МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

(*) $xy-x-2y+2\geqslant 0$

$y(x-2)-(x-2)\geqslant 0$

$(y-1)(x-2)\geqslant 0$

Пусть $y-1=b$, $x-2=a$

(2) $\begin{cases} ab\geqslant 0 \ (*) \\ a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=5^2 \end{cases}$

При условии (*) и $a-2b\geqslant 0$:

(2): $(a-2b)^2=ab$, $a^2-5ab+4b^2=0$

$D=25b^2-16b^2=9b^2$; $a_{1,2}=\dfrac{5b\pm 3b}{2}=$

$= a_1=4b$, $a_2=b$

Если $a-2b<0$, то т.к. $\sqrt{ab}\geqslant 0$ при $a,b\in R$, $ab\geqslant 0$, уравнение 2 не имеет корней.

Если $a_1=4b$: $\begin{cases} 4b^2\geqslant 0 \\ 4b-2b\geqslant 0 \\ a=4b \\ 16b^2+9b^2=5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2\geqslant 0 \\ b\geqslant 0 \\ a=4b \\ b^2=1 \end{cases}$

Тогда $b=1$, $a=4$, т.е. $\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases}$ $\underline{y=2,\ x=6}$

Если $a=b$: $\begin{cases} b^2\geqslant 0 \\ b-2b\geqslant 0 \\ a=b \\ b^2+9b^2=25 \end{cases}$ $\begin{cases} b^2\geqslant 0 \\ b\leqslant 0 \\ a=b \\ b^2=\frac{5}{2} \end{cases}$ $b=-\sqrt{\frac{5}{2}}$, $a=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$

$x = 2-\sqrt{\frac{5}{2}}$, $y = 1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

Ответ: $(6;2)$, $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha(1+\cos 4\beta) + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = \sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta +$

$+ \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta \cos 2\beta = 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta)$

$= 2\cdot \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$ (1) $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$; $\cos 2\beta = \frac{4\sqrt5}{2\cdot 5} = \frac{2}{\sqrt5}$;

$\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta = 1$, $\sin^2 2\beta = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$; $\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

(1) $\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$: $\frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ $/\cdot\sqrt5$

$2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$. Т.к. $\mathrm{tg}\,\alpha$ определен, то $\cos\alpha\neq 0$

Разделим обе части на $\cos^2\alpha$: $4\,\mathrm{tg}\,\alpha + 2 = 0$, $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}$.

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$: $\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \left(\frac{-1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ $/\cdot\sqrt5$

$2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha - (2\cos^2\alpha - 1) = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = -1$ $/2$

$2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = -1$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha=0$

$\sin\alpha(2\cos\alpha+1)=0$

1. $\sin\alpha=0$ $\quad\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1,\ \cos\alpha=\pm1$

$tg\,\alpha=0$

2. $2\cos\alpha+1=0,\ \cos\alpha=-\frac{1}{2}$

$\sin^2\alpha=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},\ \sin\alpha=\pm\frac{\sqrt3}{2}$

$tg\,\alpha=\pm\sqrt3$ Ответ: $-\frac{1}{2},\ 0,\ \pm\sqrt3$.

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$x^2+18x>0$. Пусть $t=x^2+18x,\ t>0$

$5^{\log_{12}t}+t\geqslant t^{\log_{12}13}$ (т.к. $x^2+18x>0,\ |x^2+18x|=x^2+18x$)

Заметим, что $t=12^{\log_{12}t}$; $t^{\log_{12}13}=13^{\log_{12}13\cdot\log_{13}t}=$

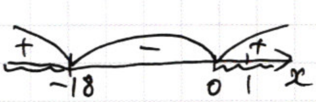
$=13^{\frac{\log_{13}t}{\log_{13}12}}=13^{\log_{12}t}$. Тогда: $5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}\geqslant13^{\log_{12}t}$

Пусть $\log_{12}t=a$, $5^a+12^a\geqslant13^a$.

