МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

2 12 4 6 2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

12 12 12 8.

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4x-4+1 = 2x-1$

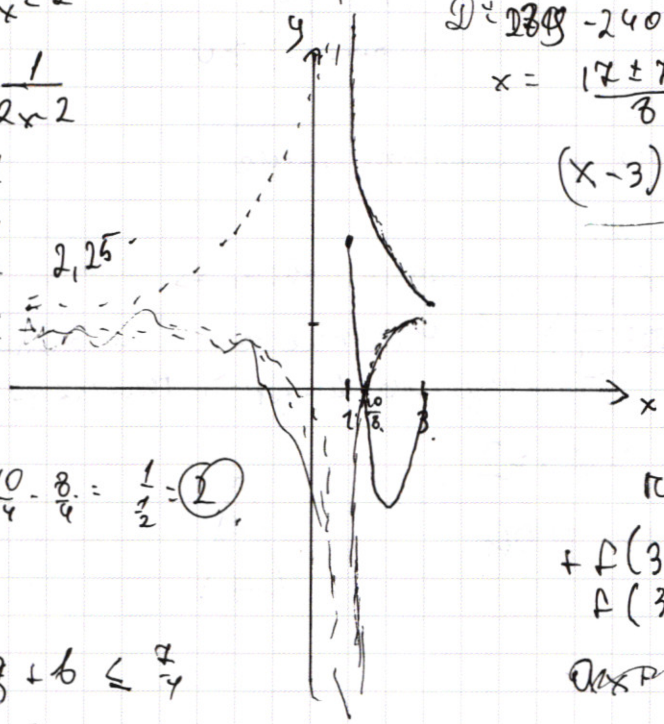
6) $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$2+\frac{1}{2x-2}$

$2-\frac{1}{4}$

$2-\frac{1}{2}$ $2{,}25$

$g(3)=\frac{9}{4}$



$D = 289-240=49$

$x = \frac{17\pm7}{8}$ $x=3$ $x=\frac{10}{8}$

$(x-3)(8x-10)$

$8-34+30=4$

$\frac{17}{8}$ $\frac{289}{8} - 34\frac{289}{4}+30$

$2\cdot\frac{10}{8}=\frac{10}{4}-\frac{8}{4}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

прямая $ax+b$ пересекает т. $(\frac{10}{8};0)$.

$f(3)\geq 0$

$f(3)\leq 1{,}75$

$\frac{10}{8}a+b=0 \mid \cdot 8$

$10a+8b=0$ $\boxed{a=-0{,}8b}$

$-0{,}8bx+b$

$-0{,}8b$ $f(3)\geq 0$ $-1{,}4b\geq 0$

$b\leq 0$

$-0{,}8b\cdot3+b\leq\frac{7}{4}$

$-1{,}4b\leq\frac{7}{4}$

$-\frac{7}{5}b\leq\frac{7}{4}$

$-b\leq 1{,}25$

$b\geq -1{,}25$

Ответ: все пары $(-0{,}8b;\ b)$, где $b\in[0;-\frac{5}{4}]$.

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

] $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha+\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\mid\cdot\sqrt{17}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

] $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$

$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\frac{8\operatorname{tg}\alpha+1-\operatorname{tg}^2\alpha+1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=0$

$4\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1$

$8\operatorname{tg}\alpha-1+\operatorname{tg}^2\alpha+1+\operatorname{tg}^2\alpha=0$ $8\operatorname{tg}\alpha+2=0$ $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{4}$

$2\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\alpha+4)=0$

$\operatorname{tg}\alpha=0$ $\operatorname{tg}\alpha=-4$

$\alpha=0$, $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin 4\beta = 2\sin$

5) $f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad$ $f(p) = [p/4]$, p-простое

определена на полож ⇒ $a>0,\ b>0$

⇒ $x>0,\ y>0$ ⇒ $f(x/y)$

$\frac{x}{y} > 0$

$\exists\ \frac{x}{y} = a$ - полож. число

$f(3) = 0$

$f(2) = 0$ ⇒ $f(6) = 0$

⇒ $f(4) = 0$ $\quad f(8) = 0$

$f(9) = 0$ ...

