МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Рассмотрим первое уравнение:

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow \sin2\alpha\cos2\beta + \cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$ (*).

Рассмотрим второе уравнение:

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin2\alpha = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin2\alpha\cos4\beta + \cos2\alpha\sin4\beta + \sin2\alpha = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin2\alpha(\cos4\beta+1) + \cos2\alpha\cdot2\sin2\beta\cos2\beta = -\frac{4}{5}$,

$\sin2\alpha(2\cos^2 2\beta+1-1) + \cos2\alpha\cdot2\sin2\beta\cos2\beta = -\frac{4}{5}$,

$2\cos^2 2\beta\sin2\alpha + 2\cos2\beta\sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{4}{5}$,

$2\cos2\beta(\cos2\beta\sin2\alpha + \sin2\beta\cos2\alpha) = -\frac{4}{5}$,

$2\cos2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{5}$,

Известно, что $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$, значит:

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta = -\frac{4}{5}$,

$\cos2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$;

~~$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2}{\sqrt5}$,~~

~~$2\cos^2\alpha = \frac{2}{\sqrt5}+1$~~

~~$\cos^2\alpha = \frac{2+\sqrt5}{2\sqrt5}$~~

~~Воспользуемся тригонометрической формулой:~~

~~$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow$~~

По ОТТ: $\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta = 1 \Leftrightarrow |\sin2\beta| = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} =$

$= \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt5}$. Значит, $\sin2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$.

Рассмотрим 2 случая:

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

1) Если $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, то уравнение (*) примет вид:

$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad | \cdot \sqrt{5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1,$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha \underbrace{- \sin^2\alpha + 1}_{\cos^2\alpha} = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0,$

$2\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0,$

В условии сказано, что $tg\alpha$ существует, $\Rightarrow \cos\alpha \neq 0$, тогда $2\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

$\cancel{\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\alpha\right.}$ $2\sin\alpha = -\cos\alpha \quad | : \cos\alpha \neq 0$

$2tg\alpha = -1$

$tg\alpha = -\frac{1}{2}.$

2) Если $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, то ур-е (*) примет вид:

$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad | \cdot \sqrt{5},$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1,$

$4\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 1 = 0,$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0,$

$2\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0,$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0, \\ 2\cos\alpha = -\sin\alpha; \ | \cos\alpha \neq 0 \end{array}\right. \overset{\cancel{\Leftrightarrow}}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0, \\ 2 = -tg\alpha; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0, \\ tg\alpha = -2; \end{array}\right.$

Итак, получили 3 значения: $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -\frac{1}{2}, \\ tg\alpha = 0, \\ tg\alpha = -2; \end{array}\right.$

<u>Ответ</u>: $-2; -\frac{1}{2}; 0.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12; & (2) \end{cases}$

$\begin{cases} x-2-2y+2=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}, \\ (x^2-4x+4)-4+(9y^2-18y+9)-9=12, \end{cases}$

$\begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(y-1)(x-2)}, \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25; \end{cases}$

Пусть $x-2=a$, $y-1=b$, тогда

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab}, \\ a^2+9b^2=25; \end{cases}$

$\begin{cases} ab\geq 0,\ a-2b\geq 0, \\ ab=a^2-4ab+4b^2, \\ a^2+9b^2=25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=25-9b^2, \\ 5ab=25-9b^2+4b^2, \\ ab\geq 0,\ a\geq 2b; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=25-9b^2, \\ 5ab=25-5b^2, \\ ab\geq 0,\ a\geq 2b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=25-9b^2, \\ ab=5-b^2, \\ ab\geq 0,\ a\geq 2b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=25-9b^2, \\ a^2b^2=25-10b^2+b^4, \\ ab\geq 0,\ a\geq 2b; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=25-9b^2, \\ b^2(25-9b^2)=25-10b^2+b^4; \\ ab\geq 0,\ a\geq 2b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=25-9b^2, \\ 25b^2-9b^4=25-10b^2+b^4; & (*) \\ ab\geq 0,\ a\geq 2b; \end{cases}$

Решим ур-е (*) как квадратное относительно b^2:

$10b^4-35b^2+25=0,$

$2b^4-7b^2+5=0$ по т. Виета: $\left[\begin{array}{l} b^2=1, \\ b^2=2{,}5; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=\pm 1, \\ b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}; \end{array}\right.$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = \pm 1, \\ b = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}; \end{array}\right. \\ a^2 = 25 - b^2, \\ ab \geq 0,\ a \geq 2b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = \pm 1, \\ a^2 = 24; \end{cases} \\ \begin{cases} b = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \\ a^2 = 22{,}5;\ = \frac{45}{2} \end{cases} \end{array}\right. \quad ** \\ ab \geq 0,\ a \geq 2b; \end{cases}$$

Для совокупности ** есть следующие решения:

$$\begin{cases} a = 2\sqrt{6}, \\ b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2\sqrt{6}, \\ b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2\sqrt{6}, \\ b = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2\sqrt{6}, \\ b = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \\ b = \sqrt{\frac{5}{2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \\ b = \sqrt{\frac{5}{2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \\ b = -\sqrt{\frac{5}{2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{3\sqrt{5}}{2}, \\ b = -\sqrt{\frac{5}{2}}; \end{cases}$$

Из них условию $ab \geq 0$ соответствует лишь 4 решения: $(2\sqrt{6}; 1)$, $(-2\sqrt{6}; -1)$, $\left(\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}; -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

Для каждой пары проверим условие $a \geq 2b$:

1) $2\sqrt{6} \geq 2$ — верно; 2) $-2\sqrt{6} \geq -2$ — неверно;

3) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \geq \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ — верно; 4) $-\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \geq -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ — неверно

Остаётся только 2 решения: $(2\sqrt{6}; 1)$ и $\left(3\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

Значит, исходная система равносильна:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2 = 2\sqrt{6}, \\ y - 1 = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2 = 3\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}, \\ y - 1 = \sqrt{\frac{5}{2}}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 + 2\sqrt{6}, \\ y = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3\sqrt{\frac{5}{2}} + 2, \\ y = \sqrt{\frac{5}{2}} + 1; \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2 + 2\sqrt{6}; 2)$, $\left(3\sqrt{\frac{5}{2}} + 2; \sqrt{\frac{5}{2}} + 1\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$,

Т.к. x^2+18x стоит под знаком логарифма, $x^2+18x>0$, значит, $|x^2+18x| = x^2+18x$, тогда

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13},$$

Пусть $x^2+18x = t>0$, тогда:

$$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13},$$

$$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t} \geq 12^{\log_{12}t^{\log_{12}13}},$$

$$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t} \geq \underbrace{12^{\log_{12}13}}_{13}{}^{\cdot\log_{12}t},$$

$$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t},$$

Пусть $\log_{12}t = a$, тогда

$$5^a+12^a \geq 13^a, \quad |:12^a>0 \ \forall a\in\mathbb{R}$$

$$\left(\frac{5}{12}\right)^a+1 \geq \left(\frac{13}{12}\right)^a \ (*)$$

Введём функции $f(a)=\left(\frac{5}{12}\right)^a+1$ и $g(a)=\left(\frac{13}{12}\right)^a$. Заметим, что т.к. $\frac{5}{12}\in(0;1)$, то $f(a)\downarrow$ на $\mathbb{R}$, и т.к. $\frac{13}{12}\in(1;+\infty)$, $g(a)\uparrow$ на $\mathbb{R}$. Значит, уравнение $f(a)=g(a)$ имеет единственный корень на $\mathbb{R}$, заметим, что этим корнем является 2. Действительно:

$$\left(\frac{5}{12}\right)^2+1 = \frac{25}{144}+\frac{144}{144} = \frac{169}{144} = \left(\frac{13}{12}\right)^2.$$

Значит, решением неравенства $(*)$ является либо промежуток $(-\infty;2]$, либо $[2;+\infty)$. При $a=1$ неравенство

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) верно, значит, решением неравенства является промежуток $[-\infty; 2]$, т.е. $a \le 2$.