Заметим, что при $\forall a\leq0$ неравенство выполнено, т.к. $\frac{1}{5^{-a}}>\frac{1}{13^{-a}}$. Также т.к. при ~~$\forall a\geq0$~~ $\forall a>0$ $13^a>5^a$, $13^a>12^a$, при этом $5^2+12^2=13^2$, то $a\in(-\infty;2]$. $\log_{12}t\leq2$

$(12-1)(t-12^2)\leq0$, $0<t\leq144$. ~~$(x^2+18x-144)\in($~~

$0<x^2+18x\leq144$. 1) $x^2+18x>0$,

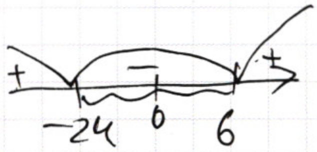


$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

$x^2 + 18x - 144 \leq 0$

$D = 18^2 + 4 \cdot 144 = 2^2 \cdot 9^2 + 2^2 \cdot 12^2 = 2^2 \cdot 15^2 = 30^2$

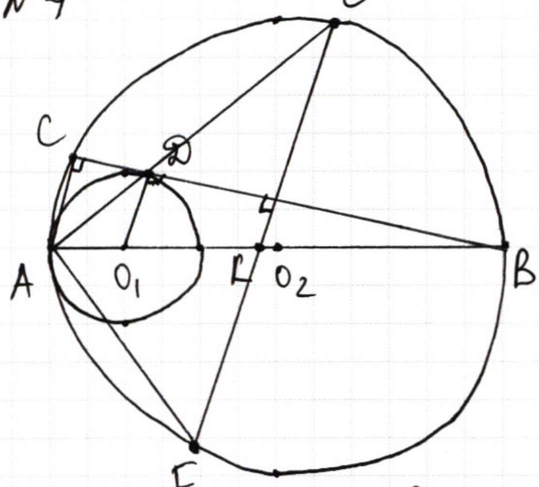
$x = \dfrac{-18 \pm 30}{2} = -9 \pm 15, \; x_1 = -24, \; x_2 = 6$



$x \in [-24; 6]$. Тогда $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$.

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

№4



Проведем AC, т.к. $\angle ACB$ опирается на диаметр, то $\angle ACB = 90°$. Т.к. BC – касательная, то $\angle O_1DB = 90°$. Т.к. $\angle ACB = \angle O_1DB = 90°$, $\angle B$ – общий: $\triangle ABC \sim \triangle O_1BD$: $\dfrac{AB}{O_1B} = \dfrac{BC}{BD}$. Пусть $O_1D = r$, $O_2B = R$, тогда т.к. окружности касаются внутр. образом: $\dfrac{2R}{2R - r} = \dfrac{17+8}{17}$, $34R = 25(2R - r)$

$25r = 16R$, $R = \dfrac{25}{16} r$.

По теореме Пифагора в $\triangle O_1BD$: $17^2 + r^2 = (2R - r)^2$

$17^2 + r^2 = \left(\dfrac{50}{16} r - r\right)^2$; $17^2 = \dfrac{50}{16} r \cdot \left(\dfrac{50}{16} r - 2r\right)$

$17^2 = \dfrac{r^2}{16^2} \cdot 50 \cdot 18$; $r^2 = \dfrac{17^2 \cdot 16^2}{25 \cdot 36}$, $r = \dfrac{17 \cdot 16}{5 \cdot 6} = \dfrac{17 \cdot 16}{30} = \dfrac{272}{30}$

$R = \dfrac{25 \cdot 17}{30} = \dfrac{425}{30}$.

