МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad tg\,\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = \sin2\alpha\cdot\cos4\beta+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha+\sin2\alpha =$

$= \sin2\alpha(2\cos^2 2\beta-1)+2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha+\sin2\alpha =$

$= 2\sin2\alpha\cos^2 2\beta-\cancel{\sin2\alpha}+2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha+\cancel{\sin2\alpha} =$

$= 2\cos2\beta(\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha) =$

$= 2\cos2\beta\cdot(\sin(2\alpha+2\beta)) = -\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta = -\frac{4}{5}$; $\cos2\beta = \frac{4\sqrt5}{2\cdot5} = \frac{2\sqrt5}{5}$

$\sin2\beta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt5}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{25-20}{25}} = \pm\frac{\sqrt5}{5}$

1) $\begin{cases}\cos2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}\\ \sin2\beta = \frac{\sqrt5}{5}\end{cases}$ $\quad t = \sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha$

$t = \frac{2\sqrt5}{5}\sin2\alpha+\frac{\sqrt5}{5}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad |\cdot(+\sqrt5)$

$2\sin2\alpha+\cos2\alpha+1=0$

$4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1+1=0$

$2\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha)=0$

Т.к. $tg\,\alpha$ существует, то $\cos\alpha\neq0 \Rightarrow$

$2\sin\alpha+\cos\alpha=0$; $\cancel{\sqrt5\left(\frac{2}{\sqrt5}\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cos\alpha\right)=0}$ $|:\cos\alpha\neq0$

~~$\alpha\neq\frac{\pi}{4}$~~ $\quad$ ~~$\sin(\alpha+\varphi)=$~~

$2tg\,\alpha=-1$; $\boxed{tg\,\alpha = -\frac{1}{2}}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

2) $\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cancel{f = \frac{2\sqrt{5}}{5}\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$

$f = \frac{2\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha - \frac{\sqrt{5}}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad | \cdot (\sqrt{5})$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$\cancel{4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1}$ $\quad 4\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{1} + 2\sin^2\alpha = -\cancel{1}$

$\cancel{2\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0}$ $\quad 2\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\cancel{\underset{0}{\neq} \quad 2\sin\alpha + \cos}$ $\quad$ 1) $\sin\alpha = 0;$ $\cancel{\alpha = \pi n, n \in Z}$ $\Rightarrow \boxed{tg\,\alpha = 0}$

2) $2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \quad | : \cos\alpha \neq 0$

$2 + tg\,\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{tg\,\alpha = -2}$

По условию зн-й тангенса не меньше 3х => все найденные подходят.

Ответ: -2; $-\frac{1}{2}$; 0

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$

$x \geq 2y$, иначе реш-й нет. Возведем (1) в квадрат

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

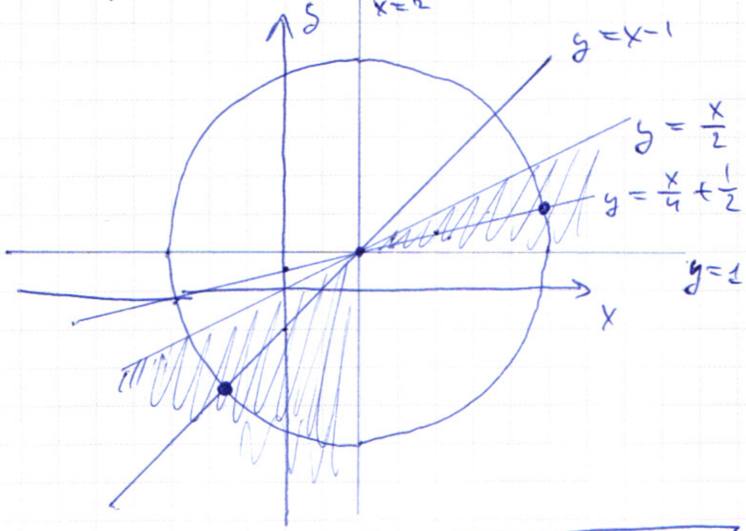
$x^2-x(5y-1)+4y^2+2y-2=0$

$D=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=(3(y-1))^2$

$x=\dfrac{5y-1\pm(3y-3)}{2}=\left[\begin{array}{l} 4y-2 \\ y+1 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} y=\frac{x}{4}+\frac{1}{2} \\ y=x-1 \end{array}\right.$

Второе ур-е преобразуем к виду:

