МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Задача 3:~~

~~$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$~~

~~ОДЗ: $x^2+18x>0$ ⇓ $x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$~~

~~С учетом ОДЗ, неравенство примет вид:~~

~~$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$~~

~~$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+(x^2+18x) \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$~~

Задача 4:

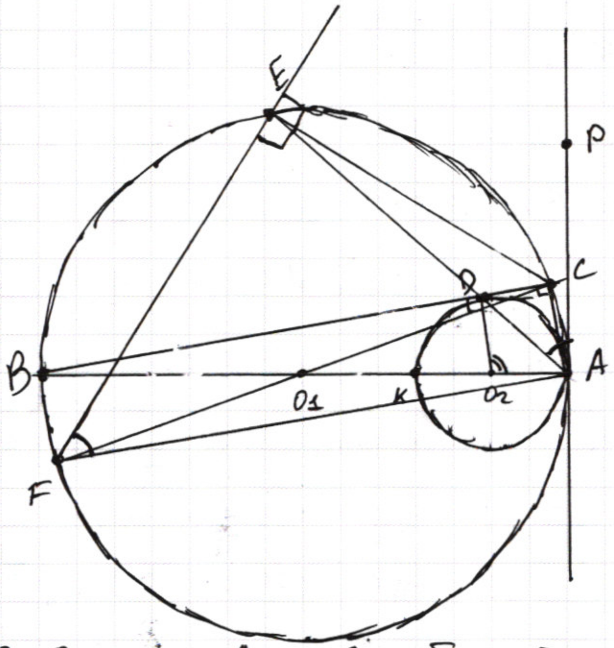
$CD=8;\ BD=17$:

R_Ω -?

r_ω -?

$\angle AFE$ -?

$S_{\triangle HEF}$ -?



Решение:

1. Рассмотрим $\triangle BDO_2$ и $\triangle BCA$: $\angle B$ - общий; $\angle BDO_2 = 90°$, т.к. BD - касается ω; $\angle BCA = 90°$, т.к. AB - диаметр окружности Ω =>

=> $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ => $\frac{BD}{BC}=\frac{BO_2}{AB}$ => $\frac{17}{25}=\frac{2R_\Omega-r_\omega}{2R_\Omega}$ => $\frac{r_\omega}{2R_\Omega}=\frac{8}{25}$

$r_\omega=\frac{16}{25}R_\Omega$ (1)

2. По св-ву секущей и касательной для окр. ω запишем:

$BD^2 = BK\cdot BA$ => $289 = 2(R_\Omega - r_\omega)\cdot 2R_\Omega$ (2). Подставим r_ω из (1) во (2)

=> $289 = 4\cdot R_\Omega\left(R_\Omega - \frac{16}{25}R_\Omega\right) = \frac{4R_\Omega^2\cdot 9}{25}$ => $R_\Omega^2=\frac{17^2\cdot 5^2}{3^2\cdot 2^2}$ =>

=> $\boxed{R_\Omega = \frac{17\cdot 5}{6} = \frac{85}{6}}$ => $\boxed{r_\omega = \frac{16}{25}\cdot\frac{85}{6} = \frac{17\cdot 8}{15} = \frac{136}{15}}$

(продолжение на другом листе)

Задача 4 (продолжение):

3. Проведём общую касательную к двум окружностям в точке A. Пусть P - точка на этой касательной. По св-ву хорды касательной получаем: $\angle PAD = \angle DO_2A \cdot \frac{1}{2}$ (O_2-центр окружности ω) и $\angle PAD = \angle PAE = \angle AFE \Rightarrow \angle DO_2A = 2\angle AFE$.

Рассмотрим $\triangle BDO_2$: $\angle BO_2D = 180° - \angle DO_2A = 180° - 2\angle AFE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DBO_2 = 180° - \angle BDO_2 - 180° + 2\angle AFE = 2\angle AFE - 90°$

$tg\angle DBO_2 = tg(2\angle AFE - 90°) = ctg(2\angle AFE) = \frac{r}{BD} = \frac{136}{15\cdot 17} = \frac{8}{15} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\angle AFE = \frac{1}{2}arcctg\left(\frac{8}{15}\right)}$

4. Поскольку $EF \perp CE \Rightarrow \angle FEC = 90° \Rightarrow CF$ - диаметр окружности $\Omega \Rightarrow \angle CBA = \angle CFA \Rightarrow \angle EFC = \angle AFE - \angle CFA = \angle AFE - 2\angle AFE + 90° = 90° - \angle AFE. \Rightarrow$ В $\triangle FEC$: $\angle ECF + \angle FEC + \angle EFC = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ECF = 180° - 90° - 90° + \angle AFE = \angle AFE \Rightarrow \angle EAF = \angle ECF = \angle AFE$ (опираются на одну хорду FE) $\Rightarrow \triangle AFE$ - р/б, т.к. $\angle EAF = \angle AFE$.