По теореме Пифагора в $\triangle ACD$: $AD = \sqrt{8^2 + \left(\dfrac{25}{17} \cdot \dfrac{16 \cdot 17}{30}\right)^2} = \sqrt{8^2 + \dfrac{5^2 \cdot 16^2}{6^2}}$

$= 8 \cdot \sqrt{1 + \dfrac{10^2}{6^2}} = \dfrac{8}{6} \cdot \sqrt{136} = \dfrac{8}{3} \sqrt{34}$. $AD \cdot DE = CD \cdot BD$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$DE = \frac{BD\cdot CD}{AD} = \frac{17\cdot 8\cdot 3}{8\sqrt{34}} = \frac{3}{2}\sqrt{34}$

$AE = AD + DE = \sqrt{34}\left(\frac{8}{3}+\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{34}}{6}(16+9) = \frac{25}{6}\sqrt{34}$

По теореме синусов для $\triangle AFE$: $2R = \frac{AE}{\sin AFE}$; $\sin AFE = \frac{AE}{2R} =$

$= \frac{\cancel{25}\sqrt{34}\cdot 30}{2\cdot 6\cdot \cancel{25}\cdot 17} = \frac{5\sqrt{34}}{2\cdot 17} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$

Пусть $EF \cap AB = K$

Т.к. $EF \perp BC$, то $EF \parallel O_1D$, тогда $\triangle AO_1D \sim \triangle AKE$, тогда:

$KE = \frac{AE}{AD}\cdot O_1D = \frac{16\cdot 17}{30}\cdot\frac{25\sqrt{34}\cdot 3}{6\cdot 8\sqrt{34}} = \frac{25\cdot 17}{30}$ $(=R)$

$AK = \frac{AE}{AD}\cdot AO_1 = \frac{25}{16}\cdot\frac{16\cdot 17}{30} = \frac{25\cdot 17}{30}$ $(=R)$. Значит, FE – диаметр, K совпадает с O_2. Тогда $\angle FAE = 90^\circ$

$AF = \sqrt{4R^2 - AE^2} = \sqrt{4\cdot\frac{25^2\cdot 17^2}{30^2} - \frac{25^2\cdot 34}{6^2}} = 25\sqrt{\frac{34^2}{30^2} - \frac{34}{36}} =$

$= 25\sqrt{\frac{34}{36}\left(\frac{34}{25}-1\right)} = 25\cdot\sqrt{\frac{34}{36}\cdot\frac{9}{25}} = \frac{\cancel{25}^{5}\cdot\cancel{3}}{{}_2\cancel{6}\cdot\cancel{5}}\cdot\sqrt{34} =$

$= \frac{5}{2}\sqrt{34}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{34}\cdot\frac{25}{6}\cdot\sqrt{34} = \frac{125}{\cancel{24}_{12}}\cdot\cancel{34}^{17} = \frac{2125}{12}$

Ответ: $R = \frac{425}{30}$, $r = \frac{272}{30}$, $\angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$, $S_{AEF} = \frac{2125}{12}$.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Т.к. p – простое, то $f(p) = f(1) + f(p)$, значит $f(1) = 0$

Для любого числа справедливо: $f(a) = \cancel{f(a_n)} \left[\frac{a_1}{4}\right] + \left[\frac{a_2}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{a_n}{4}\right]$

где, a_n – простые множители числа. Тогда:

$f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(4)=0$, $f(5)=1$, $f(6)=0$, $f(7)=1$, $f(8)=0$, $f(9)=0$, $f(10)=1$, $f(11)=2$, $f(12)=0$, $f(13)=3$, $f(14)=1$, $f(15)=1$, $f(16)=0$, $f(17)=4$, $f(18)=0$, $f(19)=4$, $f(20)=1$, $f(21)=1$, $f(22)=2$, $f(23)=5$, $f(24)=0$.

0 дают 11 значений, 1 – 7 значений, 2 – 2 значения, 3 – 1 знач., 4 – 2 значения, 5 – 1 значение.

Заметим, что $f(x) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$ $\left(\frac{x}{y}\cdot y = x;\ x,y \in N\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$. Тогда т.к. $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, то нужно найти пары $(x;y)$ для которых $f(y) > f(x)$.