$(x-2)^2+(3(y-1))^2=5^2$



$\sqrt{xy-x-2y+2}=\sqrt{(x-2)(y-1)}\geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 2 \\ y\leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$

1) Подставим $y=x-1$ во 2ое ур-е:

$x^2+9x^2-18\cancel{x}+9-4x-18x+18=12$

$10x^2-40x+15=0$

$2x^2-8x+3=0$

$D=64-24=40$

$x=\frac{8\pm\sqrt{40}}{4}=\left[\begin{array}{l}2+\frac{\sqrt{10}}{2} - \text{не подходит (из графика)}\\ 2-\frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow y=1-\frac{\sqrt{10}}{2}\end{array}\right.$

2) Подставим $x=4y-2$ во 2ое ур-е:

$16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y=12$

$25y^2-50y=0$

$y^2-2y=0$; $y(y-2)=0$ $\left\{\begin{array}{l}y=0 - \text{не подходит (из графика)}\\ y=2 \Rightarrow x=6\end{array}\right.$

Ответ: $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$; $(6;2)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

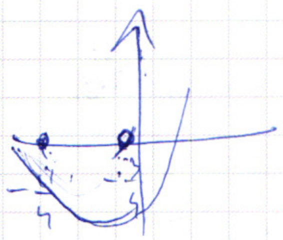
6. $\begin{cases} \dfrac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \\ ax+b \le -8x^2-30x-17 \end{cases}$ $\quad x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$\frac{121\cdot 8}{16} - \frac{11\cdot 30}{4} - \frac{11a}{4} + b + 17 \le 0 \quad |\cdot 4$

$242 - 330 - 11a + 4b + 68 \le 0$

$4b - 11a$

$8x^2 + x(30+a) + b + 17 \le 0$



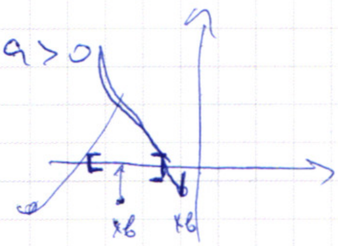
$\begin{cases} f\left(-\frac{11}{4}\right) \le 0 \\ f\left(-\frac{3}{4}\right) \le 0 \end{cases}$

$12x+11 \le 4ax^2 + 3ax + 4bx + 3b$

$4ax^2 + x(3a+4b-12) + 3b - 11 \ge 0$

! Отдельно $a=0$! ...

1) $a>0$



1) $\begin{cases} x_в > -\frac{3}{4} \\ f\left(-\frac{3}{4}\right) \ge 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_в < -\frac{3}{4} \\ x_в > -\frac{11}{4} \\ f(x_в) \ge 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_в < -\frac{11}{4} \\ f\left(-\frac{11}{4}\right) \ge 0 \end{cases}$

3)

2) $a<0$

③ $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

Из ОДЗ $\log_{12}(x^2+18x)$, модуль раскр-ся со знаком "+". Применим св-во лог-ов: $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$:

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+(x^2+18x)^{\log_{12}(12)} \geq \cancel{2x \log}\ 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+12^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$\log_{12}(x^2+18x)=a$

$5^a+12^a \geq 13^a$

~~Введем $f(t)=5^t+12^t-13^t$ => ф-я монотонная и имеет 1 корень. Легко угадывается $t=2$.~~

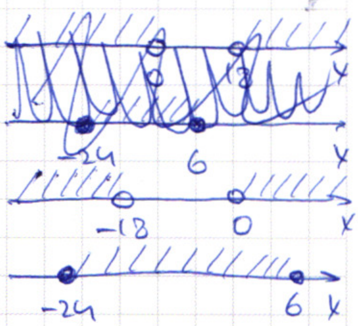
Показательная ф-я яв-ся возраст-щей => => Ур-е $5^a+12^a=13^a$ имеет не более 1 решения. Легко угадывается $a=2$. При $a<2$ — левая часть больше правой, а значит при $a>2$ — правая часть больше левой (из монотонности)

($f(a)=5^a+12^a-13^a$; $f'(a)=\ln a(5^a+12^a-13^a)$ — один экстремум.)

Значит, при $\log_{12}(x^2+18x) \leq 2$ нер-во вып-ся.