5. Зная $tg\, 2\alpha = \frac{15}{8}$, находим $\sin\alpha$; $\boxed{\text{где } \alpha = \angle AFE}$;

$\frac{tg\, 2\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{15}{8} \Rightarrow \quad 15 tg^2\alpha + 16 tg\,\alpha - 15 = 0$

$D = 34^2 \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{-16+34}{30} = \frac{18}{30} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{3}\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$; по т. синусов $\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R$

$\Rightarrow AE = 2R \cdot \sin\angle AFE \Rightarrow AE = 2 \cdot \frac{85}{6} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{85}{\sqrt{34}}$;

$S_{\triangle AFE} = \frac{AE \cdot FE}{2} \cdot \sin(180° - 2\angle AFE) = \frac{85^2}{2\cdot 34} \cdot \sin 2\angle AFE =$

$= \frac{85^2}{2\cdot 34} \cdot 2 \cdot \sin\angle AFE \cdot \cos\angle AFE = \frac{85^2}{34} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{15\cdot 5^2 \cdot 17^2}{4\cdot 17^2} = \frac{5^3\cdot 3}{4} =$

$= \frac{375}{4}$.

Ответ: $R_\Omega = \frac{85}{6}$; $r_\omega = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = \frac{1}{2}arcctg\left(\frac{8}{15}\right)$; $S_{\triangle AFE} = \frac{375}{4}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2:

Ограничение: $x-2y\geq 0$.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}; \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x(5y-1)+4y^2+2y-2=0; \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Решим первое ур-ние системы, как квадратное, относительно x: $x^2-x(5y-1)+4y^2+2y-2=0$;

$$D=25y^2-10y+1-16y^2-8y^2+8=9y^2-18y+9=9(y-1)^2$$

$$\left[\begin{aligned} x&=\frac{5y-1+3(y-1)}{2}=4y-2 \\ x&=\frac{5y-1-3(y-1)}{2}=y+1 \end{aligned}\right.$$

Подставим найденные значения x во второе ур-ние нашей системы:

1) $x=y+1 \Rightarrow (y-1)^2+9(y-1)^2=25 \Rightarrow (y-1)^2=\frac{5}{2} \Rightarrow \left[\begin{aligned} y&=1+\sqrt{\tfrac{5}{2}} \\ y&=1-\sqrt{\tfrac{5}{2}} \end{aligned}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x=2+\sqrt{\tfrac{5}{2}}; \\ y=1+\sqrt{\tfrac{5}{2}} \end{cases} \\ &\begin{cases} x=2-\sqrt{\tfrac{5}{2}}; \\ y=1-\sqrt{\tfrac{5}{2}}; \end{cases} \end{aligned}\right.$ Проверим пары решений на условие $x-2y\geq 0$:

1.1) $2+\sqrt{\tfrac{5}{2}}-2(1+\sqrt{\tfrac{5}{2}}) \vee 0$

$-\sqrt{\tfrac{5}{2}}<0$ – не подходит

1.2) $2-\sqrt{\tfrac{5}{2}}-2(1-\sqrt{\tfrac{5}{2}}) \vee 0$

$\sqrt{\tfrac{5}{2}}>0$ – подходит $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x=2-\sqrt{\tfrac{5}{2}}; \\ y=1-\sqrt{\tfrac{5}{2}}; \end{cases}$ (продолжение на др. листе)

Задача 2 (продолжение)

2)

$x = 4y - 2 \Rightarrow$ ~~тогда~~ $(4y-4)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$16(y-1)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$25(y-1)^2 = 25$

$(y-1)^2 = 1$

$\left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2 \\ x=6 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ x=-2 \end{cases} \end{array}\right.$ – проверим пары решений на условие $x-2y \geq 0$

2.1) $y=2;\ x=6 \Rightarrow 6-2\cdot 2>0$ – верно.

2.2) $y=0;\ x=-2 \Rightarrow -2-2\cdot 0<0$ – не подходит $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=6 \end{cases} \Rightarrow$ объединяя решения окончательно получаем, что:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y = 1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} y=2 \\ x=6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right);\ (6;2)$

Задача 1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \cos 2\beta = -\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$;

1) Если $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, то $\sin 4\beta = \frac{4}{5}$ и $\cos 4\beta = \frac{3}{5}$:

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha(\cos 4\beta+1) + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha\cdot\frac{8}{5} + \frac{4}{5}\cos 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ 8\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -4 \end{cases} \Rightarrow \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\alpha = 0}$

$\left(\text{т.к. } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 0\right)$;

(продолжение на другом листе)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Задача 1 (продолжение):~~

2) Если $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, то $\sin 4\beta = -\frac{4}{5}$; $\cos 4\beta = \frac{3}{5}$;

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \\ 3\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

