МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

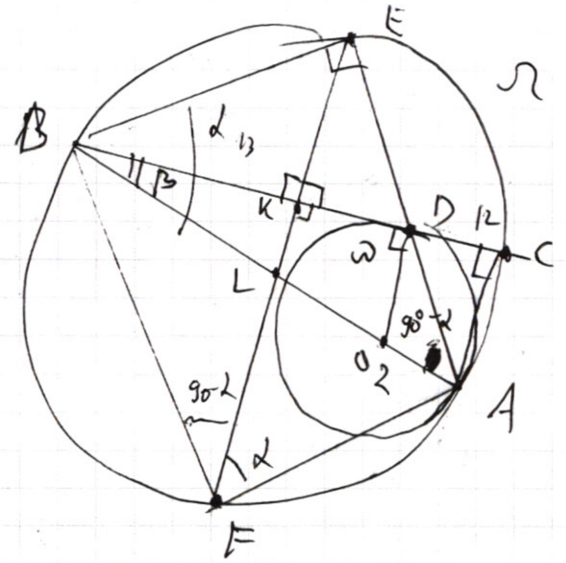
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$CD = 12$

$BD = 13$

1) $R_{1,2}$ - ?

2) $\angle AFE$ - ?

3) $S_{\triangle AEF}$ - ?

1) O_2 - центр ω; $O_2D \perp BC$, т.к. BC - кас.

$AC \perp BC$, т.к. AB - диаметр, а $\angle BCA$ - впис.

Получаем, что $\triangle BKL \sim \triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ по 2-ум угл.: прямые углы и $\angle ABC$ - общий.

Пусть $\angle ABC = \beta$, тогда $\underset{BD}{13} = BO_2 = (2R_1 - R_2)\cos\beta$, где

R_2 - рад ω

R_1 - рад Ω.

$\boxed{(2R_1 - R_2)\cos\beta = 13}$ (1)

$BC = AB\cos\beta$

$\boxed{2R_1\cos\beta = 25}$ (2)

(1) : (2) : $1 - \dfrac{R_2}{2R_1} = \dfrac{13}{25} \Rightarrow \dfrac{R_2}{2R_1} = \dfrac{12}{25} \Rightarrow \boxed{2R_1 = \dfrac{25}{12}\cdot R_2}$

По т. Пифагора в $\triangle BDO_2$:

$169 + R_2^2 = (2R_1 - R_2)^2$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Надо отметить, что т.к. AB диаметр и A – т.кас. Ω и ω, то на AB лежат центры Ω и ω.

$$169 + R_2^2 = \left(\frac{25}{12}R_2 - R_2\right)^2 = \left(\frac{13}{12}\right)^2 R_2^2 = \frac{169}{144}R_2^2$$

$$169 = \frac{25}{144}R_2^2 \Rightarrow R_2 = \frac{12}{5}\cdot 13 = \frac{156}{5}$$

$$\boxed{R_2 = \frac{156}{5}} \Rightarrow R_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{12}\cdot\left(\frac{12}{5}\cdot 13\right) = \frac{65}{2}$$

$$\boxed{R_1 = \frac{65}{2}}$$

2) $2R_1\cos\beta = 25 \Rightarrow \frac{65}{2}\cdot 2\cos\beta = 25$

$$\boxed{\cos\beta = \frac{5}{13}}$$

Пусть $\angle AFE = \alpha$, тогда

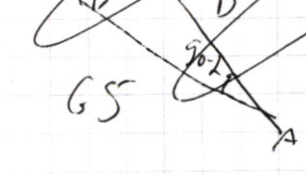
$\alpha = \angle ABE$ (вписанные, опираются на одну дугу)

$\angle BEA = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр AB.

$\Rightarrow \angle BAE = 90^\circ - \alpha$

~~Th. синусов для $\triangle BAD$: $\frac{13}{\sin(90^\circ-\alpha)} =$~~

$\angle BAD$: т. косинусов: $DA^2 = 169 + 65^2 - 13\cdot 130\cdot 2\cos\beta$



$DA^2 = 169 + 4225 - 2\cdot 5\cdot 130$

$DA^2 = 4394 - 1300 = 3094$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle BCA$: $AC/BC = tg\beta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\beta} - 1} = \sqrt{\frac{169}{25} - 1} = \frac{12}{5}$

$BC = 25 \Rightarrow AC = 25 \cdot 12/15 = 60$

$\boxed{AC = 60}$

Т.к. Пифагора для $\triangle DCA$: $144 + 3600 = DA^2$

$3644 = DA^2$

$DA = 2\sqrt{911}$

Т.к. синусов для $\triangle BDA$: $\frac{DA}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin(90-\alpha)} \Rightarrow \frac{2\sqrt{911}}{12/13} = \frac{13}{\cos\alpha}$