$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x \leq 144 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+18)>0 \\ x^2+18x-144 \leq 0 \end{cases}$

$D=18^2+4\cdot144=30^2$; $x_{1,2}=\frac{-18\pm30}{2}=\left[\begin{array}{l}6 \\ -24\end{array}\right.$



Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $f(ab)=f(a)+f(b)$; $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$ $x, y \in [1;24]$

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$

$\underset{0}{f(2)} = \underset{0}{f(2)}+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$\underset{0}{f(1)} = f(n)+f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=-f(n)$

$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$ (Составное ищем ч/з простые)

Аналогично мы можем найти $f(x)$ от любого целого числа из промежутка $[1;24]$. Составим таблицу:

Кол-во чисел	Числа	$f(x)$
7	5; 7; 10; 14; 15; 20; 21	1
2	11; 22	2
1	13	3
2	17; 19	4
1	23	5

$f(x)$ от остальных целых чисел из промежутка равен 0 и нам не подходит

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$, чтобы было отрицательно, нужно, чтобы ряд с числом x был выше ряда с числом y (в таблице). ~~Для $x \in$ 1ой группы: $\underset{\text{кол-во } x}{7}\cdot\underset{\text{кол-во } y}{(2+1+2+1)}=42$ Для $x\in$ 2ой группы: $2\cdot 4=8$. Для $x\in$ 3ей гр.: $1\cdot 3$. Для $x\in$ 4ой группы: $2\cdot 1=2$. Всего вариантов: $42+8+3+2=56$~~

~~Чтобы не посчитать~~ одну

Для x-ов из 1-ого ряда (7 чисел), подходят y из 2,3,4,5 ряда (всего 6 чисел). $7 \cdot 6 = 42$

Аналогично, для x-ов из второго ряда — 4 варианта y $(2 \cdot 4)$

Для x-ов из 3-его ряда — 3 вар-та y. : $1 \cdot 3$

Для x-ов из 4-ого ряда — 1 вар-т y : $2 \cdot 1$

Всего: $42 + 8 + 3 + 2 = 55$

Ответ: 55

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

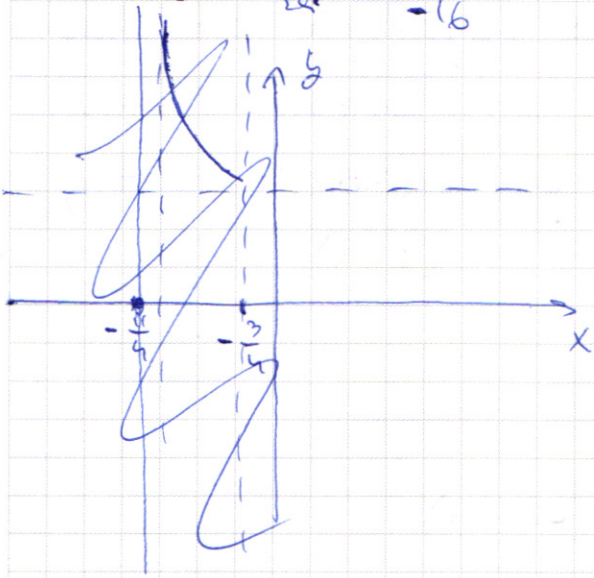
(заполняется секретарём)

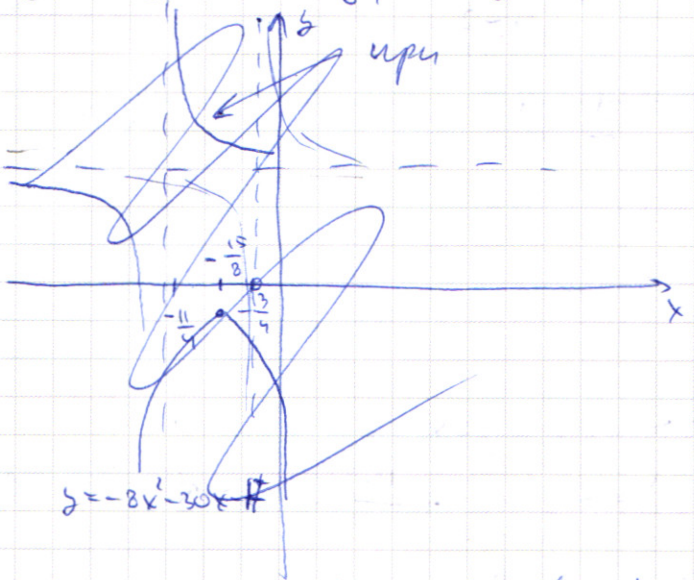
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$ $\qquad x\in\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$x_b = -\frac{b'}{2a'} = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$; $y_b = -8\cdot\frac{225}{64}+\frac{30\cdot15}{8}-17 = \frac{89}{8}$





