# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2},\\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина $A$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $AD$. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра $BC$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть $2\alpha; 2\beta \in [0; 2\pi)$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\frac{4\beta}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5} = \sin(2\alpha+2\beta)$ (по усл.)

$\cancel{2}\ -\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

~~Тогда 2β ∈ [−π/2; тогда тогда 2β ∈ [0; π/2)~~

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

~~$\sin 2\alpha + \cos 2\alpha =$~~

$4\sin\alpha\cos\alpha + \cancel{1-2\sin^2\alpha = -1}$

$2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$2\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\cos\alpha(\cos\alpha + 2\sin\alpha) = 0$

т.к. $tg\,\alpha$ существует, то $\cos\alpha \neq 0$

$\cos\alpha = -2\sin\alpha$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = 0$ или

$\sin\alpha = -2\cos\alpha \Rightarrow tg\,\alpha = -2$

Ответ: $-\frac{1}{2}; -2; 0$

№2

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$ $\qquad$ $x-2y>0$ !

$(x-2y)^2=xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+x+2y-2+4y^2=0$

$x^2-(5y-1)x+4y^2+2y-2=0$

$D=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=9(y-1)^2$

$x=\dfrac{5y-1-3y+3}{2}=\dfrac{2y+2}{2}=y+1$

$x=\dfrac{5y-1+3y-3}{2}=\dfrac{8y-4}{2}=4y-2$

1. $x^2+9y^2-4x-18y=12$

$y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y=12$

$10y^2-20y-15=0$

См продолжение на странице 8

~~$D=484+600=1084=271\cdot4$~~

~~$y=\dfrac{22-2\sqrt{271}}{20}=\dfrac{11-\sqrt{271}}{10}$ или $y=\dfrac{11+\sqrt{271}}{10}$~~

~~$x=\dfrac{21-\sqrt{271}}{10}$ или $x=\dfrac{21+\sqrt{271}}{10}$~~

2. $16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y=12$

$25y^2-50y=0$

$y=0$ или $y=2$ тогда $x=-2$ или $x=6$

~~Проверка ($x-2y>0$)~~ 1. $x=y+1\Rightarrow -y+1>0$ $\quad -\dfrac{11+\sqrt{271}}{10}+1<0$ не подходит

$-\dfrac{11-\sqrt{271}}{10}+1=\dfrac{\sqrt{271}-1}{10}>0$ подходит

Проверка

2. $y=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow x-2y=-2-0<0$ не подходит

3. $y=2\Rightarrow x=6\Rightarrow x-2y=6-4>0$ подходит

~~Ответ: $\left(\dfrac{21-\sqrt{271}}{10};\dfrac{11-\sqrt{271}}{10}\right);(6;2)$~~

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

Пусть $x^2+18x=a$ т.к. $\log_{12}(x^2+18x)$ есть, то $x^2+18x>0 \Rightarrow a>0$

$$5^{\log_{12}a}+a \geq |a|^{\log_{12}13}=a^{\log_{12}13} \text{ (т.к. } a\geq 0)$$

$$5^{\log_{12}a}+a \geq a^{\log_{12}13}$$

$$12^{\log_{12}5\cdot\log_{12}a} \geq a^{\log_{12}13-1}=a^{\log_{12}13-\log_{12}12}$$

$$\cancel{\log}\ a^{\log_{12}5} \geq a^{\log_{12}\frac{13}{12}}$$

$$\log_{12}5 > \log_{12}\frac{13}{12} \Rightarrow a>1 \text{ (т.к. } 5>\tfrac{13}{12} \text{ и } 12>1)$$

$$x^2+18x>1>0$$

$$x^2+18x-1>0$$

$$D=324+4=328=82\cdot 4=41\cdot 8$$

$$x\in\left(-\infty;\frac{-18-\sqrt{41\cdot 8}}{2}\right)\cup\left(\frac{-18+\sqrt{41\cdot 8}}{2};+\infty\right)$$

Ответ: $\left(-\infty;\frac{-9-\sqrt{82}}{2}\right)\cup\left(\frac{-9+\sqrt{82}}{2};+\infty\right)$

# №5

$f(2) = f(1) + f(2) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$

тогда $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; и т.д.