Таких пар $n = \min(11;\ 7+2+1+2+1)^2 + \min(7;\ 2+1+2+1)^2 + \min(2;\ 1+2+1)^2 + \min(1;\ 2+1)^2 + \min(2;\ 1)^2 =$

$= 11^2 + 6^2 + 2^2 + 1 + 1 = 121 + 36 + 4 + 2 = 157 + 6 = 163$

(Берём ~~$f(y) > f(x)$~~ $f(x) = 0, 1, 2, 3, 4$ и смотрим сколько $f(y)$ больше)

Ответ: 163 ~~зна~~ пары

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$f(1)=0$
$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(4)=0$
$f(5)=1$
$f(6)=0$
$f(7)=1$
$f(8)=0$
$f(9)=0$
$f(10)=1$
$f(11)=2$
$f(12)=0$
$f(13)=3$
$f(14)=1$
$f(15)=1$
$f(16)=0$
$f(17)=4$
$f(18)=0$
$f(19)=4$
$f(20)=1$
$f(21)=1$
$f(22)=2$
$f(23)=5$
$f(24)=0$

0	1	2	3	4	5
|	|	|	|	|	|
11	7	2	1	2	1

~~11+5+2+1=19~~

$11^2+5^2+2^2+1=121+\overset{29}{25+4}+1=151$

$$\frac{12x+11}{4x+3}\le -8x^2-30x-17$$

$$12x+11\le -(4x+3)(8x^2+30x+17)$$

$$12x+11+32x^3$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f(y) > f(x)$

$f(y) = f(a) + f(b) + f(c) \ldots + f(d) = \left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{b}{4}\right] + \left[\frac{c}{4}\right]$

Где $a, b, c, \ldots d$ – простые множители

$f(y) \geq 1$, при $a = 5$, и больше $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23\}$

$\cancel{4 \cdot C_8^1 \cdot C_8^2 \cdot C_8^3 \cdot \ldots \cdot C_8^8 = 4 \cdot 8 \cdot \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} \cdot$

$\cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$

$\frac{4 \cdot 8^7 \cdot 7^6 \cdot 6^5 \cdot 5^4 \cdot 3^2 \cdot 2^1}{2^6 \cdot 3^5 \cdot 4^4 \cdot 5^3 \cdot 6^2 \cdot 7} = \frac{2^{21} \cdot 7^6 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 3^2 \cdot 2}{2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7}$ 2^{13} 7^5 5

$\cancel{2^{19} \cdot 7^5 \cdot 5}$

$\cancel{P_4 \cdot 8 = 4! \cdot 8 = 24 \cdot 8 = 160 + 32 =} \boxed{192}$

$\cancel{f(6) = f(2) + f(3) = 0}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$\cancel{5^{\log_{12}(x^2+}}$ $x^2+18x>0$, $x^2+18x=t$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$x(x+18)>0$

$+ \quad -18 \quad - \quad 0 \quad +$

$\cancel{\log_{12}t + \log \quad \log_5(5^{\log_{12}t}+t)}$

$\cancel{\log_{12}t \geq \log_5(t^{\log_{12}13}-t)}$

2^x: $y' = \ln(2)\cdot 2^x$

$\cancel{f'(a) = \ln(5)\cdot 5^a + \ln(12)\cdot 12^a}$

$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x \end{cases}$

$\begin{cases} x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty) \\ 5^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - (x^2+18x) \end{cases}$

1) $x \leq -9$: (x^2+18x) – неонатон. убывает

$\cancel{f(-9) = 81 - 2\cdot 81 = -81}$

$\log_{12}(x^2+18x) \geq \log_5((x^2+18x)^{\log_{12}13} - (x^2+18x))$

$144 + 81 = 225$

$18 \times 18 = 324$

$144 \times 4 = 576$; $576 + 324 = 900$

$9^2 - 9^2 + 2^2\cdot 12^2 = 2^2(9^2+12^2) = 2^2\cdot 15^2$

$4\cdot 6^2 -$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Пусть $t = x^2 + 18x$, $t > 0$ $\qquad$ $t=12$ - корень

$$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$$

$$\cancel{\log_{12} t \geq \log_5 (t^{\log_{12} 13} - t)}$$

$5^2 + 12^2 = 13^2$ $\qquad$ $\cancel{\log_{12} 13 = \frac{1}{2} \log_{12}(5^2+12^2)}$