$ax+b$ – прямая, проходящая ч/з точку $(0; b)$

Необходимо, чтобы эта прямая была выше гипер-болы, но ниже параболы

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

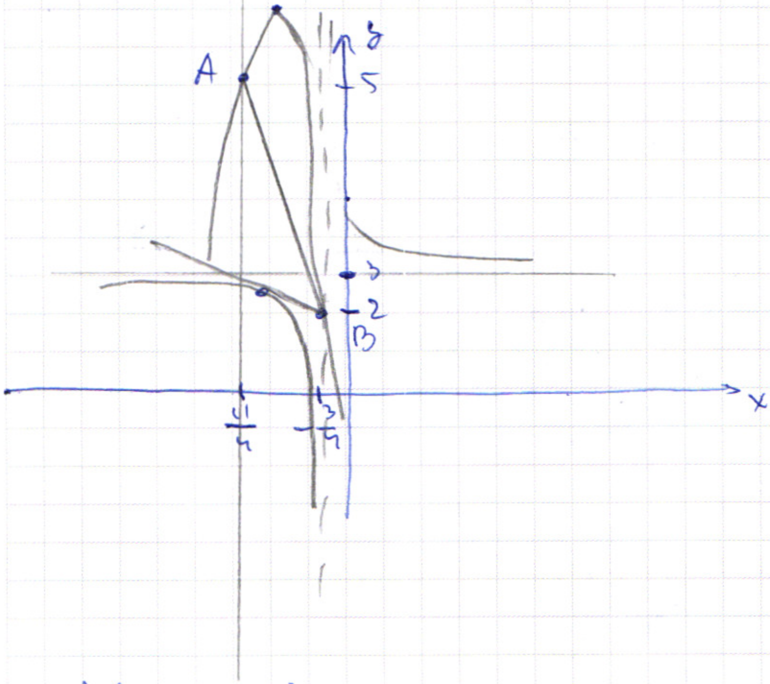
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$⑥\ \frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17 \quad \Big|\ x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$$

$$3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$$x_в = -\frac{b'}{2a'} = \frac{-30}{16} = -\frac{15}{8};\ y_в = \frac{89}{8}$$



$y_п = ax+b$ – прямая.
Необходимо, чтобы эта прямая была ниже параболы, но выше гиперболы (на отрезке)

$y_п$ проходит ч/з точку $(0; b)$

$$f(x) = -8x^2-30x-17$$

$$f\left(-\frac{11}{4}\right) = -8\cdot\frac{121}{16}+\frac{11\cdot30}{4}-17 = 5 \quad ; \quad A\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = -8\cdot\frac{9}{16}+\frac{30\cdot3}{4}-17 = 2 \quad ; \quad B\left(-\frac{3}{4}; 2\right)$$

$$Ax+By+C=0: \begin{cases} -\frac{11}{4}A+5B+b=0 \\ -\frac{3}{4}A+2B+b=0 \end{cases} \Big|\ y = -\frac{3}{2}x+\frac{7}{8}$$

Найдем касание прямой с гиперболой (нижней).

$$12x+11 = 4ax^2+3ax+4bx+3b$$

$$4ax^2+x(3a+4b-12)+3b-11=0$$

$$D = 9a^2+12ab-36a+12ab+16b^2-48b-36a-48b+144-16a(3b-11) =$$
$$= 9a^2+24ab-72a+16b^2-96b+144-48ab+176a$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-4xy+4y^2-xy+x+2y-2=0$

$\cancel{x^2-x(4y}$

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$

$D=25y^2$ $\quad x^2-x(5y-1)+4y^2+2y-2=0$

$D=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=(3(y-1))^2$

$x=\frac{5y+1\pm(3y-3)}{2}=\left[\begin{array}{l}4y-1\\ y+2\end{array}\right.$

1) $x=4y-1$ $\qquad$ 2) $x=y+2$

$16y^2-8y+1+5y^2-16y+4-18y-12=0$

$25y^2-42y-7=0$

$D=1764+700$

$42\cdot42$: 84, 168, 1764; $+700$ = 2464

$48\cdot48$: 384, 192, 4

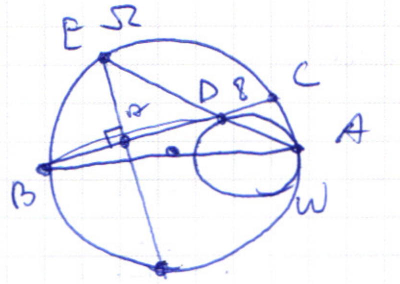
$52\cdot52$: 104, 260, 2704

$(x-4y+2)(x-y-1)=$

$=x^2-4xy+2x-xy+4y^2-2y-x+4y-2=$

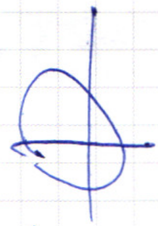
$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2$