$f(1)=0$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$, если $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, то

$f(x) < f(y)$

Выпишем какие числа какие значения дают

| Значение | числа | кол-во чисел |
|---|---|---|
| 0 | 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 5, ~~7~~ 16; 18; 24 | 10 |
| 1 | 5; 7; 10; 14; 15; 20; 21 | 7 |
| 2 | 11; 22 | 2 |
| 3 | 13 | 1 |
| 4 | 17; 19 | 2 |
| 5 | 23 | 1 |

Тогда ответ $10 \cdot (7+2+1+2+1) + 7 \cdot (2+1+2+1) +$

$+ 2 \cdot (1+2+1) + 1 \cdot (2+1) + 2 \cdot 1 =$

$= 130 + 42 + 8 + 3 + 2 = 130 + 50 + 5 = 185$

Ответ: 185

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

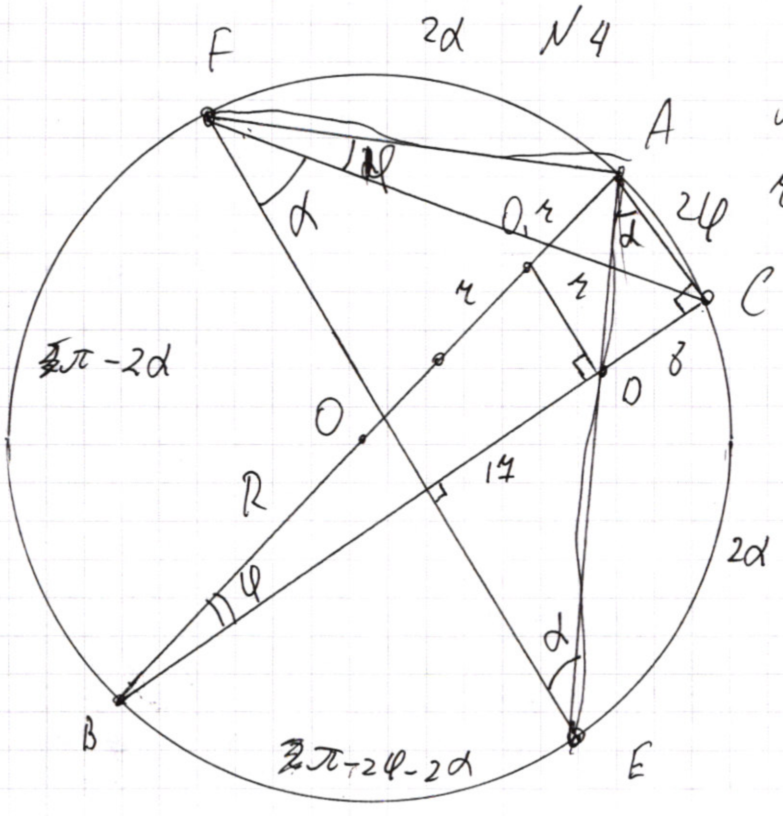
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4




Пусть $\angle EAC = \alpha$; $\angle CBA = \varphi$

Пусть радиус маленькой окр. $r$, а большой $R$

~~Тогда~~

$\angle ACB = 90^\circ$ (т.к. AB – диаметр)

$\angle BDO_1 = 90^\circ$ (т.к. D – т. касания)

Тогда $\triangle BO_1D \sim BAC$

$$\frac{2R}{25} = \frac{2R - r}{17}$$

$$2R \cdot 17 = 25 \cdot 2R - 25r$$

$$25r = 8 \cdot 2R$$

$$2R = \frac{25r}{8}$$

Оч-но $AC = \frac{25}{17} r$

По т. Пифагора для $\triangle BAC$:

$$4R^2 = \left(\frac{25}{17}\right)^2 r^2 + 25^2$$

$$\left(\frac{25r}{8}\right)^2 = \left(\frac{25}{17}\right)^2 r^2 + 25^2$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^2 r^2 = \left(\frac{1}{17}\right)^2 r^2 + 1$$

$$(289 - 64) r^2 = 17^2 \cdot 8^2$$

$$245 r^2 = 17^2 \cdot 8^2$$

$$r^2 = \frac{17^2 \cdot 8^2}{7^2 \cdot 5} = \frac{17^2 \cdot 8^2 \cdot 5}{7^2 \cdot 5^2}$$

$$r = \frac{17 \cdot 8\sqrt{5}}{35} \Rightarrow R = \frac{5 \cdot 17\sqrt{5}}{7 \cdot 2}$$

т.к. $(AC) \perp (BC)$ и $(EF) \perp (BC)$, то $(AC) \parallel (EF) \Rightarrow \angle FEA = \alpha$

$\angle EFC = \alpha$ и $\angle CFA = \varphi$ (т.к. опир. на один. дуги)

$\cos\varphi = \frac{25}{2R} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{25}{2R}\right) =$

$= \arccos\left(\frac{25 \cdot 7}{5 \cdot 17 \cdot \sqrt{5}}\right) =$

$= \arccos\left(\frac{\sqrt{5} \cdot 7}{17}\right)$

$\operatorname{tg}\alpha = \left(\frac{8 \cdot 17}{25 r}\right) = \left(\frac{17 \cdot 8 \cdot 35}{25 \cdot 17 \cdot 8\sqrt{5}}\right) =$

$= \left(\frac{7\sqrt{5}}{25}\right) \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{7\sqrt{5}}{25}\right)$