Значит: $\log_{12} t \le 2$

$$\log_{12} t \le \log_{12} 144$$

$$t \le 144 \text{ (т.к. } 12 > 1)$$

$t \le 144 \Rightarrow x^2 + 18x \le 144$,

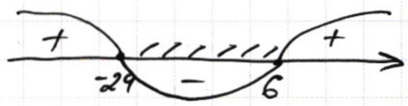
$$x^2 + 18x - 144 \le 0,$$

$$(x^2 + 18x + 81) - 81 - 144 \le 0,$$

$$(x+9)^2 - 225 \le 0,$$

$$(x+9-15)(x+9+15) \le 0,$$

$$(x-6)(x+24) \le 0,$$



$$x \in [-24; 6].$$

Ответ: $[-24; 6]$.

№6. $\dfrac{12x+11}{4x+3} \le ax + b \le -8x^2 - 30x - 17$,

Верно неравенство: $\dfrac{12x+11}{4x+3} \le -8x^2 - 30x - 17$ (*)

Преобразуем обе части неравенства:

$$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{(12x+9)+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3},$$

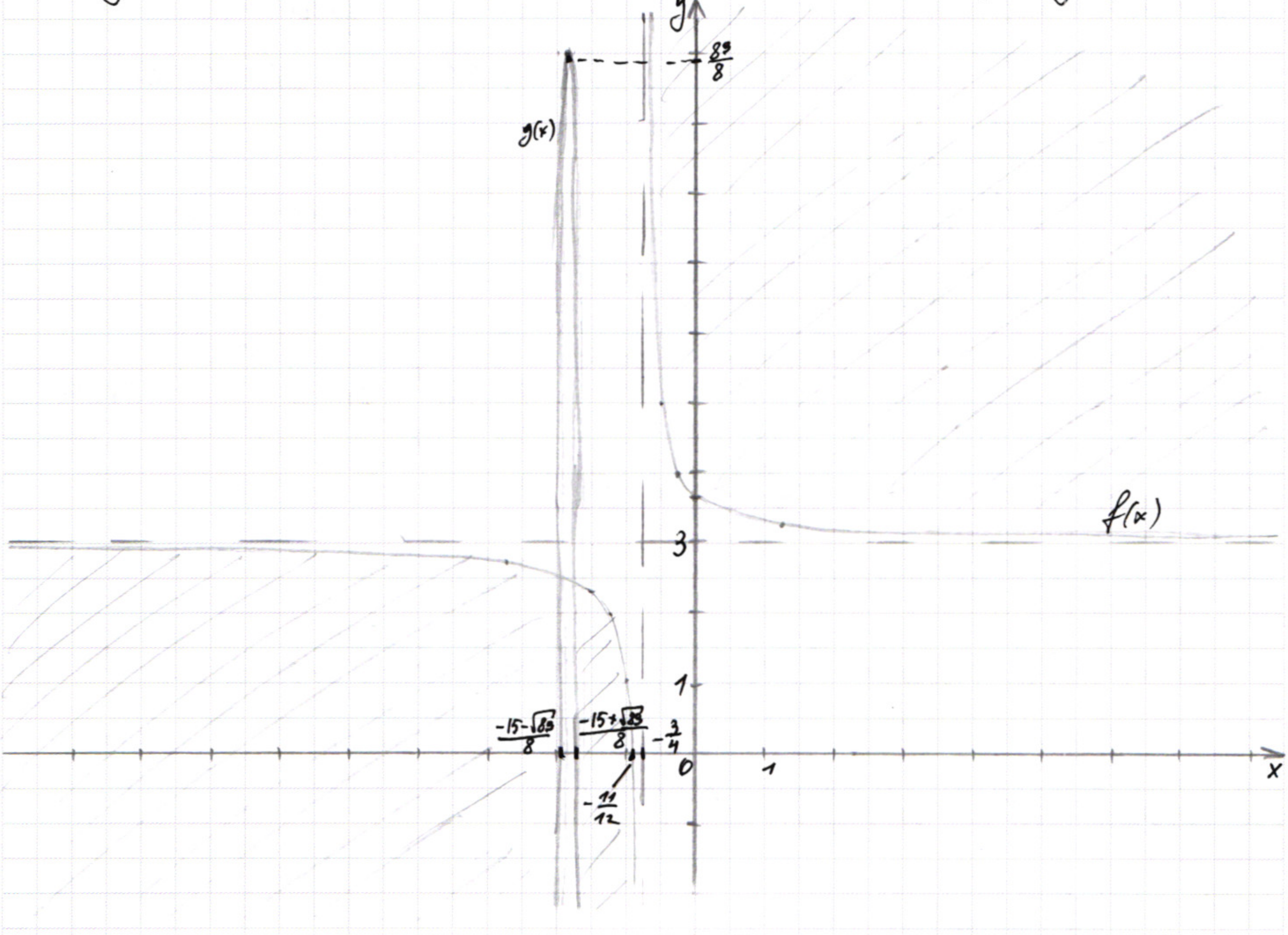
$$-8x^2 - 30x - 17 = -8\left(x^2 + \frac{30}{8}x\right) - 17 = -8\left(x^2 + \frac{15}{4}x\right) - 17 =$$