$\frac{\sqrt{911}}{6} \cdot 13 = \frac{13}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{911}}$

$\boxed{\alpha = \angle AFE = \arccos\frac{6}{\sqrt{911}}}$

3) $S_{\triangle AEF}$ найдём по т.к. синусов

Ответ: $(a; b)$: $a \in [0; 3/4)$

$b \in [-2; -1]$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

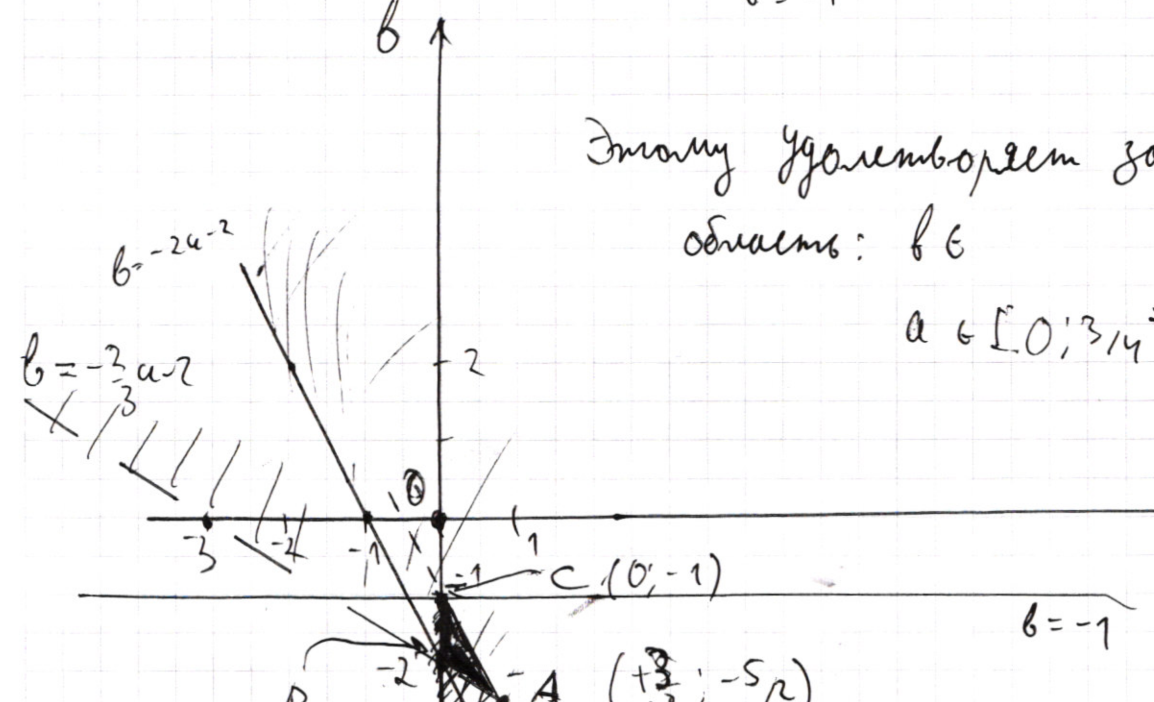
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

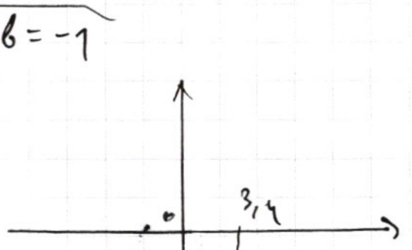
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) I: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \geq -2a-2 \\ b > -\frac{2}{3}a-2 \end{cases} \\ \text{II} \begin{cases} a > 0 \\ b \leq -2a-1 \end{cases} \\ \text{III} \begin{cases} a = 0 \\ b \leq -1 \end{cases} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \geq -2a-2 \\ b > -\frac{2}{3}a-2 \end{cases} \quad \boxed{1} \\ \begin{cases} a > 0 \\ b \leq -2a-1 \end{cases} \quad \boxed{2} \\ \begin{cases} a = 0 \\ b \leq -1 \end{cases} \quad \boxed{3} \end{array}\right.$



Этому удовлетворяет закрашенная область: $b \in$

$a \in [0; 3/4)$



$\boxed{3} + \boxed{2}$

$A(\frac{3}{4}; -\frac{5}{2})$

$\underline{A:}$ $\begin{cases} b = -2a-1 \\ b = -\frac{2}{3}a-2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $-2a-1 = -\frac{2}{3}a-2 \quad |\cdot(-3)$