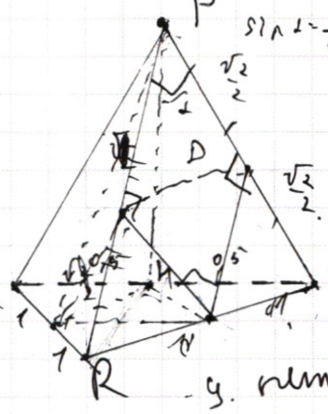
$f(27) = 0$

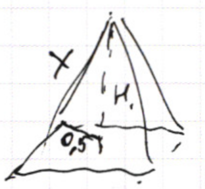
$f(\text{полож}) \geq 0$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt2} = \frac{\sqrt2}{2}$

---

7) $\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt2}{2}}$ т. отделена от наклонной грани





ребра равны ⇒ можно вписать в окружность. Если основ. можно вписать в окр ⇒ трапеция. (пб-т)

S. Диаг = 1 ⇒ RS = 2.

у. лежит в пл-ти RDH.

$\sin = \frac{1}{4}$.

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \left(\sin(2\alpha+2\beta)\right)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$.

$\sin(2\beta+\gamma) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$.

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 4\beta = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$.

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\cos^2 2\beta = \frac{16}{17}$ $\quad$ $-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $-\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\sin^2 2\beta = \frac{1}{17}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\boxed{\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}}$.

☒ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin^2 = \frac{1}{17}$ $\cos^2 = \frac{16}{17}$

$\cos = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)$

$= \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$-\cos 2\beta$

$-\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}} + \frac{4\sin 2\beta}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\frac{4\sin 2\beta - \cos 2\beta}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\frac{\cancel{\sqrt{17}}\sin(2\beta-\gamma)}{\cancel{\sqrt{17}}} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2(\sin \dots = -\frac{7}{17}$

$x>1$	$x<1$
$y>\frac{2}{3}$	$y<\frac{2}{3}$

$x(3y-2) - (3y-2)$
$= (x-1)(3y-2)$

3) $\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$

$3y > 2x$ $\quad y > \frac{2}{3}x$

$9y^2-12xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2$

$\begin{cases} 9y^2-15xy+4x^2+2x+3y=2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$

$3x^2+\frac{4}{3}x^2-6x-\frac{8}{3}x = 4 \mid\cdot 3$

$13x^2-26x-12=0.$

$D = 13^2+12\cdot 13 = 13(13+12) = 5^2\cdot 13$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$D = 9-9y^2+12y+12 =$

$= -9y^2+12y+21.$

$= -3(3y^2-4y-7)$

$D_1 = 4+21 = 25$

$y = \frac{2\pm 5}{3} = -1; \frac{7}{3}.$

$-3(y+1)(3y-7)$

$-1 \quad \frac{7}{3}$

$4x^2+x(2-15y)+9y^2+3y-2=0.$

$D = 225y^2-60y+4-144y^2-48y+32.$

$= 81y^2-108y+36 = (9y-6)^2.$

$x_1 = \frac{15y-2-9y+6}{8} = \boxed{\frac{6y+4}{8}}$ $\quad x_2 = \frac{15y-2+9y-6}{8} = \boxed{3y-1}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x = 3y - 1$

$3(3y-1)^2 + 3y^2 - 6(3y-1) - 4y = 4$

$9y^2 - 6y + 1$

$27y^2 - 18y + 3 + 3y^2 - 18y + 6 - 4y = 4$

$30y^2 - 40y + 5 = 0$

$6y^2 - 8y + 1 = 0$

$D_1 = 16 - 6 = 10$

$y = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{6}$

$y = \frac{4+\sqrt{10}}{6}$ $\qquad y = \frac{4-\sqrt{10}}{6}$

$x = \frac{2+\sqrt{10}}{2} - 1 = \sqrt{10}+1$ $\quad x = \frac{2-\sqrt{10}}{2} - 1 = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$

$y > \frac{2}{3}x$. $\qquad \varnothing\ (x<1)$

$x = 3y - 1$

$y > \frac{2}{3}x$

$3y = x + 1$

$2x > x + 1$

$x > 1,\ y > \frac{2}{3}$

$x = \frac{3y+2}{4}$ $\qquad y > \frac{2}{3}x \quad \frac{4x-2}{3} = y \;\Big|\; \Rightarrow \frac{2x}{3} > \frac{4x-2}{3}$ $\boxed{x<1}$