$$= -8\left(x^2 + \frac{15}{4}x + \left(\frac{15}{8}\right)^2\right) + 8 \cdot \left(\frac{15}{8}\right)^2 - 17 = -8\left(x + \frac{15}{8}\right)^2 + \frac{225}{8} - \frac{136}{8} =$$

$$= -8\left(x + \frac{15}{8}\right)^2 + \frac{89}{8}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение №6) Построим графики $f(x)=3+\frac{2}{4x+3}$ и $g(x)=-8(x+\frac{15}{8})^2+\frac{89}{8}$



Решением неравенства (*) является заштрихованная область, т.е. $x\in\left(-\infty;\frac{-15-\sqrt{89}}{8}\right]\cup\left[\frac{-15+\sqrt{89}}{8};-\frac{11}{12}\right]\cup\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$

График $ax+в$ представляет собой семейство всех возможных прямых. Любая прямая из семейства „сократит" данное решение, а оно и так не содержит промежуток $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right]$.

Ответ: а и в не существуют.

№5. $f(ab) = f(a) + f(b)$, где $a, b > 0$, $a, b \in \mathbb{Q}$;

$f(p) = [p/4]$, где p – простое число;

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, где $x, y \in \mathbb{N}$, $x, y \in [1; 24]$

Заметим, что 1 – не простое число, значит:

$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)\cancel{+1} + f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0.$

~~$f(0) = f(0 \cdot n) = f(0) + f(n)$~~

~~$f(0) = f(0 \cdot p) = f(0) + f(p) = f(0) + [p/4]$, но p может быть любым прост~~

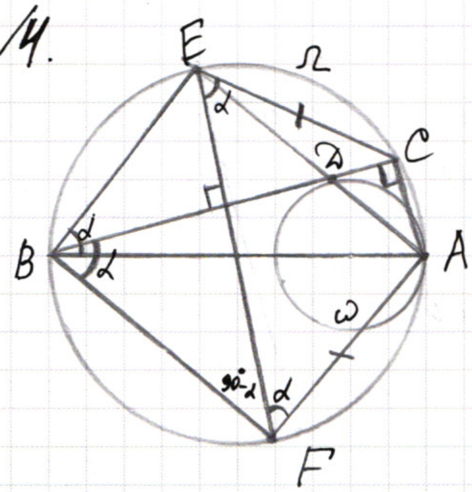
Заметим, что пары вида ~~$\begin{cases} x = 1, \\ y = p, \end{cases}$ и~~ $\begin{cases} x = p, \\ y = 1; \end{cases}$ нам

не подходят, т.к. ~~$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{1}{p}\right) =$~~

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{p}{1}\right) = f(p) = [p/4] > 0.$

Значит, пары $(2;1)$, $(3;1)$, $(5;1)$, $(7;1)$, $(11;1)$, $(13;1)$, $(17;1)$, $(19;1)$ и $(23;1)$ не подходят. Пара $(1;1)$ тоже не подходит: $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{1}{1}\right) = f(1) = 0$.

№4.