$\angle EFA = \arccos\left(\frac{7\sqrt{5}}{17}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{7\sqrt{5}}{25}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

~~Начнём считать дуги~~ ~~BF = 180 - 2~~ тогда $\breve{FA} = 2\alpha$; $\breve{EC} = 2\alpha$;
$\breve{AC} = 2\varphi$ тогда $\angle EBA = \frac{\varphi}{\alpha}$

~~Тогда $\breve{BF} = 2\pi - 2\alpha$ и $\breve{BE} =$~~

$\breve{FBE} = 2\pi - 2\alpha - 2\varphi - 2\alpha = 2\pi - 4\alpha - 2\varphi$

$\angle FAE = \pi - 2\alpha - \varphi$

$S_{FAE} = \frac{1}{2} FA \cdot AE \sin(\pi - 2\alpha - \varphi) = \frac{1}{2} FA \cdot AE \sin(2\alpha + \varphi) =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \sin\alpha \cdot 2R \sin(\varphi + \alpha) \cdot \sin(2\alpha + \varphi) = 2R \sin\alpha \sin(\varphi + \alpha) \sin(2\alpha + \varphi)$

Ответ: $R = \frac{5 \cdot 14\sqrt{5}}{14}$

$r = \frac{17 \cdot 8\sqrt{5}}{35}$

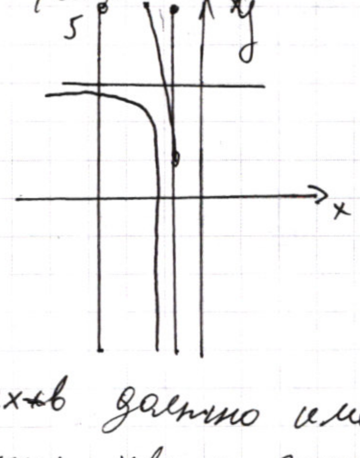
Угол: $\arccos\left(\frac{7\sqrt{5}}{17}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{7\sqrt{5}}{25}\right)$

Площадь: $2R \sin\alpha \sin(\varphi + \alpha) \sin(2\alpha + \varphi)$, где $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{7\sqrt{5}}{25}\right)$
$\varphi = \arccos\left(\frac{7\sqrt{5}}{14}\right)$

№6

$\frac{12x + 11}{4x + 3} = 3 + \frac{2}{4x + 3}$ тогда у гиперболы вертикальная асимптота $x = -\frac{3}{4}$ и вт. $y = -\frac{11}{4}$
$y = 2{,}75$

У параболы в точках $-\frac{11}{4}$; $-\frac{3}{4}$ принимает значение соответственно 5 и 1




Тогда на это неравенство достаточным условием будет

$5 \geq -\frac{11}{4} a + b \geq 2{,}75$

$-\frac{3}{4} a + b \leq 1$ и ур-ие $\frac{12x + 11}{4x + 3} = ax + b$ должно иметь не более 1 корня, т.е. после преобразовани ~~ква соответствующее~~ квадратное должно иметь дискриминант меньший или равный нулю. А дальше я не успеваю написать

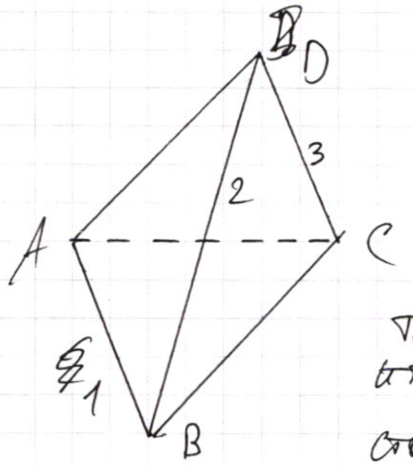
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

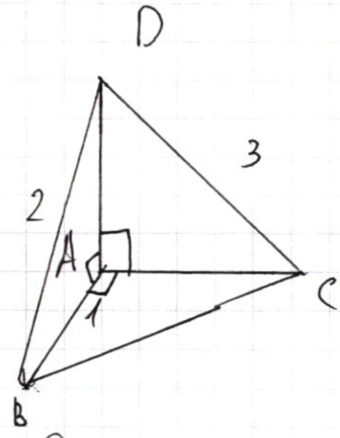



№7

Ответ: $BC=\sqrt{7}$; $R=\frac{\sqrt{10}}{2}$

Рассмотрим сечение этой сферы пл-тью ABC – это окр Эйлера т.к. на ней лежат середины сторон. Тогда на ней лежат еще осн. высот, то сторону AC оно должно второй раз пересекать в точке основания высоты => $(AB)\perp(AC)$ => $\angle BAC=90°$