1) Если $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha = -1 - 2\sin 2\alpha \\ \sin^2 2\alpha + (1+2\sin 2\alpha)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{4\sin^2 2\alpha} \; 5\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha + 1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 0 \\ \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 2\alpha = 0 \\ \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{4}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = 0 \\ \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{4}{3} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\operatorname{tg}\alpha = -4 + 4\operatorname{tg}^2\alpha$$

$$2\operatorname{tg}^2\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0$$

$$D = 9 + 16 = 25 = 5^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = \frac{3+5}{4} = 2 \\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

2) Если $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\Rightarrow \begin{cases} 2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \\ \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha = 2\sin 2\alpha + 1 \\ \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin^2 2\alpha + \cancel{\cos} (1 + 2\sin^2 2\alpha)^2 = 1 \Rightarrow 5\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha + 1 = 1 \; -$$

— это ур-ние аналогично тому, которое получается при $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 0 \\ \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 2\alpha = 0 \\ \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{4}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = 2 \\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Поскольку сказано, что значений не менее трёх, все полученные нами значения подходят (т.к. доказано что других быть не может) Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 0$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = 2$;

Задача 6.

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$, для всех $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

(a, b) – ?

$\Downarrow$

$3 + \frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

Пусть $f(x) = 3 + \frac{2}{4x+3}$ и $g(x) = -8x^2-30x-17$. Изобразим графики функций $f(x)$ и $g(x)$ на плоскости XOY.

1) $f(x) = 3 + \frac{2}{4x+3}$ - гипербола смещенная вверх на 3 единицы, смещенная влево на $\frac{3}{4}$ и растянута в 2 раза.

x	~~$\frac{5}{4}$~~	-1	$-\frac{11}{4}$
y	~~5~~	1	$\frac{11}{4}$

~~...~~ - построение будем вести ~~...~~ по малому кол-ву точек, ~~...~~ только для $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$, т.е. нас интересует часть графика $f(x)$, ~~при~~ $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

2) $g(x) = -8x^2-30x-17$ – парабола. Вершина параболы ~~$x_в$~~ $\Rightarrow C(x_в; y_в)$, где $x_в = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$; $y_в = -8 \cdot \frac{225}{64} + \frac{30 \cdot 15}{8} - 17 = \frac{89}{8}$