$6a+3 = 2a+6 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \quad b = -\frac{5}{2}$

$-\frac{3}{2}-1 = -5/2$

$A(-5/2; 3/4)$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3-ий случай: $a=0$

$$f(x) = 3(2+b)x - 2b - 8 \leq 0$$

$$3(2+b)x \leq 2b+8,$$

из $\boxed{I}$, если $a=0$, $\Rightarrow b > -2 \Rightarrow$ $2+b>0$

$$\begin{cases} x \leq \dfrac{2b+8}{3(2+b)} \\ x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right] \end{cases} \overset{\text{требуем}}{\Rightarrow} 2 \leq \frac{2b+8}{3(2+b)}$$

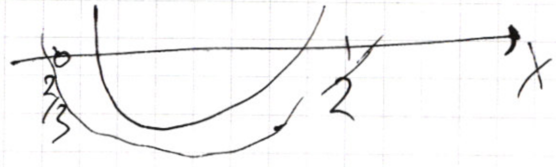
$$6+3b \leq b+4$$

$$2b \leq -2$$

$$b \leq -1$$

Если $a=0$, то $b \leq -1$ $\quad \underline{III}$

Продолжение №6



Чтобы $f(x) \le 0$ на $x \in (2/3; 2]$, то требуем:

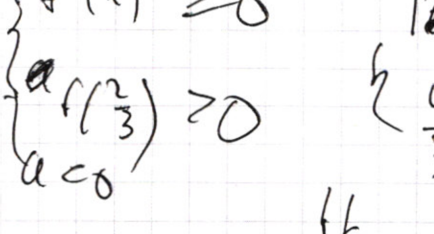
$$\begin{cases} f(2/3) < 0 \\ f(2) \le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 12a + 12 - 4a + 6b - 2b - 8 \le 0 \\ \frac{4}{3}a + 4 - \frac{4}{3}a + 2b - 2b - 8 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a + 4b + 4 \le 0 \\ -4 < 0 \end{cases}$$ — верно при $\forall (a; b)$ на всех $x \in X$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a > 0 \\ 2a + b + 1 \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 0 \\ b \le -2a - 1 \end{cases} \quad \boxed{\text{II}}$$

2-ой случай: $a < 0$, тогда $f(x)$ — параб. ветвями вниз.



Чтобы это выполнялось при заданных x, необходимо условие:

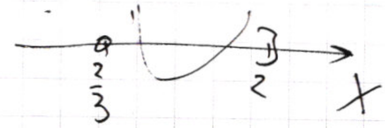
$$\begin{cases} f(2) \ge 0 \\ f(\frac{2}{3}) > 0 \\ a < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 12a + 12 - 4a + 6b - 2b - 8 \ge 0 \\ \frac{4}{3}a + 4 - \frac{4}{3}a + 2b - 2b - 8 > 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$4 - 8 = -4 > 0$ — неверно $\Rightarrow$ данный случай не подходит

2) Р-рим $ax+b \geq 18x^2 - 51x + 28$

$f(x) = 18x^2 - (51+a)x + 28 - b \leq 0$

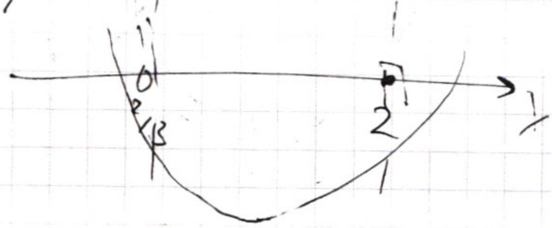


$f(x)$ – параб. ветвями вверх;

~~Чтобы она была ≤ 0, то необходимо условие: $D \geq 0$~~

~~$D = (51+a)^2 - 4 \cdot 18 \cdot (28-b) \geq 0$~~

Чтобы это выполнялось, необходимо условие:



$$\begin{cases} f(2) \leq 0 \\ f\left(\frac{2}{3}\right) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 72 - (51+a)2 + 28 - b \leq 0 \\ 8 - (51+a)\frac{2}{3} + 28 - b < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 72 - 102 - 2a + 28 - b \leq 0 \\ 8 - 34 - \frac{2}{3}a + 28 - b < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 - 2a - b \leq 0 \\ 2 - \frac{2}{3}a - b < 0 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} b \geq -2a - 2 \\ b > -\frac{2}{3}a - 2 \end{cases}} \quad \boxed{\text{I}}$$

3) ① : $a \neq 0$; тогда

$\boxed{f(x) = 3ax^2 + (6 - 2a + 3b)x - 2b - 8 \leq 0}$

$f(x)$ – парабола;

1-ый случай: $a > 0$, тогда $f(x)$ – параб. ветвями вверх.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$$

$(a;b)$ - ? ↳ при $\forall x \in (2/3; 2]$.