$3\left(\frac{3y+2}{4}\right)^2 + 3y^2 - 6\left(\frac{3y+2}{4}\right) - 4y = 4$

$\frac{27y^2+36y+12}{16} + 3y^2 - \frac{18y-12}{4} - 4y = 4$

$27y^2 + 36y + 12 + 48y^2 - 72y - 48 - 64y - 64 = 0$

$75y^2 - 100y - 100 = 0$

$3y^2 - 4y - 4 = 0$

$D_1 = 16$

$y = \frac{2 \pm 4}{3}$ $\quad y = 2 \quad y = -\frac{2}{3}$

$x = 2 \quad x = 0$

$3y = x + 1$

$y \geq \frac{2}{3} \quad 2x \leq x + 1$

$x \leq 1$

Ответ: $\left(0; -\frac{2}{3}\right); \left(\sqrt{10}+1; \frac{4+\sqrt{10}}{6}\right)$.

$3y = 4x - 2$

$\frac{2}{3}x < 4x - 2$

$x > 1$.

3). $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$x^2 + 6x = a$.

$3^{\log_4 a} + a \geq |a|^{\log_4 5}$

$a > 0 \Rightarrow$ модуль не обяз.

$3^{\log_4 a} + a > 5^{\log_4 a}$.

$a = 4^{\log_4 a}$

$3^{\log_4 a} + 4^{\log_4 a} > 5^{\log_4 a} \;\Big|\; 5^{\log_4 a}\ (>0$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4 a} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4 a} > 1$

$\searrow + \searrow = const \Rightarrow$ 1 точно, перелеч. найдем подбором её.

$3^{\log_4 a} + 4^{\log_4 a} = 5^{\log_4 a}$

$a = 16$.

$3^2 + 4^2 = 5^2$. $\quad 25 = 25$.

$a \in (0; 16)$. $\qquad x^2 + 6x \leq 16$.

$x^2 + 6x - 16 \leq 0 \qquad x^2 + 6x > 0$

$D = 25$

$(x+8)(x-2) \leq 0 \quad x(x+6) > 0$

$-8 \quad -6 \quad 0 \quad 2$

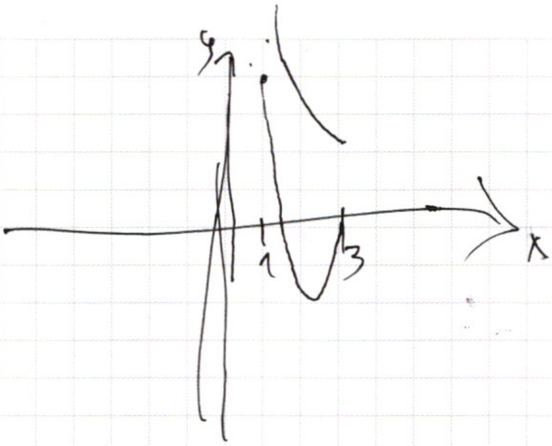
Ответ: $[-8; -6) \cup (0; 2]$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4). $2 = \frac{1}{2x+2}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1) $\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{-1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$. $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\frac{-2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$ $\quad \cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos^2 2\beta=\frac{16}{17}\Rightarrow \sin^2 2\beta=\frac{1}{17}$

$\Rightarrow \sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$. Подставим значения

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha\pm\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\ \Big|\cdot\sqrt{17}$

$4\sin 2\alpha\pm\cos 2\alpha=-1$. Воспользуемся универсальной триг. подстановкой. $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$

] $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{\frac{8\operatorname{tg}\alpha+1-\operatorname{tg}^2\alpha+1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{8\operatorname{tg}\alpha+1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=-1.$ $\quad \frac{8\operatorname{tg}\alpha+1-\operatorname{tg}^2\alpha+1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=0$

$2(4\operatorname{tg}\alpha+1)=0$ $\quad \operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{4}$. (подходит под ОДЗ)

] $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{8\operatorname{tg}\alpha-1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=-1.$ $\quad \frac{8\operatorname{tg}\alpha-1+\operatorname{tg}^2\alpha+1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=0$ $\quad 2\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\alpha+4)=0$

$\operatorname{tg}\alpha=0$ $\quad \operatorname{tg}\alpha=-4$
(подходят под ОДЗ)