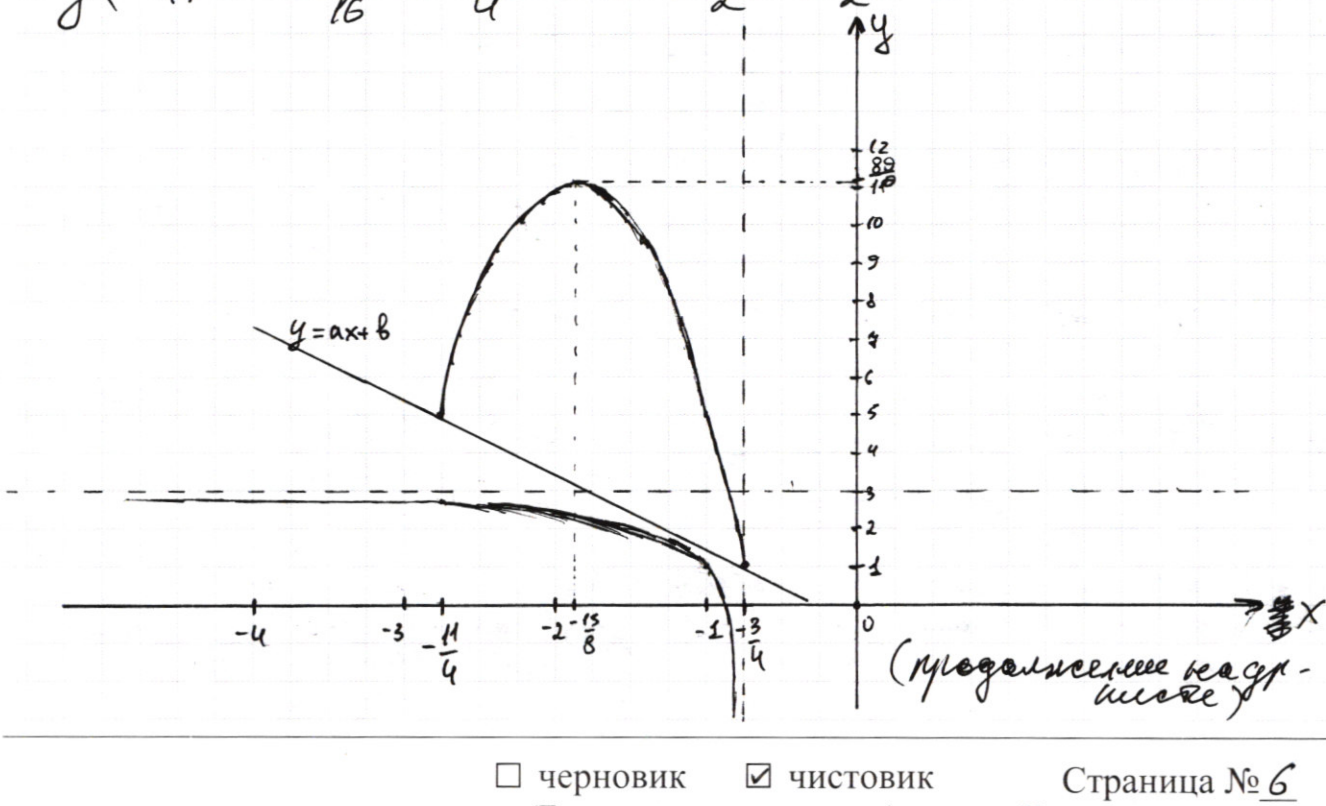
~~$\Rightarrow$ Нас ...~~

$\Rightarrow$ Нас интересует только часть графика при $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$\Rightarrow$ Найдем значение $g(x)$ в граничных точках.

$g\left(-\frac{11}{4}\right) = -8 \cdot \frac{121}{16} + \frac{30 \cdot 11}{4} - 17 = -\frac{121}{2} + \frac{15 \cdot 11}{2} - 17 = \frac{44}{2} - 17 = 5$

$g\left(-\frac{3}{4}\right) = -8 \cdot \frac{9}{16} + \frac{30 \cdot 3}{4} - 17 = -\frac{9}{2} + \frac{15 \cdot 3}{2} - 17 = \frac{36}{2} - 17 = 1$



(продолжение на др. листе)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6 (продолжение)

Рассмотрим прямую $y=ax+b$. Пусть она проходит через точки $(-\frac{11}{4};5)$ и $(-\frac{3}{4};1)$. Тогда получаем:

$$\begin{cases} 5=-\frac{11}{4}a+b \\ 1=-\frac{3}{4}+b \end{cases} \Rightarrow 4=-2a \Rightarrow a=-2,\ b=-\frac{1}{2} \Rightarrow y_1=-2x-\frac{1}{2}$$

Проверим, пересекает ли прямая $y=-2x-\frac{1}{2}$ график функции $f(x)$: $y_1=f(x) \Rightarrow -2x-\frac{1}{2}=3+\frac{2}{4x+3}$

$$-4x-1=6+\frac{4}{4x+3}$$

$$(4x+7)(4x+3)=-4 \Rightarrow 16x^2+40x+25=0$$

$$(4x+5)^2=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{4}$$ – точка касания графика функции $f(x)$ и $y_1=-2x-\frac{1}{2}$;

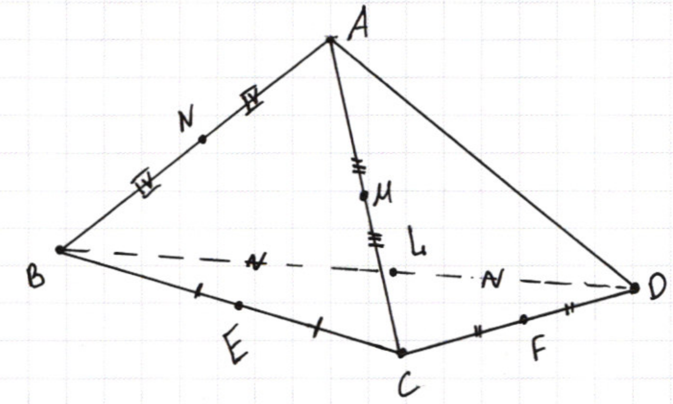
Пара чисел $a=-2$; $b=-\frac{1}{2}$ – подходят.

Докажем, что других пар (a,b) – нет. Действительно, если ~~будут~~ мы будем изменять значения параметров a ~~или~~ и b, то будем получать ситуации, в которых прямая пересекает один из двух графиков $f(x)$ или $g(x)$ на промежутке $x\in[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4})$. Так можно утверждать, поскольку мы нашли ~~случай~~ такую пару $(a;b)$, что ~~$ax+b \geq f(x)$ и $ax+b\leq g(x)$~~ $ax+b$ касается $f(x)$ на промежутке $x\in[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4})$ и $ax+b\leq g(x)$ на этом же промежутке, т.е. при изменении параметра a, будет пересечение с графиком $g(x)$ или $f(x)$ при изменении параметра b будет пересечение с $g(x)$ или $f(x)$.

Ответ: $\begin{cases} a=-2; \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Задача 7.

Дано:
$AB = 1$;
$BD = 2$;
$CD = 3$;
$BC - ?$



Решение:

1. Рассмотрим $\triangle ABC$: N – середина AB, M – середина AC
$\Rightarrow$ NM – средняя линия в $\triangle ABC$ $\Rightarrow$ $NM \parallel BC$.