ан-но для пл-тей ADB и ADC, тогда $\angle BAD=\angle CAD=90°$




По т. Пифагора для $\triangle BAD$:

$AD=\sqrt{3}$

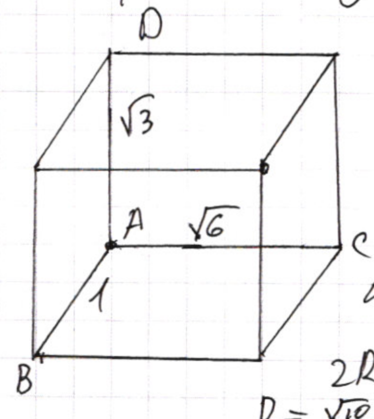
По т. Пифагора для $\triangle ADC$:

$AC=\sqrt{6}$

По т. Пифагора для $\triangle BAC$:

$BC=\sqrt{7}$

Достроим эту пирамиду до прямоугольного парал-ида




Сфера описанная около ABDC будет совпадать со сферой описаной около этого прямоугольного пар-ида; Пусть диагональ пар-ида равна d, тогда как известно

$2R=d=\sqrt{AB^2+AC^2+AD^2}=\sqrt{1+3+6}=\sqrt{10}$

$R=\frac{\sqrt{10}}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 7

(Нумеровать только чистовики)

№2

Продолжение

$10y^2 - 20y - 15 = 0$

$2y^2 - 4y - \cancel{1,5}\,3 = 0$

$\cancel{y^2 - 2y - 1,5 = 0}$

$D = 16 + 4\cdot 2\cdot 3 = \cancel{\ldots}\ 16 + 24 = 40$

$y = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$

Проверка $(x - 2y > 0)$

$x = y + 1 \Rightarrow x - 2y = -y + 1 > 0$

1. $y = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$ $\quad -y + 1 = -\frac{2+\sqrt{10}}{2} + 1 = \frac{-\sqrt{10}}{2} < 0$

2. $y = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$; $\cancel{y>}$ $-y + 1 = -\frac{2-\sqrt{10}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{10}}{2} > 0$

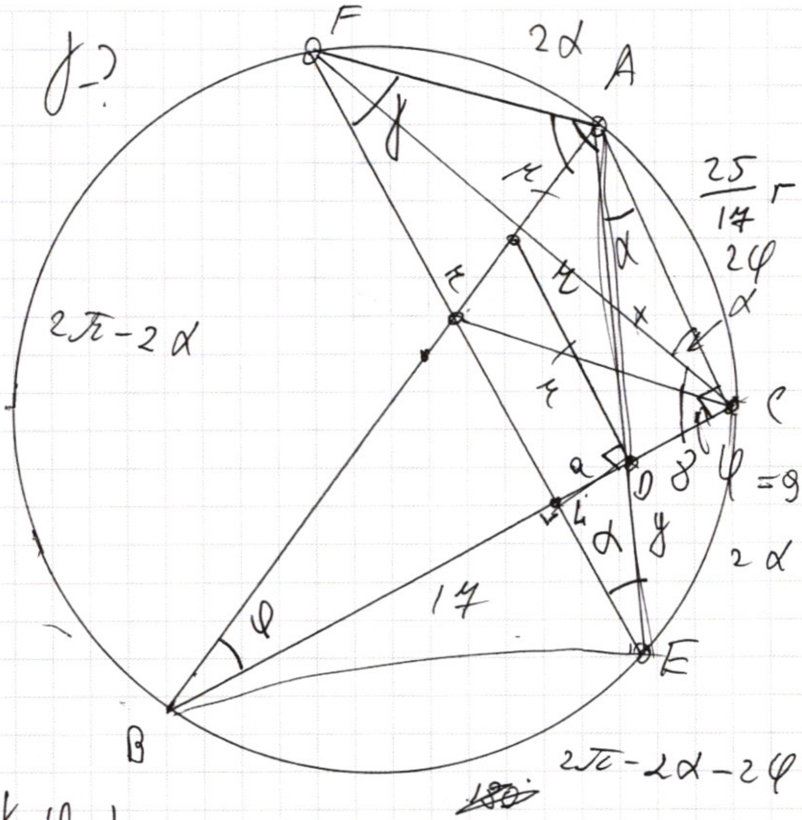
Тогда

$y = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$ и $x = \frac{4-\sqrt{10}}{2}$

Ответ: $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}; \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right); (6;2)$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\gamma - ?$




$\varphi = 90° - \alpha$

$\cancel{xy = 8 \cdot 17}$

$x = \frac{8 \cdot 17}{y}$

$\frac{x}{8} = \frac{y}{a}$

$\frac{17}{y} = \frac{y}{a}$

$\gamma = \varphi + \alpha$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{8 \cdot 17}{25 \cdot r}$ $\cancel{4R^2}$