1) Если $x \in (\frac{2}{3}; 2]$, тогда $3x-2>0$;

Р-рим $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \quad | \cdot (3x-2)>0$

$$8-6x \geq 3ax^2-2ax+3bx-2b$$

$$3ax^2-2ax+3bx+6x-2b-8 \leq 0$$

$$\boxed{3ax^2+(6-2a+3b)x-2b-8 \leq 0} \quad (1)$$

~~$a=0$: $(6+3b)x-2b-8 \leq 0$~~

~~$(6+3b)x \leq 8+2b$~~

~~$b=-2$: $0 \cdot x \leq 4$ — выполн. $\forall x \in (2/3; 2] \Rightarrow (a;b)=(0;-2)$ подходит;~~

~~$b \neq -2$: x~~

~~$b > -2$: $\Rightarrow x \leq \frac{8+2b}{6+3b}$~~

~~Требуем: $2 \leq \frac{8+2b}{6+3b} \Rightarrow 12+6b \leq 8+2b$~~

~~$4b \leq -4$~~

~~$b \leq -1$~~

~~$b \in (-2; -1]$~~

~~$b<-2$: $x \geq \frac{8+2b}{6+3b} \Rightarrow \frac{8+2b}{6+3b}$~~

~~тогда~~

5) Заметим, что ф-ция, где $a \in (0;1)$, $g(y) = a^y \downarrow$ на $y \in R$, тогда $f(t) = \left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5 t} + \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_5 t} \downarrow$;

По п. 4 => если $f(t) \geq 1$, то $t \in (0; 25]$

6) ~~$26x - x^2$~~

Обратная замена: $0 < 26x - x^2 \leq 25$

$$\begin{cases} x^2 - 26x < 0 \\ x^2 - 26x + 25 \geq 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$ $(x-25)(x-1) \geq 0$

$+$ $-$ $+$: 0, 26

$+$ $-$ $+$: 1, 25

$\Rightarrow x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

Ответ: $x \in (0;1] \cup [25;26)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Р-ним $f(t) = t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} + t$~~

~~$f'(t) = \log_5 12\, t^{\log_5 12 - 1} - \log_5 13\, t^{\log_5 13 - 1} + 1 \vee 0$~~

3) Пусть $26x - x^2 = t \geq 0$: $26x - x^2 = t = 5^{\log_5 t} \Rightarrow$

$$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t} \quad \Big|: 13^{\log_5 t} > 0$$

$$\boxed{\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5 t} + \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_5 t} \geq 1} \quad (*)$$

4) Пусть $t \geq 5 \Rightarrow \log_5(t) \geq 1$; тогда слева ф-ция $f(t)$, которая в силу монотонности $\downarrow$ [тк $\frac{12}{13} < 1$ и $\frac{5}{13} < 1$; а сумма убыв. ф-ций есть убыв.]

Поэтому р-во $\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5 t} + \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_5 t} = 1$ выполняется в единственной точке ! при $t = 25$

Действительно: $\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow f(t) \geq 1$ при $\boxed{t \in [5; 25]}$

5) ~~Пусть $t \in [1; 5)$:~~

~~$\log_5(t) \in [0; 1) \Rightarrow a^{\log_5 t}$ ($0<a<1$) $\downarrow \Rightarrow f(t) = \left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5 t} + \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_5 t} \Rightarrow \downarrow$ как сумма убыв. ф-ций.~~

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

1) тк есть $\log_5(26-x^2)$, то требуем $26x-x^2>0$

$(26-x)x>0$

$-\ (+)\ -$; 0, 26, x

$$\boxed{\text{ОДЗ}: x \in (0;26)}$$

$\Downarrow$

$|x^2-26x| = 26x-x^2$

2) Вспомним такое лог. св-во: $a^{\log_b c} = c^{\log_b(a)}$; тогда

$\cancel{12^{\log_5(26x-x^2)} + 26x-x^2 \geq (26x-x^2)^{\log_5 13}}$

$\cancel{13 \log\ 13^{\log_5(26x-x^2)}}$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq (26x-x^2)^{\log_5 13}$$