<u>Дано:</u> окружности Ω и ω касаются внутр. обр. в т. A, $EF \perp BC$, AB – диаметр, $CD = 8$, $BD = 17$

<u>Найти:</u> R_Ω, R_ω, $\angle AFE$, $S_{\triangle AEF}$

<u>Решение:</u> 1) Т. к. AB – диаметр, вписанный $\angle ACB = 90°$, тогда $AC \perp BC$, $EF \perp BC \Rightarrow AC \parallel BF$. Значит, $\smile EC = \smile AF$ и $EC = AF$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение №4)

2) $\smile EC = \smile AF \Rightarrow \angle AFE = \angle CEF = \overset{\angle CBF}{\angle \cancel{CBE}} = \angle ABE$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

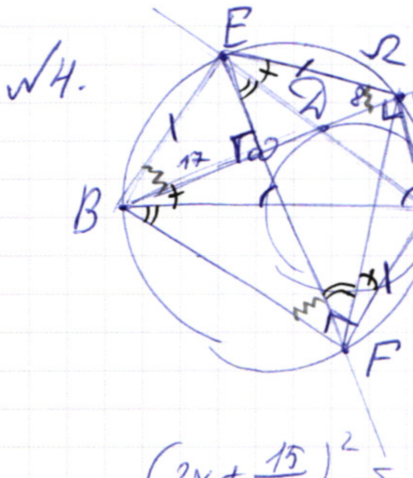
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



маловато данных

$BF = FC$

$BE = EC$

$EF \parallel AC!$

$$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{(12x+9)+2}{4x+3} = \boxed{3+\frac{2}{4x+3}}$$

EF–диаметр? да

гипербола

$\left(2x+\frac{15}{4}\right)^2 =$

$-8x^2-30x-17 = -(8x^2+30x+17) =$

$= -(8x^2+30x) - 17 = -2(4x^2+15x) - 17 =$

$= -2\left(4x^2+15x+\left(\frac{15}{4}\right)^2\right) + 2\left(\frac{15}{4}\right)^2 - 17 =$

$= -2\left(2x+\frac{15}{4}\right)^2 + 2\cdot\frac{225}{16} - 17 =$

$= -8\left(x+\frac{15}{8}\right)^2 + \frac{225}{8} - 17 =$

$= -8\left(x+\frac{15}{8}\right)^2 + \frac{89}{8}$

$17 \times 8 = 136$

$225 - 136 = 89$

$\left|x+\frac{15}{8}\right| = \sqrt{\frac{89}{64}}$

$\left|\frac{8x+15}{8}\right| = \frac{\sqrt{89}}{8}$

$|8x+15| = \sqrt{89}$

$8x+15 = \sqrt{89}$

$8x+15 = -\sqrt{89}$

$x = \frac{-15\pm\sqrt{89}}{8}$

$3+\frac{2}{4x+3} = 0$

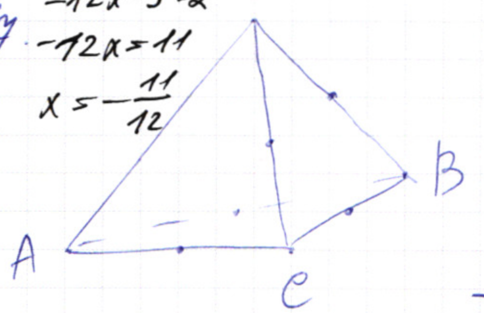
$\frac{2}{4x+3} = -3$

$-12x-9 = 2$

$-12x = 11$

$x = -\frac{11}{12}$

№7



Не решу.

$\frac{2}{4x+3} = \frac{2}{4\left(x+\frac{3}{4}\right)} = = \frac{0{,}5}{x+\frac{3}{4}}$

$\frac{15}{4}x : 2x = \frac{15x}{8x} =$

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\cancel{-8\left(\frac{8}{8}+\frac{15}{8}\right.}$

$-8\left(\frac{x}{8}+\frac{15}{8}\right)^2 + \frac{89}{8} = 0$

$-8\left(x+\frac{15}{8}\right)^2 = -\frac{89}{8}$

$64\left(x+\frac{15}{8}\right)^2 = 89$

$-8\left(\frac{9}{8}+\frac{15}{8}\right)^2 + \frac{89}{8}$

$-8\cdot 9 +.$

$-8\cdot\frac{1}{64} + \frac{89}{8}$

$-\frac{1}{8} + \frac{89}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5. $f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$ p - простое

$\cancel{f(xy}$ $f(x/y)<0$

$f(x/y)=f(xy\cdot\frac{1}{y^2})=f(x)+f(\frac{1}{y})$

Простые числа от 1 до 24: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Всего их 9.

$f(1)=f(1\cdot 1)=2f(1) \Rightarrow \boxed{f(1)=0}$

Пары вида $\begin{cases} x=1 \\ y=p \end{cases}$ — не подходят

$f(\frac{1}{p})=$ не знаю.