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha=0$; $\operatorname{tg}\alpha=-4$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{4}$

Задание 2) $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

ОДЗ: $y\geq\frac{2}{3}x$

$3xy-2x-3y+2\geq 0$
$(x-1)(3y-2)\geq 0$

$(3y-2)^2=\left(\sqrt{3xy-2x-3y+2}\right)^2$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y=2$

$4x^2+x(2-15y)+9y^2+3y-2=0$

$\to$ $D=225y^2-60y+4-144y^2-48y+32=$
$=81y^2-108+36=(9y-6)^2$

$x_1=\frac{15y-2-9y+6}{8}=\frac{6y+4}{8}$ $\quad x_2=\frac{15y-2+9y-6}{8}$ $\quad 3y-1$

$$\begin{cases} x = 3y - 1 \\ y \geq \frac{2}{3}x \end{cases} \Rightarrow 2x \leq x + 1, \quad \underline{x \leq 1}$$

$$3(3y-1)^2 + 3y^2 - 6(3y-1) - 4y = 4$$

$$27y^2 - 18y + 3 + 3y^2 - 18y + 6 - 4y = 4$$

$$30y^2 - 40y + 5 = 0$$

$$6y^2 - 8y + 1 = 0$$

$$D_1 = 10$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{6} = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{10}}{6}$$

$$x = 3y - 1 = 2 \pm \frac{\sqrt{10}}{2} - 1 = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$1 - \frac{\sqrt{10}}{2} < 0$ ~~(не в ОДЗ)~~, $1 + \frac{\sqrt{10}}{2} > 0$ (не в ОДЗ)

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{4 - \sqrt{10}}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{3y+2}{4} \\ y \geq \frac{2}{3}x \end{cases} \Rightarrow \frac{2x}{3} \leq \frac{4x-2}{3}, \quad \underline{x \geq 1}$$

$$3\left(\frac{3y+2}{4}\right)^2 + 3y^2 - 6\left(\frac{3y+2}{4}\right) - 4y = 4$$

$$\frac{27y^2 + 36y + 12}{16} + 3y^2 - \frac{18y+12}{4} - 4y = 4$$

$$27y^2 + 36y + 12 + 48y^2 - 72y - 48 - 64y - 64 = 0$$

$$75y^2 - 100y - 100 = 0$$

$$3y^2 - 4y - 4 = 0$$

$$D_1 = 16$$

$$y = \frac{2 \pm 4}{3}$$

$y = 2$, $x = 2$ ✓(в ОДЗ) $y = -\frac{2}{3}$, $x = 0$ (не в ОДЗ)

~~$(0; -\frac{2}{3})$~~ $(2; 2)$

Ответ: $(2;2)$; $\left(1 - \frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{6}\right)$

Задание 3

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2 \qquad \exists\, x^2 + 6x = a$$

$$3^{\log_4 a} + a \geq |a|^{\log_4 5}$$

$a > 0$ (по ОДЗ логарифма) $\Rightarrow$ модуль можно снять

$$\Leftarrow \left| \begin{array}{l} a^{\log_4 5} = 5^{\log_4 a} \\ a = 4^{\log_4 a} \end{array} \right.$$

~~$3^{\log_4 a} + 4^{\log_4 a} \geq 5^{\log_4 a}$~~

$$3^{\log_4 a} + 4^{\log_4 a} \geq 5^{\log_4 a} \qquad \left| \begin{array}{l} 5^{\log_4 a} \neq 0 \\ 5^{\log_4 a} > 0 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4 a} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4 a} \geq 1$$

Сумма 2-х убывающих ф-й − убывающая функция. Константу пересекает ровно 1 раз. Найдем эту точку.

$$3^{\log_4 a} + 4^{\log_4 a} = 5^{\log_4 a} \qquad \text{При } a = 16.$$

$3^2 + 4^2 = 5^2$ (верно) $\Rightarrow$ $a \leq 16$, но $a > 0$

$$x^2 + 6x > 0 \qquad x^2 + 6x \leq 16 \qquad \begin{cases} x^2 + 6x > 0 \\ x^2 + 6x \leq 16 \end{cases}$$

$$x(x+6) > 0 \qquad (x+8)(x-2) \leq 0$$

Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 6 | $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