Поскольку сфера содержит середины всех ребер пирамиды (кроме AD) – по условию, то получается, что т.к. $BC \parallel NM$, то ~~она~~ BC должна пересекать сферу хотя-бы в 2-х точках или касаться её. Но у нас всему тому, что средина BC принадлежит сфере, мы получаем, что BC – касательная к сфере в точке E. (E – середина BC)
$\Rightarrow$ Рассмотрим сечение сферы плоскостью ANE. Это окружность
$\Rightarrow$ по теореме о касательной и секущей получаем, что

$$BE^2 = BN \cdot BA \Rightarrow BE = \sqrt{BN \cdot BA} \Rightarrow BC = 2\sqrt{BN \cdot BA} = 2\sqrt{2};$$

Ответ: $BC = 2\sqrt{2}$;

Задача 3:

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} + 18x$$

ОДЗ:
$x^2+18x>0$
$x \in (-\infty;-18) \cup (0;+\infty)$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + (x^2+18x) \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$$ – модуль можно убрать т.к. на ОДЗ: $x^2+18x>0$.

Пусть $x^2+18 = t$, тогда нер-во примет вид:

$$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$$ (продолжение на другом листе).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3 (продолжение)

$5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq 13^{\log_{12} t}$.

Заметим, что левая часть нер-ва ~~меньше~~ больше или равна ~~...~~ правой при $\log_{12} t \leq 2$. ~~т.к. функция~~

Пример: ~~...~~ $\log_{12} t = 1 \Rightarrow 5 + 12 > 13$ - верно.

Поскольку функция $f(t) = 5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t}$ и $g(t) = 13^{\log_{12} t}$ монотонно возрастающие, они имеют максимум одну точку пересечения. ~~Эта точка при $t=144$~~ Подбором получаем, что точка пересечения при $t = 144$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ При $t \leq 144$: $f(t) \geq g(t)$, а при $t > 144$: $f(t) < g(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~...~~ Делая обратную замену получаем:

$x^2 + 8x \leq 144$.

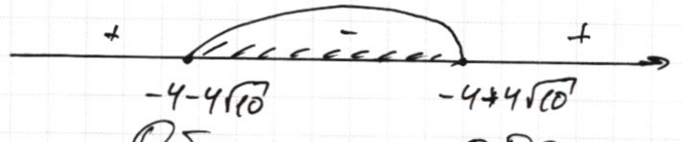
Тогда исходное нер-во эквивалентно следующему:

$x^2 + 8x \leq 144$

$x^2 + 8x - 144 \leq 0$

$D = 64 + 144 \cdot 4 = 640 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-8 + 8\sqrt{10}}{2} = -4 + 4\sqrt{10} \\ x = \frac{-8 - 8\sqrt{10}}{2} = -4 - 4\sqrt{10}; \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по методу интервалов:



$\Rightarrow x \in [-4 - 4\sqrt{10}; -4 + 4\sqrt{10}]$

~~$x \in [-4 - 4\sqrt{10}; -8) \cup (0; -4 + 4\sqrt{10}]$~~

Объединяя с ОДЗ получаем: ~~$x \in (0; 4\sqrt{10} - 4]$~~.

$x \in (6; 4\sqrt{10} - 4]$

Ответ: ~~$x \in (0; 4\sqrt{10} - 4]$~~ ; ~~$x \in [-4...$~~ ~~$x \in [-4 + \sqrt{10}$~~ $x \in (0; 4\sqrt{10} - 4]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6: $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$. $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$:

$3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$: $D = 900-4\cdot(-17)\cdot(-8) =$

$= 900 - 32\cdot 17 = \cancel{456}$

$32 \cdot 17 = 224 + 32\ldots = 544$ 320 $32\cdot 7 = 224$

$900 - 544 = 356$

$x_B = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$-8\cdot\left(\frac{225}{64}\right)+\frac{15\cdot 30}{8} - 17 = -$

$17 \cdot 8 = 136$ $225 - 136 = \boxed{89}$

$= \frac{450}{8} - \frac{225}{8} - 17 = \frac{225}{8} - 17 = \frac{89}{8} = 11\frac{1}{8}$