$\varphi =$

$\cancel{4R^2 - 4Rr = 17^2 + 8^2}$

$\frac{2R}{25} = \frac{2R - r}{17}$

$17 \cdot 2R = 2R \cdot 25 - 25r$

$25r = 8 \cdot 2R$

$2R = \frac{25r}{8}$

$4R^2 = \left(\frac{25}{8} r\right)^2 = 25^2 + \left(\frac{25}{17}\right)^2 r^2$

$\left(\frac{1}{8} r\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{17} r\right)^2$

$\frac{1}{64} r^2 = 1 + \frac{1}{289} r^2$

$289 - 64 r^2 = (17 \cdot 8)^2$

$245 r^2 = 17 \cdot 8^2$

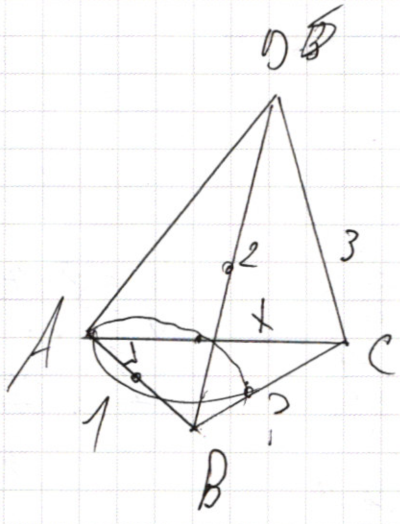
$\cancel{25 \cdot 9 r^2}$

$49 \cdot 5 r^2$

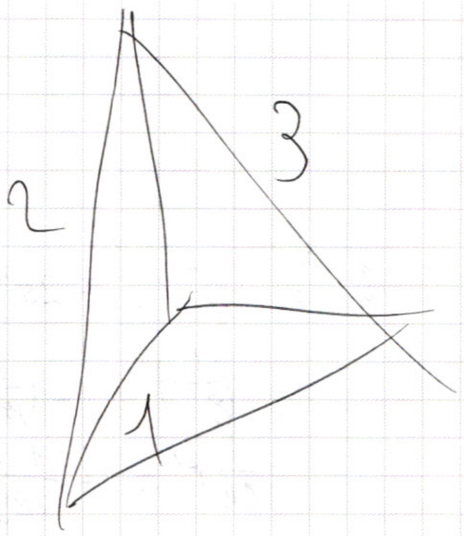
$r = \left(\frac{17 \cdot 8}{7 \cdot \sqrt{5}}\right)^2$

$R = \frac{5 \cdot 17\sqrt{5}}{14}$

$r = \frac{17 \cdot 8\sqrt{5}}{35}$ Угл $\arccos\left(\frac{7\sqrt{5}}{17}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{7\sqrt{5}}{25}\right)$



D
A
C
B
1
2
3
x
?

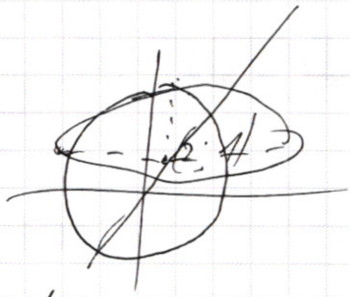



2
3
1

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$(x-2)^2+9(y^2-2y+1)=12+4+9$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$



$7;1$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2=x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)$

$x^2+x-5xy+4y^2+2y-2=0 \mid :y$

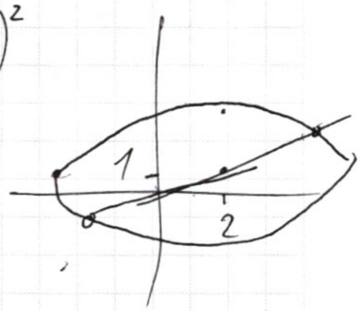
$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x^2+x-5xy+\cancel{2y^2}+\cancel{2y}-3 \quad (y+1)^2+3y^2-3=0$

$2y<x \qquad (x-2y)^2$

$6(x-2y)^2=6(x-2)(y-1)$



$x \in$

$(x-2)^2+9(y-1)^2+6(x-2)(y-1)=25+6(x-2y)^2$

$(x-2+3(y-1))^2=25+6(x-2y)^2$

$x-2y>0$

$(x+3y-5)^2=25+6(x-2y)^2$

$(x+3y)(x+3y-10)=6(x-2y)^2$

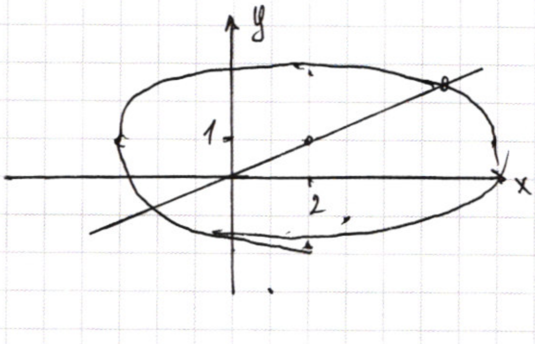
$t \qquad t$

$t(t-10)=6a$

$x+3y<0 \qquad x<-3y$

$x+3y>10$

$x>10-3y$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cos \cancel{2}4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin \cancel{2\alpha}$