~~Пусть $26x-x^2=t>0$:~~

$\cancel{t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5(13)}}$

~~Найдём когда выполняется р-во:~~

$\cancel{\boxed{t^{\log_5 12}+t = t^{\log_5(13)}}}$

$\cancel{t^{\log_5 12}+t=2\sqrt{t^{\log_5 60}}}$

$\cancel{4t^{\log_5 60}=t^{\log_5 169}}$

$\cancel{1=t^{\log_5 \frac{169}{60}}}$

~~Если $t=25$ [т.е. есть $x=1$ или 25];~~

$\cancel{25^{\log_5 12}+25 = 25^{\log_5 13}}$

~~$25=169-144$ — верно $\Rightarrow t=25$ + ры.~~

~~Р-рим $f(t)=t^{\log_5 12}-t^{\log_5(13)}+t$:~~

$\cancel{f'(t)=\log_5(12)\,t^{\log_5(12)-1}-\log_5 13\,t^{\log_5 13-1}+1}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(5)' : $\cos 2\alpha = \frac{8}{17} \Rightarrow \sin 2\alpha = 4\cos 2\alpha - 1 = \frac{32}{17} - 1 = \frac{15}{17}$

$\sin 2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha \cos^2\alpha$

из условия $\cos 2\alpha = \frac{8}{17}$: $2\cos^2\alpha = \frac{25}{17}$

S $\qquad \sin 2\alpha = \frac{15}{17}$

$\Downarrow$

$\cancel{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{15}{17} = \cancel{2} \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{25}{\cancel{17}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\alpha_3 = 3/5}$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = -1;\ 3/5;\ \frac{5}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение №1

По основному триг. тождеству:

$$\begin{cases} \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \\ \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1 \end{cases} \quad (*)$$

$\sin 2\alpha = -4\cos 2\alpha - 1 \Rightarrow$

$\cos^2 2\alpha + (1+4\cos 2\alpha)^2 = 1$

$\cos^2 2\alpha + 1 + 16\cos^2 2\alpha + 8\cos 2\alpha = 1$

$17\cos^2 2\alpha + 8\cos 2\alpha = 0$

$\cos 2\alpha\,(17\cos 2\alpha + 8) = 0$

$\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \sin 2\alpha = -1$ или $\cos 2\alpha = -\frac{8}{17} \Rightarrow \sin 2\alpha = -1 + \frac{32}{17}$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $2\cos^2\alpha = \frac{9}{17}$

Если $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$, то, т.к. $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, то $1 + tg^2\alpha = 2$

$tg^2\alpha = 1$

$\boxed{tg\,\alpha = \pm 1}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -1$

$\cos\alpha \neq 0$: $\quad 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha = -1 \Rightarrow 2\,tg\,\alpha\cos^2\alpha = -1$

$\boxed{tg\,\alpha = -1}$

$\boxed{tg\,\alpha_1 = -1}$

Такие $\begin{cases} 2\cos^2\alpha = 9/17 \\ \sin 2\alpha = -1-4\cos 2\alpha = \\ \quad = -1 + \frac{32}{17} = \frac{15}{17} \end{cases}$ $\Rightarrow \cos\alpha \neq 0$, поэтому

Si

$$\begin{cases} 2\cos^2\alpha = 9/17 \\ \sin 2\alpha = 15/17 \end{cases} \quad (\text{из } (*))$$

$\cancel{tg\,\alpha}$ $\sin 2\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha \overset{\cos\alpha\neq 0}{=} 2\cos^2\alpha\, tg\,\alpha = \frac{9}{17}\cdot tg\,\alpha$

$$\frac{9}{17}\, tg\,\alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow tg\,\alpha_2 = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

$$\boxed{tg\,\alpha_2 = 5/3} \ (*)$$

5) (II): $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

(I): $\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Big| \cdot \sqrt{17}$

$$\boxed{\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 4\cos 2\alpha - 1 \\ \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$(4\cos 2\alpha - 1)^2 + \cos^2(2\alpha) = 1$$

$$16\cos^2 2\alpha + 1 - 8\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha\,(17\cos(2\alpha) - 8) = 0$$

~~Мы уже раз видели случай $\cos 2\alpha = 0$:~~

(1) $\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \sin 2\alpha = -1 \;\Big|\Rightarrow \sin 2\alpha = -1 = 2\,tg\,\alpha\cos^2\alpha = tg\,\alpha\cdot\frac{1}{2}\cdot 2$

$\cos^2\alpha = 1/2$

$\boxed{tg\,\alpha = -1}$ было

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$.