$3+\frac{2}{4x+3} = y$

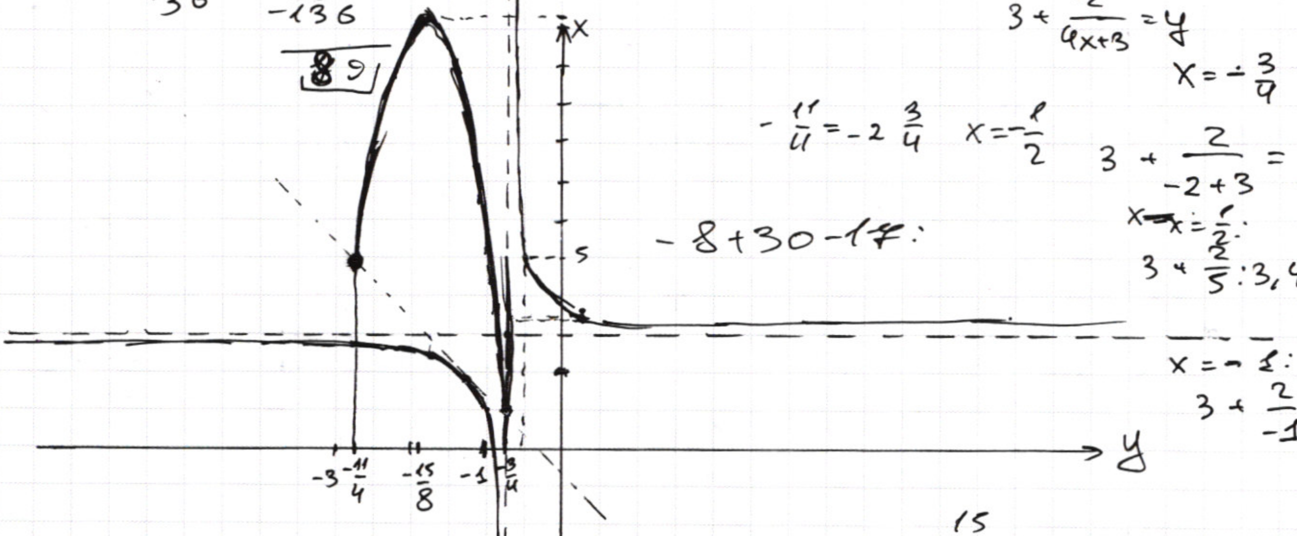
$x = -\frac{3}{4}$

$-\frac{11}{4} = -2\frac{3}{4}$ $x = -\frac{1}{2}$ $3+\frac{2}{-2+3} = 5$:

$-8+30-17$:

$x = \frac{1}{2}$: $3+\frac{2}{5}$: $3,4$:

$x = -1$: $3+\frac{2}{-1} = 1$:



15

$-1\frac{7}{8}$

$5 = a\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)+b$

$1 = -\frac{3}{4}a + b$

$4 = -\frac{11}{4}a + \frac{3}{4}a = -2a \Rightarrow a = -2$

$x = -\frac{11}{4}$

$-\frac{3}{4}$

$-8\cdot\frac{9}{16} + \frac{30\cdot 3}{4} - 17$:

$-\frac{9}{2} + \frac{15\cdot 3}{2} - 17$:

$\frac{45}{2} - \frac{9}{2} = \frac{36}{2} - 17 = 1$

$1 = +\frac{3}{2} + b$

$b = -\frac{1}{2}$

$-8\cdot\frac{121}{16} + 30\cdot\frac{11}{4} - 17$

$-\frac{121}{2} + \frac{15\cdot 11}{2} - 17$:

$\frac{4\cdot 11}{2} - 17$ $\frac{44-34}{2} = 5$

$16x^2+28x+12x+21 = -4$

$16x^2+40x+25 = 0$

$4x+5$

$x = -\frac{5}{4}$

$y = -2x - \frac{1}{2}$:

$-2x - \frac{1}{2} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$-4x-7 = \frac{4}{(4x+3)}$

$\frac{-4x-1}{2} = 3+\frac{2}{4x+3} \Rightarrow -4x-1 = 6 + \frac{4}{4x+3}$ $(4x+3)(4x+7) = -4$:

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - \mathbf{18x};$$ $\boxed{x^2+18x \geq 0}$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$$

$$x^{\log_3 x} = 3^{\log_3^2 x}$$

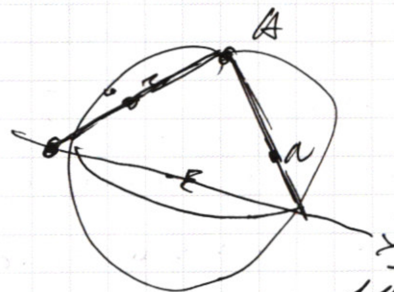
$$\underbrace{12^{\log_{12}(x^2+18x)\cdot\log_{12}5} + 12^{\log_{12}(x^2+18x)}} \geq 12^{\log_{12}(x^2+18x)\cdot\log_{12}13}$$

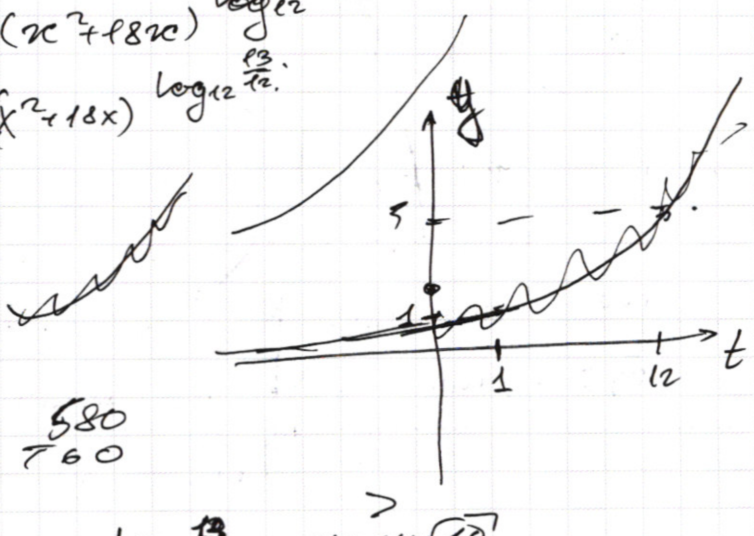
$$\frac{12^{\log_{12}(x^2+18x)}(\log_{12}5+1)}{2} \geq$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$$