$$\cancel{\frac{\log_5 t}{\log_5 12} \geq \log_5 (t \quad (12-1)(5-1)}$$

$$\cancel{f(t) = t^{\log_{12} 13} - t}$$

$$\cancel{f'(t) = \ln(\log_{12} 13) \cdot t \quad (\log_{12} 13) \cdot t^{\log_{12} \frac{13}{12}}} - 1 = 0$$

$$\cancel{t_0 = \sqrt[\log_{12}\frac{13}{12}]{\log_{13} 12}}$$

$-$ $\quad$ $+$ $\quad$ t_0

$$5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq \cancel{t^{\log_{12} 13}} \quad 13^{\log_{12} 13 \cdot \log_{13} t}$$

$$t^{\log_{12} 13} = 13^a$$

$$\log_{12} 13 \cdot \log_{13} t = a$$

$\cancel{\log_{13} t = \log_{12} a}$

$\cancel{a = 12^{\log_{13} t}}$

$144 \times 12 = 288 + 144 = 1728$; $1728 + 125 = 1853$

$169 \times 13 = 507 + 169 = 2197$

$$5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq 13^{\log_{12} t}$$

$\cancel{t = 144}$

$\log_{12} t = a$ $\qquad$ $5^a + 12^a \geq 13^a$ $\qquad$ $5^3 + 12^3 = 125 + 144 \cdot 12 = 1853$

$a \in [\cancel{00}, 2]$ $\qquad$ $\frac{1}{5} + \frac{1}{12} \geq \frac{1}{13}$ $\qquad$ $\frac{1}{125} + \frac{1}{1728} \geq \frac{1}{2197}$

☑ черновик $\quad$ ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

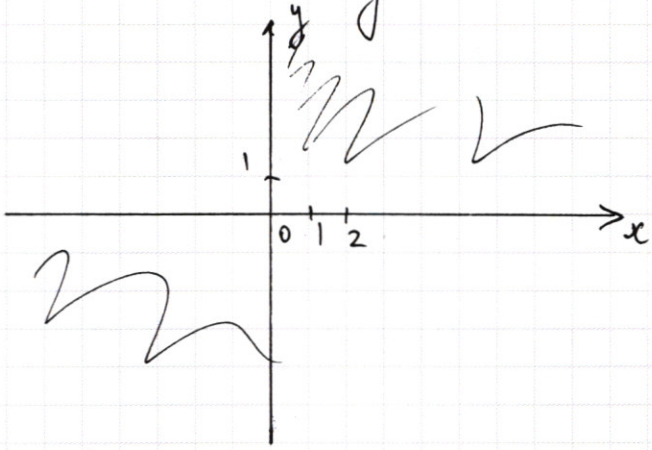
$(x-2)^2-4+(3y-3)^2-9=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

$xy-x-2y+2\geq 0$

$y(x-2)\geq x-2$

$(x-2)(y-1)\geq 0$



~~x-2=±5~~ $x-2=a$

$y-1=b$

$\cos\alpha\cdot(2\sin\alpha-1)$

$\cos^2\alpha-1$ $\quad 2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin^2\alpha$

$\sin\alpha(2\cos\alpha+1)=0$

$$\begin{cases} a+2-2(b+1)=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=5^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=5^2 \end{cases}$$

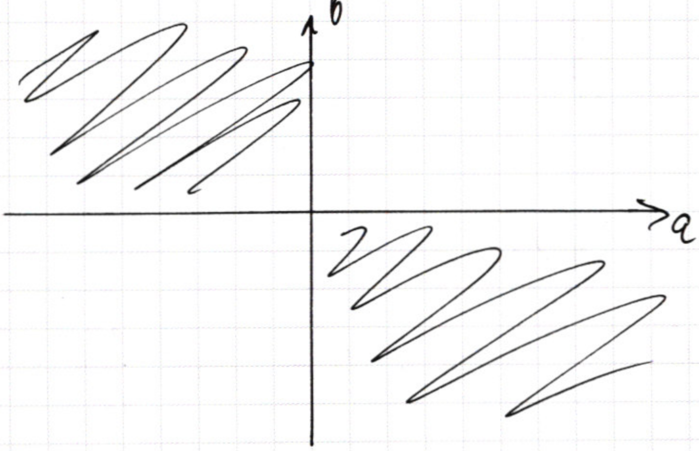
$(a-2b)^2=ab$

$a^2-4ab+4b^2=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$D=25b^2-16b^2=9b^2$