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \boxed{\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$ (1)

2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha\cos(4\beta) + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$

Заметим:

$= \sin 2\alpha(\cos 4\beta+1) + \sin 4\beta\cos 2\alpha$ $= \left[\cos 4\beta+1 = 2\cos^2 2\beta \underbrace{-1+1}_{0}\right]$

$= \sin 2\alpha\cdot(2\cos^2 2\beta) + 2\sin(2\beta)\cos(2\beta)\cos 2\alpha =$

$= 2\cos(2\beta)(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha) = -\frac{2}{17}$

$\Downarrow$

$\boxed{\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha) = -\frac{1}{17}}$ (2)

3) (1) в (2): $\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ - зависит от 2β.

4) (I): $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$, тогда

(1): $\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $|\cdot\sqrt{17}$

$\boxed{\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1}$ (3)

☐ черновик ☑ чистовик Страница №4
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) Подходят $\begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ b=-\frac{12}{5}\sqrt{10} \end{cases}$

$\begin{cases} x-1=1 \\ y-6=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(x_1;y_1)=(2;15)}$

$\begin{cases} x-1=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ y-6=-\frac{12}{5}\sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=1-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ y_2=6-\frac{12}{5}\sqrt{10} \end{cases}$

Ответ: $(x;y)=(2;15)$; $\left(1-\frac{3\sqrt{10}}{5};\ 6-\frac{12}{5}\sqrt{10}\right)$

$$\begin{cases} b^2+36a^2-12ab=ab \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2-13ab+36a^2=0 & \boxed{3'} \\ 9a^2+b^2=90 & \boxed{4'} \end{cases}$$

$\boxed{3'}$ Решим ург. (b) как квадратное:

$$D = 169a^2 - 144a^2 = 25a^2$$

$$b = \frac{13a \pm 5a}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=9a \\ b=4a \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=81a^2 \\ b^2=16a^2 \end{array}\right.$$

$\underline{b^2=81a^2}$:
$$9a^2+81a^2=90$$
$$90a^2=90 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow \boxed{a_{1,2}=\pm 1}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{b_{1,2}=\pm 9}$$

$\underline{b^2=16a^2}$:
$$9a^2+16a^2=25a^2=90$$
$$a=\pm\frac{3}{5}\sqrt{10} \Rightarrow \boxed{b=\pm\frac{12}{5}\sqrt{10}}$$

4) $\begin{cases} y-6x\geq 0 = \cancel{a-6b}\ b-6a\geq 0 \\ ab>0 \end{cases}$
$$\boxed{b\geq 6a}$$

Если $\begin{cases} b=9a \\ a=\pm 1 \end{cases}$, то $\left(\begin{array}{ll} b_1=9 & a_1=1 \\ b_2=-9 & a_2=-1 \end{array}\right)$

1. $9 \geq 6$ — V
2. $-9 \geq -6$ — X $\Rightarrow$ не подходит решен.

Если $\begin{cases} b_{1,2}=4a_{1,2} \\ a_{1,2}=\pm\frac{3}{5}\sqrt{10} \end{cases}$; $4a\geq 6a \Rightarrow -2a\geq 0 \Rightarrow \boxed{a\leq 0}$

Подходит только $\begin{cases} a=-\frac{3}{5}\sqrt{10} \\ b=-\frac{12}{5}\sqrt{10} \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} & (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 & (2) \end{cases}$$

1) Р-рим (1): $y-6x=\sqrt{x(y-6)-(y-6)}$

$$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \quad \Updownarrow \quad y-6x\geq 0$$

$$\boxed{(y-6x)^2=(x-1)(y-6)} \quad (3)$$

2) Р-рим (2): $9(x^2-2x+1)-9+y^2-2\cdot 6y+36-36=45$

$$9(x-1)^2-45+(y-6)^2=45$$

$$\boxed{9(x-1)^2+(y-6)^2=90} \quad (4)$$

3) (3) и (4)

$$\begin{cases} (y-6x)^2=(x-1)(y-6) \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} a=x-1 \\ b=y-6 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $b-6a=y-6-6x+6=y-6x$

$$\boxed{y-6x=b-6a}$$

$$\begin{cases} (b-6a)^2=ab \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

№2

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} & (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 & (2) \end{cases}$$

1) (1) при условии $\underline{y \geq 6x}$, ур-ние $\Leftrightarrow$

$$y^2-12xy+36x^2 = xy+6x-y+6$$

$$\boxed{y^2+36x^2-13xy-6x-6+y=0} \quad (1')$$

2) $$\begin{cases} y^2+36x^2-13xy-6x-6+y=0 \\ y^2+9x^2-18x-12y=45 \end{cases} \quad \ominus$$

$$27x^2-13xy+12x-6+13y=45$$

2) Вернемся к (1) и сделаем замену $\underline{y-6x=t \geq 0}$:

$$t = \sqrt{(y-6)x-(y-6)} = \sqrt{(y-6)(x-1)}$$

$$\boxed{(y-6x)^2 = (y-6)(x-1)} \quad (3)$$

3) (2): $9x^2-2\cdot 3x\cdot 3+9-9+y^2-2\cdot 3\cdot 2y+36-36=45$

$$(3x-3)^2+(y-6)^2 = 45+45 = 90$$

$$\boxed{9(x-1)^2+(y-6)^2=90}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница № ~~2~~