$$(x^2+18x)^{\log_{12}5} + (x^2+18x) \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}:$$

$$(x^2+18x)\left((x^2+18)^{\log_{12}\frac{5}{12}}+1\right) \geq (x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{12}}:$$





$$\begin{array}{r} 44 \\ -4 \\ \hline 146 \end{array} \quad \begin{array}{r} 580 \\ -160 \end{array}$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} \qquad 14 \vee 4\sqrt{10}$$

$$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}; \qquad \frac{1}{2} \qquad 5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}:$$

$$5^{\log_{12}t} \quad \log_{12}t \geq \log_5 t^{\log_{12}13} + t \quad \left(t^{\log_{12}13-1}+1\right) \quad 5^{\log_{12}t}+t \geq 13^{\log_{12}t}$$

$$\log_{12}t \geq \log_5 t + \log_5 \qquad 5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}:$$

$$125 + 144\cdot 12 \vee 169\cdot 13:$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 4 \\ \hline 576 \\ +64 \\ \hline 640 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 144 \\ \times 4 \end{array} \quad 24 \qquad \begin{array}{r} 144 \\ \times 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \\ +125 \\ \hline 1853 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 169 \\ \times 13 \\ \hline 507 \\ 169 \\ \hline 2097 \end{array}$$

$$-4-4\sqrt{10} \vee -18$$

$$14 \vee 4\sqrt{10} \quad 169 \geq 160. \qquad 169 > 160.$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

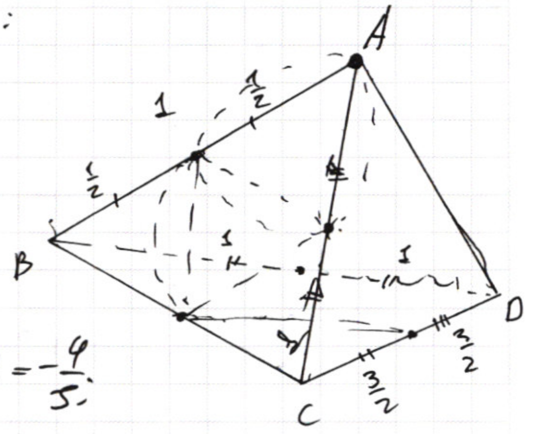
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$:

$(x^2+18x)^{\log_{12}5}+(x^2+18x)^1 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$\cancel{(x^2+18x)}(x^2+18x)^{\log_{12}5-1}+1 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13-1}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}\frac{5}{12}}+1$



№1. $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$.

$\operatorname{tg}\alpha-?$:

cos

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta=-\frac{4}{5}$

$3-\frac{2}{8}=3-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$ $\cos2\beta=-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \boxed{\sin2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}}$

1) $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+\cos2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin2\alpha\cdot2+\cos2\alpha=-1$

$\sin^22\alpha+\cos^22\alpha+2\sin2\alpha+\cos\alpha=0$.

$D=4-4\cos^22\alpha-4\cos\alpha=$ $\quad 2\cdot\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}$

$\begin{cases}2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1\\ \sin2\alpha\cdot\frac{3}{5}+\cos2\alpha\cdot\frac{4}{5}=-\frac{4}{5}.\end{cases}$

$\begin{cases}3\sin2\alpha+4\cos2\alpha=-4\\ 2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1\cdot4\end{cases} \Rightarrow \sin2\alpha=0 \Rightarrow \operatorname{tg}2\alpha=0$ ✓

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\alpha=0}$

2) $\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1$

$-1+\frac{8}{5}=\frac{3}{5}=\cos2\alpha$

$\begin{array}{r}17\\ \times8\\ \hline 136\end{array}$ $\quad \begin{array}{r}225\\ -136\\ \hline \boxed{89}\end{array}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

$(x^2+18x)+5^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$ $\quad \frac{225}{8}-17\cdot8$

$\frac{30\cdot15}{8}-\frac{225}{8}=\frac{15\cdot15}{8}-17$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} = (x^2+18x)^{\log_{12}5} + (x^2+18x) \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$(x^2+18x)\left((x^2+18x)^{\log_{12}5} - 1\right) \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + 12^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{8}{15}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{15}{8}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{15}{8}$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{15}{8}$

$16x = 15 - 15x^2$

$15x^2 + 16x - 15 = 0$

$D = 256 + \ldots = 34^2$

$x = \frac{-16+34}{30} = \frac{18}{30} = \frac{9}{15} = \ldots$

$\sin\alpha = \frac{9}{15}\cos\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

R, r — ?