$\cancel{\cos 2x = \cos}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cancel{\sin\pi + \sin 0 = 2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cancel{2} \cancel{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos^2 2\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \overset{\sin}{\cancel{\cos}} 2\beta = -\frac{3}{5}$

$\sin 2\beta = \frac{3}{5}$

$\cancel{\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} = 2\sin\frac{\pi}{3}}$

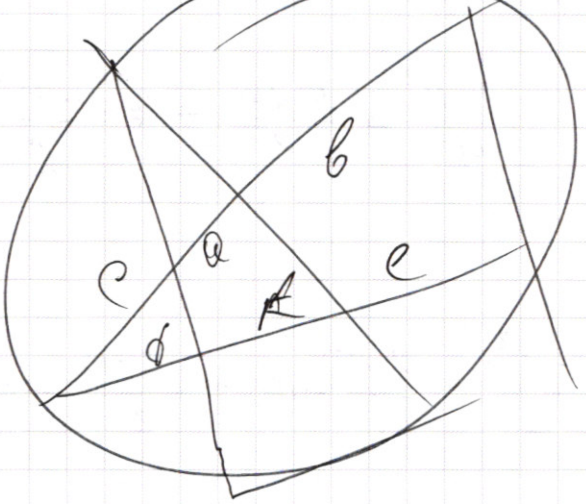
$\cancel{\sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}}$ $\sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \sin 2$

☑ черновик ☐ чистовик

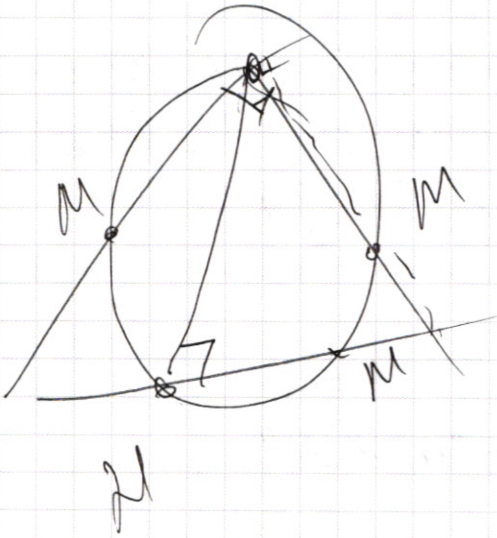
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)




$(a-b)\cdot t = (d+k)e$




☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

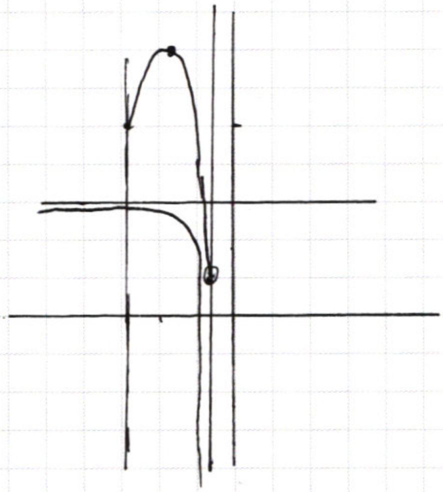
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-8\cdot\left(\frac{11}{4}\right)^2+30\cdot\frac{11}{4}-17=-\frac{8\cdot 11^2}{4^2}+\frac{11\cdot 15}{2}-17=\frac{-11^2}{2}+\frac{11\cdot 15}{2}-17=$$

$$=\frac{11\cdot 4}{2}-17=22-17=5$$

$$-8\left(-\frac{3}{4}\right)^2+30\cdot\frac{3}{4}-17=\frac{-3^2}{2}+\frac{3\cdot 15}{2}-17=\frac{3\cdot 12}{2}-17=18-17=1$$



