^{\alpha} - \ln 13 \cdot 13^{\alpha}}$

$\times \begin{array}{r} 18 \\ 9 \\ \hline 162 \end{array}$

$125 +$ $\quad \times \begin{array}{r} 144 \\ 12 \\ \hline 288 \\ +144 \\ \hline 1728 \end{array}$ $\quad \times \begin{array}{r} 169 \\ 13 \\ \hline 507 \\ +169 \\ \hline 2197 \end{array}$

$+ \begin{array}{r} 1728 \\ 125 \\ \hline 1853 \end{array}$



$\times \begin{array}{r} 32 \\ 17 \\ \hline 224 \\ +32 \\ \hline 544 \end{array}$

$D = 900 - 544 =$

$=$

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$

$\frac{12x+9+2}{4x+3} = \frac{3(4x+3)+2}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2 - 30x - 17$

$3 + \frac{2}{4x+3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$

$y^{\log_{12} 5} + y \geq y^{\log_{12} 13}$ $\quad a^2 + b^2 = c^2$

$a^4 + b^4 \geq c^4$

$\cancel{f(y) = y^{\log_{12} 5} - y^{\log_{12} 13} + y}$

$f'(y)\ \log_{12} 5 \cdot y^{\log_{12} \frac{5}{12}} - \log_{12} 13 \cdot y^{\log_{12} \frac{13}{12}} + 1$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

$tg\alpha - ?$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cos4\beta+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=-\frac{4}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta=-\frac{4}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta=-\frac{4}{5}$

$\cos2\beta=\frac{2\sqrt5}{5}=\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{4}{5}}=$

$=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

1сл $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

~~$\sin 2\alpha \frac{}{\sqrt5}$~~ $\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1$

$4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha\cancel{-1}=\cancel{-1}$

$\cos\alpha(4\sin\alpha+2\cos\alpha)=0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0 \text{ не может быть}\\ 4\sin\alpha=-2\cos\alpha\end{array}\right.$

$4\cos\alpha=2\sin\alpha$

2

$\underline{tg\alpha=-\frac{1}{2}}$

2сл. $\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$tg\alpha=0$

$tg\alpha=\frac{1}{2}$

$\frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin2\alpha-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin2\alpha-\cos2\alpha=-1$; $4\sin\alpha\cos\alpha-(1-2\sin^2\alpha)=-1$

~~$4\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha+1=-1$~~ $4\sin\alpha\cos\alpha\cancel{-1}+2\sin^2\alpha=\cancel{-1}$

$\sin\alpha(4\cos\alpha-2\sin\alpha)$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \quad (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \quad (11) \end{cases}$

$\underline{x \geq 2y}$

$\ln 5^{\alpha}$

$e = $

(11): $x^2-4x+4+9y^2-18y+9=\underbrace{4+9}_{13}+12$ 25

$9(y^2-2y+1)$

$\cancel{(x-2)^2+(3y+3)^2}$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$5^{\log_{12}y}+\cancel{x} \geq y^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}y}+y \geq y^{\log_{12}13}$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$5^{\log_{12}y}+12^{\log_{12}y} \geq 13^{\log_{12}y}$

$x^2-\underline{5xy}+4y^2+\underline{2y}+x-2=0$

$f_1(x)=5^{\alpha}+12^{\alpha}$; $f_1'(\alpha)=\ln 5 \cdot 5^{\alpha}+\ln 12 \cdot 12^{\alpha}$

$f_2(x)=13^{\alpha}$;

$4y^2+2y-5xy+x^2+x-2=0$

$\ln 13 \cdot 13^{\alpha}$

$4y^2+y(2-5x)+x^2+x-2=0$

$D=4-20x+25x^2-16x^2-16x+32=9x^2-36x+36$

$\sqrt{D}=3|x-2|$

$9(x^2-4x+4)$

$9(x-2)^2$

$y_1=\frac{5x-2+3x-6}{8}=\frac{8x-8}{8}=x-1$

$\ln 5 \cdot 5^{\alpha}=-\ln 12 \cdot 12^{\alpha}$

$y_2=\frac{5x-2-3x+6}{8}=\frac{2x+4}{8}=\frac{x+2}{4}$

$5^{\alpha}=\frac{-\ln 12}{\ln 5} \cdot 12^{\alpha}$

$4(y-x+1)\left(y-\frac{x+2}{4}\right)=0$

$(y-x+1)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=\frac{x+2}{4} \end{array}\right.$

$(x-2)^2+9(x-1-1)^2=25$

$(x-2)^2+9(x-2)^2=25$

$10(x-2)^2=25$

$5^x=e^{\ln 5^x}$

$x-2=\pm\frac{5}{\sqrt{10}}$

$(5^x)'=(e^{\ln 5^x})'=$

$=\ln 5 \cdot 5^x$

$\begin{cases} x=2\pm\frac{2}{\sqrt{10}} \\ y=1\pm\frac{2}{\sqrt{10}} \end{cases}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

1сл. $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$\cos\alpha\,(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 0\\ 2\sin\alpha = -\cos\alpha\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 0\\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}\end{array}\right.$ ← не подходит т.к по условию $\operatorname{tg}\alpha$ определён

2сл. $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Ответ: ~~$\operatorname{tg}\alpha$~~ -2 ; $-\frac{1}{2}$; 0

$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$2\sin 2\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha) = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha\,(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$ $\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0\\ 2\cos\alpha = -\sin\alpha\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0\\ \operatorname{tg}\alpha = -2\end{array}\right.$

2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (\text{I}) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (\text{II}) \end{cases}$

(I): $x \geqslant 2y$:

$$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$$
$$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$$
$$4y^2+y(2-5x)+x^2+x-2=0$$

$$D=4-20x+25x^2-16(x^2+x-2)=$$
$$=4-20x+25x^2-16x^2-16x+32=$$
$$=9x^2-36x+36=9(x^2-4x+4)=9(x-2)^2$$

$$y_1=\frac{5x-2+3(x-2)}{8}=\frac{8x-8}{8}=x-1$$
$$y_2=\frac{5x-2-3(x-2)}{8}=\frac{2x+4}{8}=\frac{x+2}{4}$$

(II): $x^2-4x+4+9y^2-18y+9=12+4+9$

$$(x-2)^2+9(y^2-2y+1)=25$$
$$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$$

1сл. $y=x-1$

$$(x-2)^2+9(x-2)^2=25$$
$$10(x-2)^2=25$$
$$(x-2)^2=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$$

$\left[\begin{array}{l} x-2=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$

$x_1=2+\sqrt{\frac{5}{2}}$

$y_1=1+\sqrt{\frac{5}{2}}$

$x_2=2-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$y_2=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

см. на след стр.