$\angle AFE$ — ?

$S_{\triangle AEF}$ — ?

$CD = 8$; $BD = 17$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}\cos\alpha$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\frac{25}{9}} = \frac{9}{34}$

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$

CF-диаметр.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(1+\frac{9}{25}\right)\cos^2\alpha = 1$

$R \to \angle AFE$:

$\angle DBO_2 = 180° - 90° - 180° + 2\alpha$

$\angle DBO_2 = 2\alpha - 90°$

$\alpha - 2\alpha + 90° = 90° - \alpha$

$\operatorname{tg}(2\alpha - 90°) = \frac{r}{17}$

$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{r}{17}$

$\begin{cases} (2R-2r)\cdot 2R = 289 \\ \frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25} \end{cases}$

$1 - \frac{r}{2R} = \frac{17}{25}$

$\frac{8}{25} = \frac{r}{2R}$

$2R = \frac{25}{8}r$

$\left(\frac{25}{8}r - 2r\right)\cdot\frac{25}{8}r = 289$

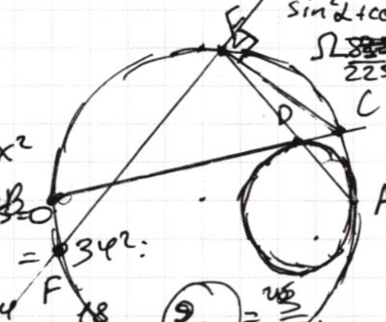
$\frac{9}{8}r\cdot\frac{25}{8}r = 289$

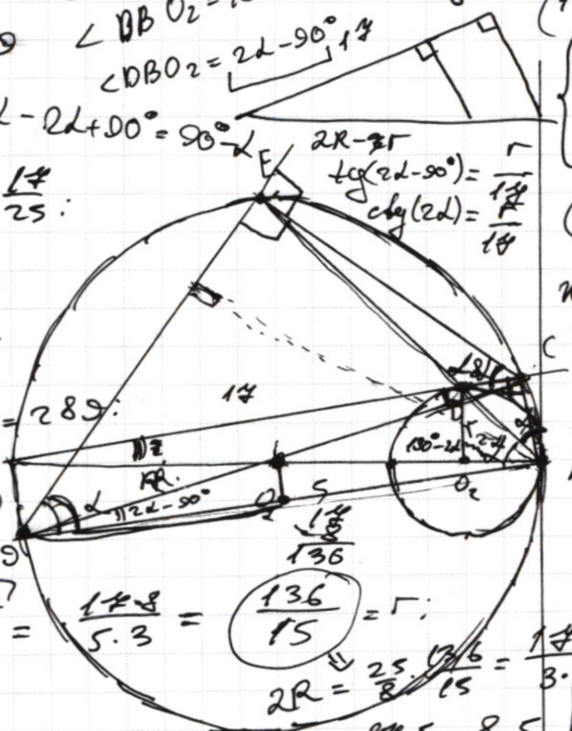
$r^2\cdot\frac{25\cdot 9}{64} = 289$

$r = \sqrt{\frac{17^2\cdot 8^2}{5^2\cdot 3^2}} = \frac{17\cdot 8}{5\cdot 3} = \frac{136}{15} = r$

$2R = \frac{25}{8}\cdot\frac{136}{15} = \frac{17\cdot 5}{3}$

$R = \frac{17\cdot 5}{6} = \frac{85}{6}$





$X - 2y \geq 0$

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 16 + 9 = 25$

$x^2 - 4x + 9y^2 - 18y - 12 = 0$

$D = 16 - 36y^2 + 18\cdot 4y + 48 = -36y^2 + 72y + 64 =$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$

$D = (5y-1)^2 - 16y^2 - 8y + 8 =$

$= 25y^2 - 10y + 1 - 16y^2 - 8y + 8 =$

$= 9y^2 - 18y + 9 =$

$= 9(y^2 - 2y + 1) = 9(y-1)^2$

$\left[\begin{aligned} x &= \frac{5y-1+3(y-1)}{2} = \frac{8y-4}{2} = 4y-2 \\ x &= \frac{5y-1-3y+3}{2} = \frac{2y+2}{2} = y+1 \end{aligned}\right.$

I: $y+1 \Rightarrow$

$y^2 + 2y + 1 + 9y^2 - 4y - 4 - 18y = 12$

$10y^2 - 20y = 15$

$2y^2 - 4y - 3 = 0$

$D = 16 + 8\cdot 3 = 40 \Rightarrow y = \frac{4+2\sqrt{10}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}$, $\frac{3\sqrt{10}}{2} - 2 \geq 0$

$y = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$

$x = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$

$\frac{140}{6}$

$\frac{25}{6}$, $\frac{25}{150}$

1156, $36\cdot 36 = 1296$, $4\cdot 17^2$, $2\cdot 17 = 34$, $289\cdot 4 = 1156$, $1156 : 2 = 578$, $578 : 2 = 289$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)