y^2+2y+1



$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$



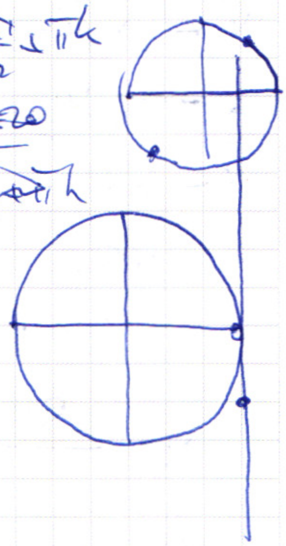
$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\alpha \neq 0$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

~~$\cos 3x \neq 0$~~

~~$3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$~~



$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ (x-2)^2 + (3(y-1))^2 = 5^2 \end{cases}$$

$xy - x - 2y + 2 = x(y-1) - 2(y-1) = 0$

$(x-2)(y-1)$

$\boxed{x \geq 2y}$

1) $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 1 \end{cases}$

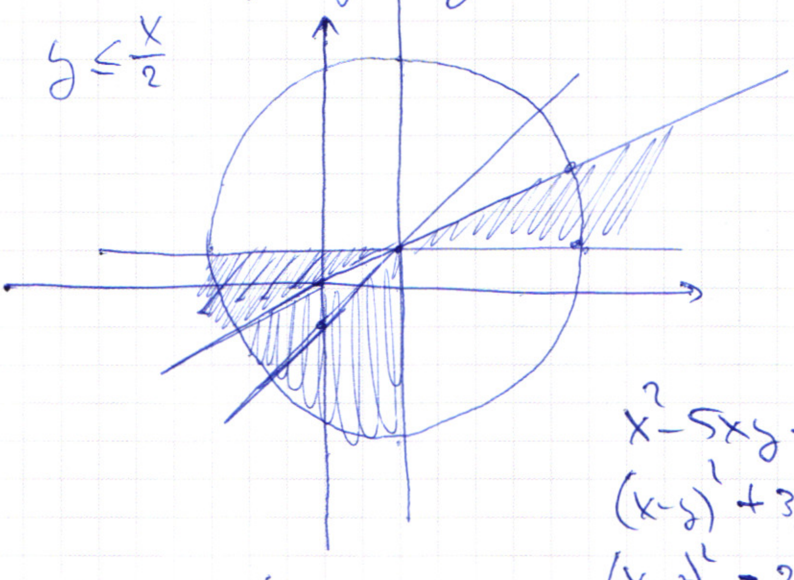
$(x-2)^2 + (3(y-1))^2 = 5^2$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$y \leq \frac{x}{2}$

$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$

$y = x - 1$



$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$

$(x-y)^2 + 3y^2 - 3xy + x + 2y - 2 = 0$

$(x-y)^2 - 3y(x-y)$

$$\begin{cases} (x-2y)^2 = (x-2)(y-1) \\ (x-2)^2 + (3(y-1))^2 = 5^2 \end{cases}$$

$4y = x + 2$

$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$

$(x-2)^2 - 6(x-2)(y-1) + (3(y-1))^2 = 5^2 - 6(x-2y)^2$

$(x - 2 - 3y + 3)^2 =$

$(x - 3y + 1)^2 = (5 - 6x + 2y)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$x=6$; $y=2$

$tg\,\alpha-?$ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-?$

$6-4=\sqrt{12-\cancel{6}-4+2}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$36+36-24-36=12$

$\sin(2\alpha+4\beta)=\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$f(t)=12^t+5^t-13^t$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$f'(t)=\ln t\cdot 12^t+\ln t\cdot 5^t-\ln t\cdot 13^t$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(1-2\sin^2 2\beta)+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$