$506+72=578$; $578:2=289$

№6. $\begin{cases} \frac{12x+11}{4x+3}\le ax+b, \\ ax+b\le -8x^2-30x-17; \end{cases}$ в реш. входит $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

$\frac{12x+11-(ax+b)(4x+3)}{4x+3}\le 0 \Leftrightarrow \frac{12x+11-4ax^2-3ax-4bx-3b}{4x+3}\le 0$

$4ax^2-x(12-3a-4b)+(11-3b)=0$ $\frac{-4ax^2+x(12-3a-4b)+(11-3b)}{4x+3}\le 0$

$D=(12-3a-4b)^2-16a(11-3b)=$

$=144+9a^2+16b^2-96b-72a+24ab-506a+\cancel{...}$

$=9a^2+16b^2+144-578a+42b+24ab=$

$=(9a^2+24ab+16b^2)+(144-578a+42b)=(3a+4b)^2+2(72-289a+21b)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac45 \end{cases}$ $\quad tg\alpha - ?$

$\begin{cases} \sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin2\alpha\cos4\beta + \cos2\alpha\sin4\beta + \sin2\alpha = -\frac45 \end{cases}$ ✓

$\begin{cases} \sin2\alpha\cos2\beta + \cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1 + 1) + \cos2\alpha\cdot 2\sin2\beta\cos2\beta = -\frac45 \end{cases}$

$\begin{cases} \sin2\alpha\cos2\beta + \cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin2\alpha\cos^2 2\beta + 2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha = -\frac45 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\cos2\beta(\underbrace{\sin2\alpha\cos2\beta + \sin2\beta\cos2\alpha}_{-\frac{1}{\sqrt5}}) = -\frac45, \\ \sin2\alpha\cos2\beta + \cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta = -\frac45 \Rightarrow \cos2\beta = \frac{-\frac45}{-\frac{2}{\sqrt5}} = \frac{4\sqrt5}{5\cdot2} = \frac{2\sqrt5}{5} = \frac{2}{\sqrt5}$

$\boxed{\cos2\beta = \frac{2}{\sqrt5}}$

~~sin2α · cos 2~~

$\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} \pm \sqrt{1-\frac45}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha + \frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}, \\ \frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha - \frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin2\alpha + \cos2\alpha = -1, \\ 2\sin2\alpha - \cos2\alpha = -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\sin\alpha\cos\alpha + \overbrace{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1}^{\cos^2\alpha} = 0, \\ 4\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \underbrace{1}_{\sin^2\alpha} = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0, \\ 4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

На чистовик потом...

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12; & (2) \end{cases}$

(1) $x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \Leftrightarrow x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)}$

(2) $x^2+9y^2-4x-18y=12$

$(x^2-4x+4)+(9y^2-18y+9)-4-9=12$

$(x-2)^2+9(y-1)^2-13=12$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

~~Графически~~???

(3) $x-2y=\cancel{(x-2)+2-2(2y+2)}=$

$x-2y=x+2-2y-2=(x-2)-2(y-1)$

Замена, легко.

№3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

Пусть $x^2+18x=t>0$, тогда

$5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$

$\cancel{5t}$ $5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$\cancel{5^{\log_{12}t} \geq}$ $5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t} \geq t^{\log_{12}13}$

$\cancel{t^{\log_{12}13}}$ $t^{\log_{12}13}=12^{\log_{12}t^{\log_{12}13}}=12^{\log_{12}13\cdot\log_{12}t}$

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t} \geq \cancel{12^{\log_{12}13\cdot\log_{12}t}}\ 13^{\log_{12}t}$

Пусть $\log_{12}t=a$, тогда

$\boxed{\text{„=" при } a=2}$ либо слева от него либо справа

$5^a+12^a \geq 13^a \quad |:12^a>0 \ \forall a\in R$ дальше решу.

$\cancel{1+\left(\frac{12}{5}\right)^a \geq}$ $\left(\frac{5}{12}\right)^a+1 \geq \left(\frac{13}{12}\right)^a$

$\downarrow$ на R $\quad\uparrow$ на R $\Rightarrow$ 1 корень уравн.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)