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\quad tg\alpha - ?$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

1) $$\begin{cases} \cancel{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}} \\ \cancel{2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)} + 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

~~$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta$~~

$$\begin{cases} \sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

~~Sin~~

$$\cos 4\beta + 1 = 2\cos^2 2\beta - 1 + 1 = 2\cos^2 2\beta$$

$$2\sin(2\alpha)\cos^2(2\beta) + 2\sin(2\beta)\cos(2\beta)\cos 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$\cos 2\beta\,(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha) = -\frac{1}{17}.$$

2) $$\begin{cases} \cos 2\beta\,(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha) = -1/17 \\ \sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$$-\cos 2\beta\,\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) $\begin{cases} (y-6x)^2 = (y-6)(x-1) \\ 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} a = y-6 \\ b = x-1 \cdot 6 \end{cases}$

$a = y-6$; $b = 6x-6$

$\boxed{a-b = y-6x}$

Тогда: $\begin{cases} (a-b)^2 = ab \\ 9a^2+b^2 = 90 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 - 2ab + b^2 = ab \\ 9a^2+b^2 = 90 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 - 3ab + b^2 = 0 & \boxed{I} \\ 9a^2 + b^2 = 90 & \boxed{II} \end{cases}$

~~I: решим отн. (a): $D = 9b^2 - 4b^2 = 5b^2$~~

~~$a = \frac{3b \pm \sqrt{5}b}{2}$~~

$\ominus$: $-8a^2 - 3ab = -90$

$8a^2 + 3ab = 90$

$8a^2 - 90 = -3ab$ (*)

Если $a=0$, то $b=0$ из I, но это не подходит II => невозможн. случай.

Поэтому (*) => $b = -\frac{8a}{3} + \frac{30}{a}$

⇓

(I): $a^2 + 8a^2 - 90$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

N2

$$y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}$$

$$\cancel{a^{\log_b c} = c^{\log_b a}}$$

$$\cancel{\log_b c = \log_a c^{\log_b(a)} = \log_a c \cdot \log_b a}$$

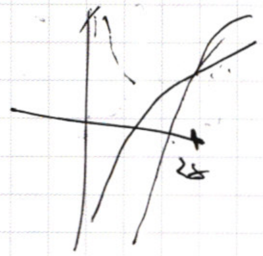
$$t^{\log_5 \frac{12}{13}} + t^{\log_5 \frac{5}{13}} \geq 1$$

$$\cancel{t^{\log_5 \frac{12}{13}} + t^{\log_5 \frac{5}{13}} \geq 2\sqrt{t^{\log_5 \frac{60}{169}}}}$$

$t \geq 1$: $\cancel{\log_5 12}$ $\log_t$ $12^{\log_5 t} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$\cancel{t}$ $\cancel{\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5 t} + t}$

$t^{\log_5 5}$ $5^{\log_5 t}$



$\cancel{\log}$ $12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$

$\cancel{f(t)}$ $\frac{12}{13}^{\log_5 t} + \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_5 t} \geq 1$

$t \geq 5$. ↘ => 1 при $t = 25$

$t \leq 5$ $\left(\frac{12}{13}\right)^y + \left(\frac{5}{13}\right)^y \geq 1$.

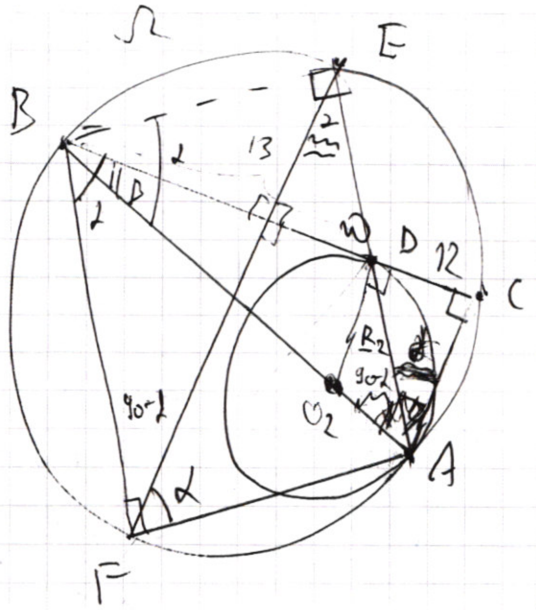
$\cancel{y<0 \quad \left(\frac{13}{12}\right)^{-y} + \left(\frac{13}{5}\right)^{-y} \geq 1}$.