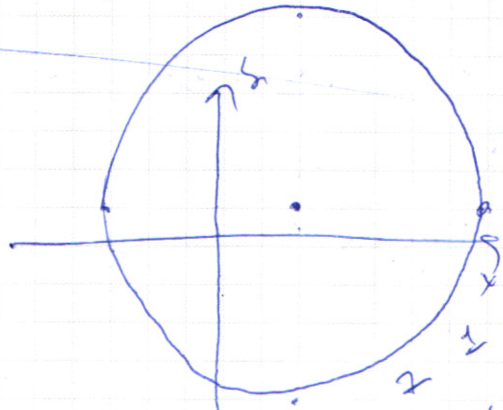
$\sin 2\alpha-2\sin 2\alpha\cdot\sin^2 2\beta+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha$

2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25$

$x\geq 2y:\ x^2+4y^2-4xy=xy-x-2y+2$



$y<\frac{x}{2}$

$49+9-28-18=12$

58

$\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

16

31

+18

50

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - ?$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$(2\cos^2 2\beta - 1)\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\cos^2 2\beta \cdot \sin 2\alpha + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\cos 2\beta(\underbrace{\cancel{2}\cos 2\beta \cdot \sin 2\alpha + \sin 2\beta \cos 2\alpha}_{-\frac{1}{\sqrt{5}}}) = -\frac{4}{5}$

$2\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{1}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ $\qquad \frac{4\sqrt{5}}{80}$ 16 $\qquad$ ~~20~~

$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{5}}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \frac{80}{100}} = \sqrt{\frac{20}{100}} = \frac{2\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad | : \cos\alpha \neq 0$ $\qquad$ 2,4 $\frac{42,4}{96}$ ~~98~~

$\sin 2\alpha \cdot 2 + \cos 2\alpha = -1$ $\qquad 2\sin\alpha + \cos\alpha = 0$ $\qquad \frac{2}{\sqrt{5}} \approx \frac{2}{2,3} \approx 0,2$

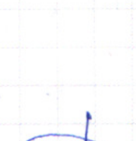
$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha \cancel{-1} \cancel{+1} = 0$

$\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} = -1$

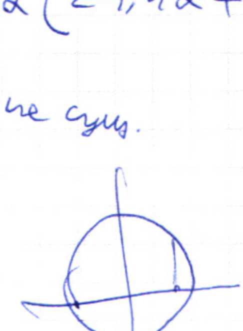
$2\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\operatorname{tg}\alpha$ не сущ.

$2\sin\alpha + \cos\alpha = 0$



$\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\alpha\right) = 0$ $\qquad \cos\varphi$



$\sqrt{5}$ ~~cos~~ $\sin(\alpha + \varphi) = 0$

$\alpha + \varphi = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \pi k - \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \ k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(3) $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

Из ОДЗ $\log_{12}(x^2+18x)$, модуль раскр-ся со знаком +

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$

Левая часть всегда >0 => правая тоже >0

$\log_{12} t$: $\log_{12} t \cdot \log$ $\cancel{x^2+18x}$

-18   0   x

$(x(x+18))^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - (x^2+18x)^{\log_{12}5}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}12} \geq (x^2+18x)^{\log_{12}5}\left((x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{5}} - \cancel{(x^2+18x)^{\log_{12}}} 1\right)$

$\ln 13 - \ln 5 = \ln\frac{13}{5}$

$a^{\log_{12}12} \geq a^{\log_{12}13} - a^{\log_{12}5}$

$\cancel{a^{\log_{12}12} \geq a^{\log_{12}12}\left(a^{\log_{12}\frac{13}{12}} - a^{\log_{12}\frac{5}{12}}\right)}$

$1 \geq (a$

~~$\log_{12} a \cdot \log_{12} 12 = \log$~~

$a^{\log_{12}12} + a^{\log_{12}5} \geq a^{\log_{12}13} = a^{\log_{12}12 + \log_{12}\frac{13}{12}}$

$\log_{12}13 - \log_{12}12 = \log_{12}\frac{13}{12}$

$1 \geq a^{\log_{12}\frac{13}{12}} - a^{\log_{12}\frac{5}{12}}$

$a^{\log_{12}12} + a^{\log_{12}5} \geq a^{\log_{12}13}$

$a^2 + 2a^{\log_{12}12 + \log_{12}5} + \left(a^{\log_{12}5}\right)^2 \geq \left(a^{\log_{12}13}\right)^2$

$\log_a\left(a^{\log_{12}12} + a^{\log_{12}5}\right) \geq \log_{12}13$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

(5) $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$; $f(ab)=f(a)+f(b)$

$x\in[1;24]$; $y\in[1;24]$; $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

Из условия $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$f(4)=f(2)+f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]+\left[\frac{2}{4}\right]=0$