$$\frac{12x+11}{4x+3}=ax+b$$

$$12x+11=4ax^2+(4b+3a)x+3b$$

$\cancel{ax+b\le 5}$ $\quad 4ax^2+(4b+3a-12)x+3b-11=0$

$2{,}75\le -\frac{11}{4}a+b\le 5 \qquad D=(4b+3a-12)^2-4\cdot 4a(3b-11)$

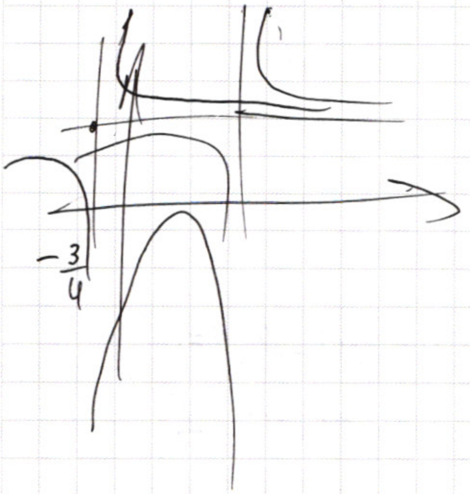
$$-\frac{3}{4}a+b\le 1$$

$$11\le -11a+b\le 20$$

$$-3a+b\le 4$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9}{4x+3} + \frac{2}{4x+3} =$$

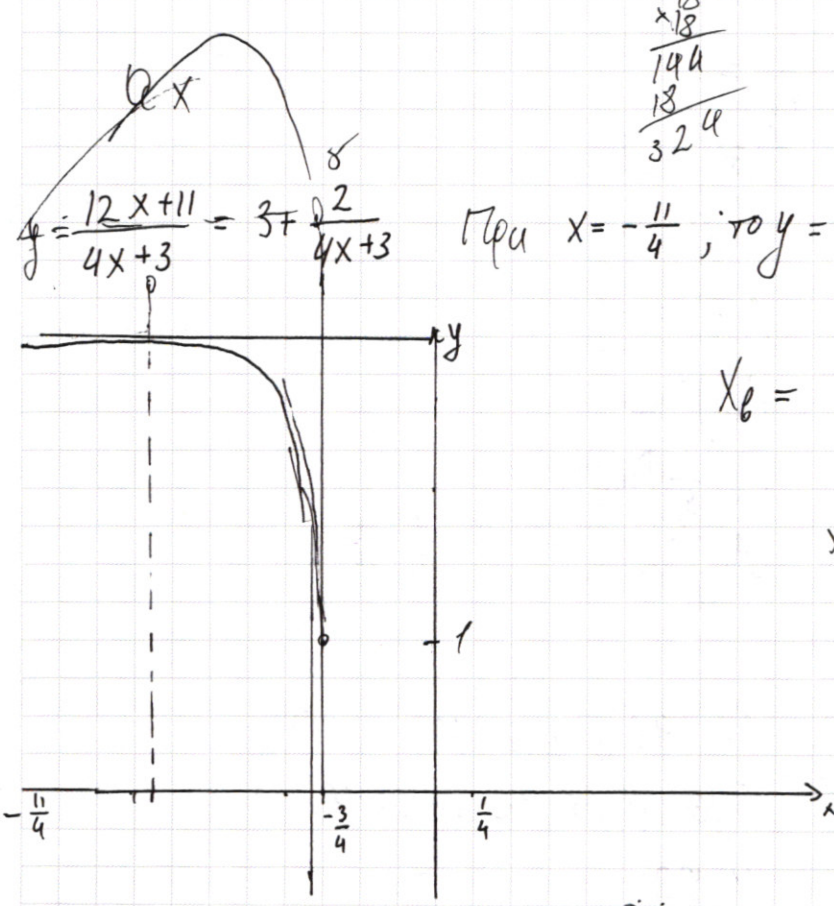
$$= 3 + \frac{2}{4x+3}$$

$x_в =$

6
18
×18
144
18
324

$y = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$ При $x = -\frac{11}{4}$, то $y = 3 + \frac{2}{-11+3} = 3 + \frac{2}{-8} = 2{,}75 \cdot 4$

11



$x_в = \frac{-b}{2a}$ $\quad \frac{-30}{-16} = \frac{-15}{8} = -2 + \frac{1}{8}$

$x^2+2x+1 =$

$x_в = -1$

$-\left(-\frac{15}{8}\right)^2 \cdot 8 + 30 \cdot \frac{15}{8} - 17 =$

$= \frac{15 \cdot 15}{8} + \frac{15 \cdot 15}{4} - 17 =$

$= \frac{-225 + 450}{8} - 17 =$

$= \frac{225}{8} - 17 = \frac{225 - 136}{8} =$

$= \frac{79}{8} - 8 = \frac{79-64}{8} = \frac{15}{8}$

$-\frac{225}{136}$
79

$[-\frac{11}{4}$

$-8 \cdot \left(\frac{11}{4}\right)^2 + 30 \cdot \frac{11}{4} - 17 = -\frac{11^2 \cdot 2}{2} + \frac{11 \cdot 15}{2} - 17 = \frac{11 \cdot 14}{2} - 17 = \frac{154 - 34}{2}$

$= \frac{4 \cdot 11 - 17 \cdot 2}{2} = \frac{44 - 34}{2} = 5$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=0 \quad f(2\cdot4)=f(2)+f(4)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(23)=5$

$f(24)=1$

~~1 2 3/5~~

$f(\frac{1}{2})=0$

$f(\frac{1}{3})=0$

$f(\frac{1}{4})=0$

$f(\frac{1}{5})=-1$

$f(\frac{1}{6})=0$

$f(\frac{1}{7})=-1$

~~$f(\frac{1}{8})=0$~~

~~$f(\frac{1}{9})=0$~~

~~$f(\frac{1}{10})=-1$~~

$f(1)=f(5)+f(\frac{1}{5})=0$

$f(\frac{1}{5})=-1$

$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{10}$

0: 1 2 3 4 6 8 9 12 16   9

1: 5 10 14 15 20 21   2·4.   7

2: 11 22   2.