$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1,41}{2} \approx 0,7$

$(0,5)^{1/2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



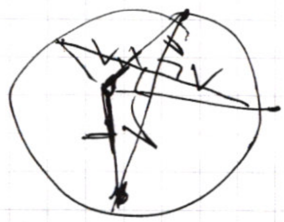
$R_{1,2}$ — ?

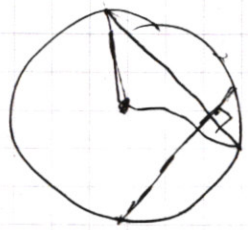
∠AFE — ?

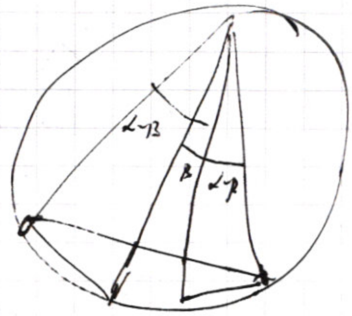
S △AEF

CD = 12

BD = 13







$$\begin{cases} (2R_1 - R_2)\cos\beta = 13 \\ 2R_1 \cdot \cos\beta = 25 \\ 13^2 + R_2^2 = (2R_1 - R_2)^2 \end{cases}$$

$$2R_1 - R_2 = 2R_1 \cdot \frac{13}{25}$$

$$2R_1\left(\frac{12}{25}\right) = R_2 \Rightarrow R_1 \cdot \frac{24}{25} = R_2$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

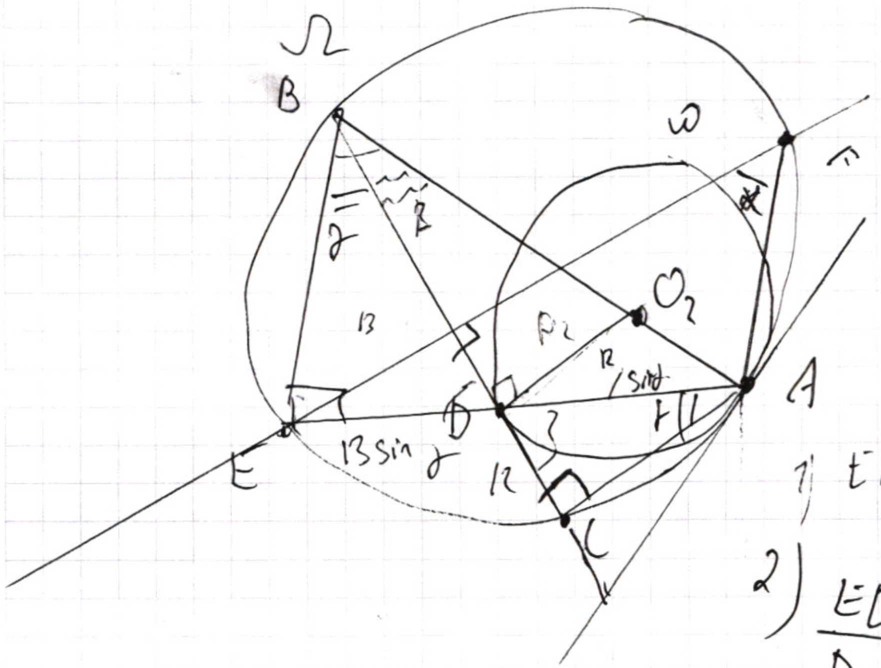
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



R_1, R_2 — ?

$\angle AFE$ — ?

$S_{\angle AFE}$ — ?

$CD = 12$

$BD = 13$

1) $ED \cdot DA = BD \cdot DC = 13 \cdot 12$

$12^2 + 12 = 144 + 12 = 156$

2) $\frac{ED}{DC} = \frac{BE}{AC} = \frac{13D}{DA}$

$\frac{ED}{D2} = \cancel{\frac{BE}{AC}} = \frac{13}{DA}$

$(2R_2 - R_1)\cos\beta = 13$

$2R_1 \cos\beta = 25$

$\frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{2} = \frac{13}{25}$

$\frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{2} - \frac{13}{25}$ $\quad R_2/R_1 = \frac{25}{50} + \frac{26}{50} = \frac{51}{50}$ $\Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{51}{50}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)