$f(2)=f(2)+f(1) \Rightarrow \boxed{f(1)=0 \ ; \ f(2)=0}$

$\boxed{f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0}$

$\boxed{f(5)=1}$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(6)=f(2)+f(3)=1$

$f(1)=0$
$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(4)=0$
$f(5)=1$
$f(6)=0$
$f(7)=1$
$f(14)=1$
$f(23)=5$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\underset{0}{f(2)}=\underset{0}{f(4)}+\boxed{\underset{0}{f\left(\frac{1}{2}\right)}}$

$\underset{0}{f(2)}=\underset{1}{f(14)}+\underset{-1}{f\left(\frac{1}{7}\right)}$

$\underset{0}{f(3)}=\underset{0}{f(9)}+\underset{0}{f\left(\frac{1}{3}\right)}$

$f(1)=f(23)+f\left(\frac{1}{23}\right)=0$

$f(4)=f(8)+\underset{0}{f\left(\frac{1}{2}\right)}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

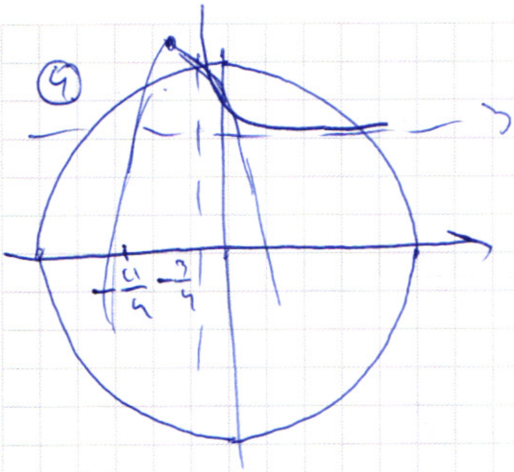
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4



$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$ по условию

$f(2)=f(2)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(1)=f(4)+f\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow f(4)=-f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f\left(\frac{5}{17}\right)=f(5)+f\left(\frac{1}{17}\right)=1-2$

$\underbrace{5;\ 7;\ 10;}_{1}\ 11;$

$f(3)=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$

$f(6)=f(2)\cdot f(3)=0$

$f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$

$f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

5; 7; 10; 15; 14; 21; 20; | 11; 22 | 13 | 17; 19 | 23

$f=\boxed{1}$ | $f=2$ | $f=3$ | $f=4$ | $f=5$

7	5; 7; 10; 14; 15; 20; 21	1
2	11; 22	2
1	13	3
2	17; 19	4
1	23	5

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, когда

Группа с y находится выше группы с x

Для $x \in$ 1ой группе : $6\cdot 7 = 42$

Для $x \in$ 2ой группе $4\cdot 2$ 8

Для $x \in$ 3ей группе $3\cdot 1$ 3

Для $x \in$ 4ой ; $1\cdot 2$ 2

$-\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-\frac{34}{2}$

~~(24)~~

$-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-\frac{34}{2}$

155

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

⑥ $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$; $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$$\begin{cases} 8x^2+x(a+30)+b+17 \le 0 & (1) \\ 4ax^2+x(3a+4b-12)+3b-11 \ge 0 & (2) \end{cases}$$

$(1) \iff \begin{cases} f(-\frac{11}{4}) \le 0 \\ f(-\frac{3}{4}) \le 0 \end{cases}$ $\quad \left(f(x) = 8x^2+x(a+30)+b+17 \right.$

$f(-\frac{11}{4}) = \frac{8\cdot 121}{16} - \frac{11(a+30)}{4} + b + 17 = \frac{121}{2} - \frac{11a}{4} - \frac{165}{4} + b + 17 \le 0$