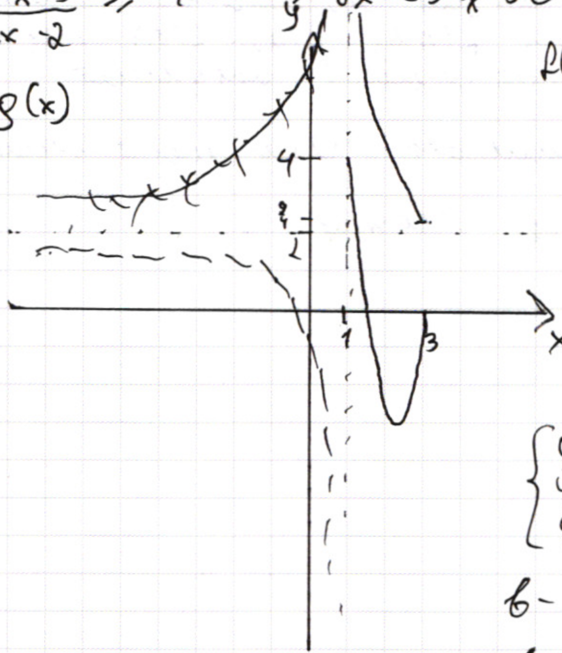
$\frac{4x-3}{2x-2} = 2+\frac{1}{2x-2} = g(x)$

Ассимптоты:

$x=1$

$y=2$

$g(3)=\frac{9}{4}$



$f(x)=8x^2-34x+30$

$=(x-3)(8x-10)$

$x_0=\frac{17}{8} \Rightarrow 1<x_0<3$

$f(3)=0 \quad f(1)=4$

$f(\frac{10}{8})=0$

$y(x)=ax+b$

$\begin{cases} y(1)\geq 4 \\ y(3)\geq 0 \\ y(3)\leq \frac{9}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} a+b\geq 4 \\ 3a+b\geq 0 \\ 3a+b\leq \frac{9}{4} \end{cases}$

$b-\frac{7}{8}\geq 4$

$b\geq\frac{39}{8}$

$-\frac{21}{8}+b\geq 0 \quad b\geq\frac{21}{8}$.

$b\leq\frac{9}{4}-3a$

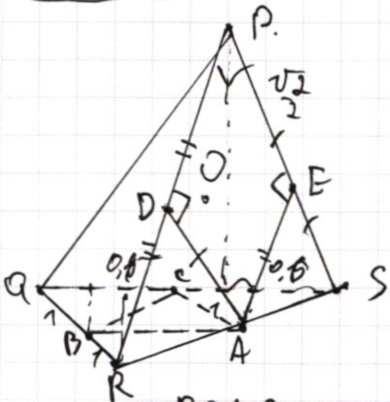
$a+\frac{9}{4}-3a\geq 4$

$2a\leq-\frac{7}{4}$

$a\leq-\frac{7}{8}$

Ответ: при $a\leq-\frac{7}{8}$ и $b\geq\frac{21}{8}$

Задание 7 |



Введем точки A, B, C, D, E

Т.к. O – центр шара, тогда $OP=OE=OD=OA$. т.е. сущ-ет точка, которая равноудалена от вершин четырехуг. ADPE ⇒ ADPE можно вписать в окр.

$DA \parallel PS \Rightarrow DA \parallel PE$; $AE \parallel PR \Rightarrow AE \parallel PD$ (ср. линия) ⇒ PDAE – параллелограм.

Если в параллелограм можно впис. ⇒ он прямоуг.

⇒ PDAE – прямоуг. ⇒ $DA=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad DE=\sqrt{PE^2+DP^2} \quad RS=2DE$

$DP=AE$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Задание 5) Т.к. $f(x)$ определена на положительных числах, если $f(a) > 0$ и $f(b)$

$a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$. $p > 0$ (прост. полож. числа)

Для любого положительного числа если оно простое, $f(p) \geq 0$, т.к. обычный для него число — 0, но они больше нуля

Т.о, значение функции вычисляется только из простых чисел. но операцией $f(ab) = f(a) + f(b)$ мы можем получить только положительный аргумент

=> функция принимает неотрицательные значения =>

$f(x/y) < 0$ быть не может

Ответ: 0 пар.