3: 13   1.

4: 19   1.

5: 23   1.

9 · 7 12 +

7 · 5 +

2 · 3 +

1 · 2 +

1 · 1

черновик ☑   чистовик ☐

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{x^2 - 4xy}$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = (x-2)(y-1) = (y-1)x - 2(y-1)$

$x^2 - (4y + y - 1)x + 4y^2 + 2(y-1) = 0$

$D = (5y-1)^2 - 4(4y^2 + 2(y-1)) =$

$= 25y^2 - 10y + 1 - 16y^2 - 8y + 8 =$

$= 9y^2 - 18y + 1 = (3y-1)^2$

$x = \dfrac{(5y-1) - (3y-1)}{2}$

$\underline{a > 0}$ $a > 0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x$

$5^{\log_{12} a} + a \geq |a|^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} a} + a \geq a^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} a} \geq a^{\log_{12} 13 - 1} = a^{\log_{12} \frac{13}{12}}$

$12^{\log_{12} 5 \log_{12} a} \geq a^{\log_{12} \frac{13}{12}}$

$a^{\log_{12} 5} \geq a^{\log_{12} \frac{13}{12}}$

$\underline{\log_{12} 5} > \log_{12} \frac{13}{12}$

$241 \mid 13$, $2$

$241 \mid 17$, $16$
$-\,\frac{17}{101}$
$102$

$-32 + 18 = 50$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

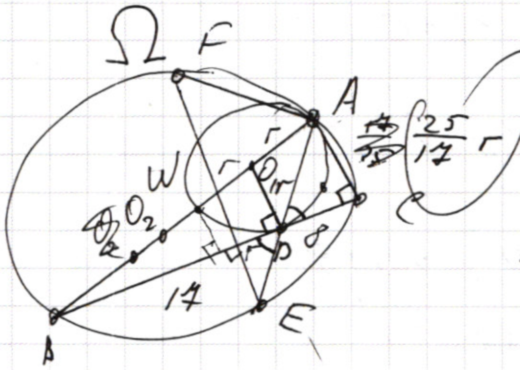
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




$AD \cdot DE = BD \cdot CD$

$4R^2 = 25^2 + \left(\frac{25}{17}\right)^2 r^2 = 25^2\left(1 + \frac{1}{17}r^2\right) = 25^2\left(\frac{18}{17^2}r\right)$

$(2R-r)^2 = 17^2 + r^2$

$4R^2 - 4Rr + r^2 = 17^2 + r^2$

$4R^2 - 4Rr = 17^2$

$4R(R-r) = 17^2$

$R = 25^2 + \left(\frac{25}{17}\right)^2 r^2$

$4R^2 - 25^2 = \frac{25^2}{17^2} \cdot r^2$

$\frac{17 \cdot 4R^2}{25^2} - 1 = r^2$

$\frac{68R^2}{25^2}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

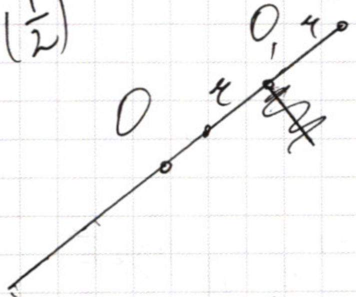
11 12 13 14 15

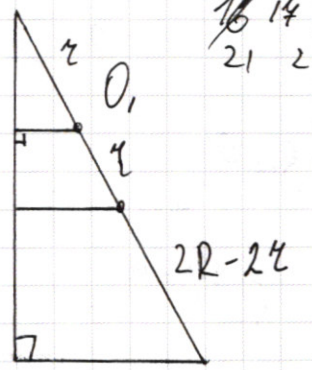
16 17 18 19 20

21 22 23 24

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(1) = 0$




$0 = f(1) = f\left(\frac{2}{2}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(2) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right);\ f\left(\frac{1}{4}\right);\ f\left(\frac{1}{3}\right);\ f\left(\frac{1}{6}\right);\ f\left(\frac{1}{12}\right);\ f\left(\frac{1}{18}\right),$
$f\left(\frac{1}{16}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)