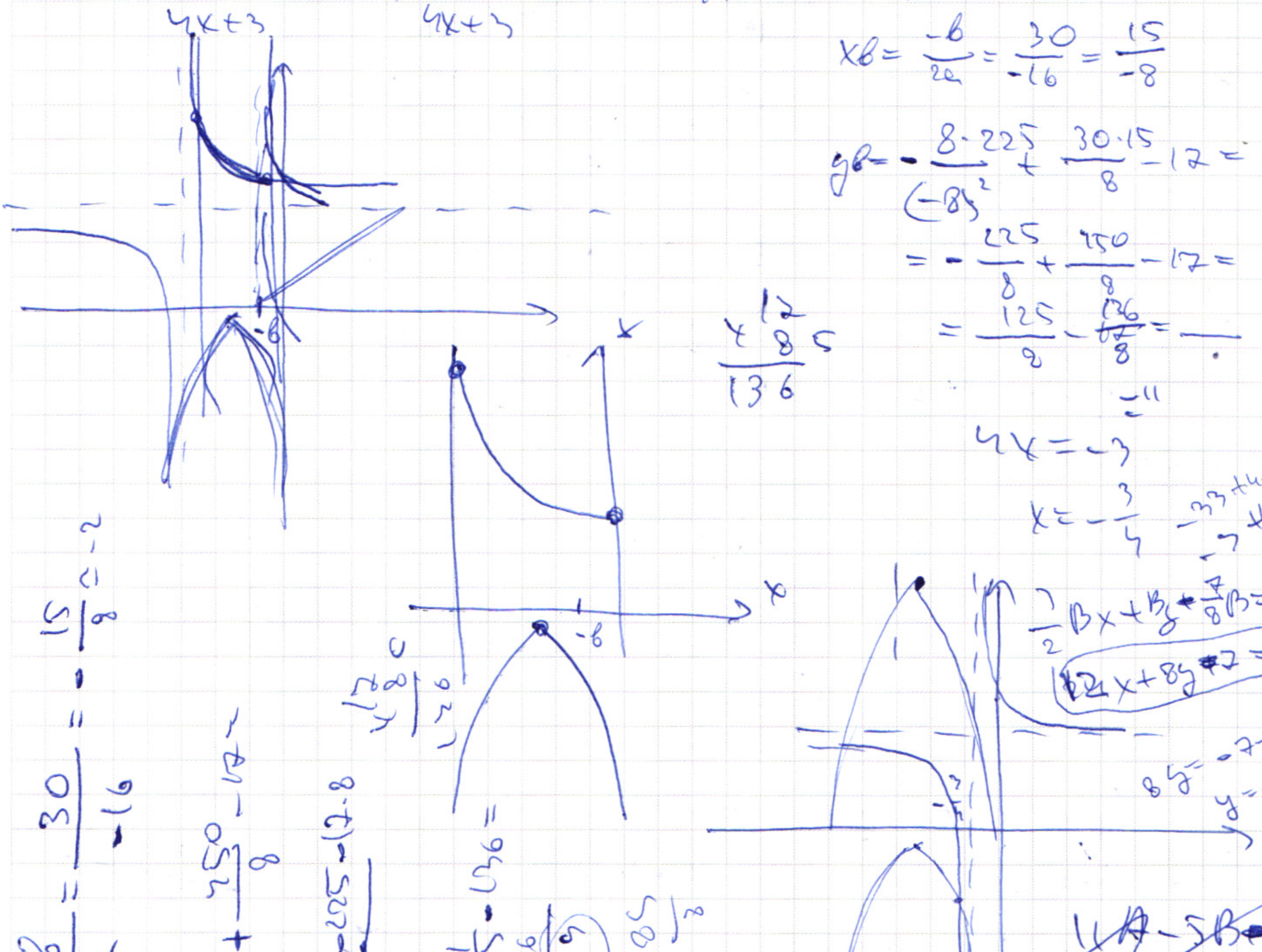
$\frac{12x+9+3}{4x+3} = 3 + \frac{3}{4x+3}$ $\quad ax+b \le -8x^2-30x-17$

$x_B = \frac{-b}{2a} = \frac{30}{-16} = \frac{15}{-8}$

$y_B = -\frac{8\cdot 225}{(-8)^2} + \frac{30\cdot 15}{8} - 17 = -\frac{225}{8} + \frac{450}{8} - 17 = \frac{125}{8} - \frac{136}{8} = -\frac{11}{8}$

$4x = -3$

$x = -\frac{3}{4}$



$-33+40-2$

$-7+4b-2$

$\frac{7}{2}Bx + By + \frac{7}{8}B = 0$

$12x + 8y + 7 = 0$

$8y = -7 - 12x$

$y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{8}$

$x_B = \frac{-b}{2a} = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$-\frac{225}{8\cdot 8} + \frac{450}{8} - 17$

$\frac{450-225-17\cdot 8}{8} =$

$\frac{225-136}{8} = \frac{89}{8}$

$\frac{7}{2}B = 4b$

$b = \frac{7}{8}B$

$4,5B - 8B$

$~~11A - 5B - b = 0~~$

$~~3A -~~$

$11A - 20B - 4b = 0$

$3A - 8B - 4b = 0$

$8A = 12B \quad A = \frac{3}{2}B$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)