$a=\dfrac{5b\pm 3b}{2}=$



$\cancel{36}+9\cdot 4-6\cdot 4-18\cdot 2=12$ (36, 24, 36)

$x=2-\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ $\quad y=1-\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

$2-\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ $\quad -2+2\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

~~$\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\sqrt{\ }$~~

$\dfrac{5}{2}+9\cdot\dfrac{5}{2}=\dfrac{10\cdot 5}{2}=25$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

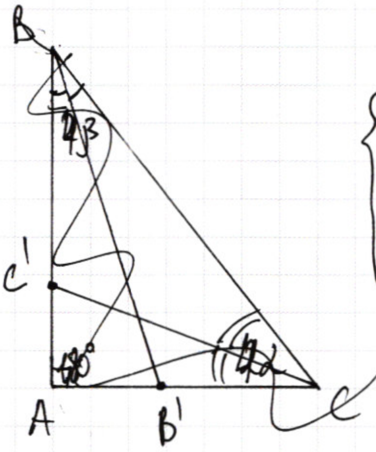
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$



$$\begin{cases} \sin2\alpha\cos2\beta + \cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \sin2\alpha\cos4\beta + \cos2\alpha\sin4\beta + \sin2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$\sin2\alpha(1+\cos4\beta) + \cos2\alpha\cdot\sin4\beta = -\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha\cdot2\cos^2 2\beta + \cos2\alpha\cdot2\cos2\beta\sin2\beta = -\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} \sin2\alpha\cos2\beta + \cos2\alpha\cdot\sin2\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos2\beta(\sin2\alpha\cos2\beta + \cos2\alpha\sin2\beta) = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\cos2\beta\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{2}{5}$ $\quad \cos2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \Big|\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-1}$ $\quad \boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}}$

$-2\sin2\alpha - \cos2\alpha = 1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - \cancel{1} = -\cancel{1}$

$\cos\alpha(4\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0$

$4\sin\alpha = -2\cos\alpha$

$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}}$

$\sin\beta = \dfrac{16\cdot\cancel{17}\cdot 30}{30\cdot 34\cdot\cancel{17}} = \dfrac{8}{17}$ $\cos\beta = \dfrac{15}{17}$ $\begin{array}{r} +900 \\ 625 \\ \hline 1525 \end{array}$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ $BD = 17$, $AB = \dfrac{25\cdot 17}{30}$ $\frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

$\begin{array}{r} 289 \\ -64 \\ \hline 225 \end{array}$ 15^2 $\frac{61}{36}$

$AD^2 = 17^2 + \dfrac{25^2}{30^2}\cdot 17^2 - \dfrac{50}{30}\cdot 17^2\cdot\dfrac{15}{17}$

$= \dfrac{30^2+25^2}{30^2}\cdot 17^2 - \dfrac{50\cdot 17}{2} = \left(1+\left(\frac{25}{30}\right)^2\right)\cdot 17^2 - 25\cdot 17 =$

$= 17\cdot\frac{4}{6}$ $CD = 8$, $AC = \dfrac{25}{17}\cdot\dfrac{17\cdot 16}{30} = \dfrac{16\cdot 25}{30} = \dfrac{40}{3}$

$DE = \dfrac{17\cdot 8}{40}\cdot 3 = \dfrac{51}{5}$ $AE = \dfrac{51\cdot 3 + 200}{15} = \dfrac{353}{15}$

$\begin{array}{r} 136 \\ 12 \\ \hline 16 \end{array}\Big|\begin{array}{l} 4 \\ \hline 34 \end{array}$ $\boxed{25\sqrt{\frac{34}{6}\left(\frac{34}{6\cdot 25} - \frac{1}{6}\right)}}$

$64 + \dfrac{16^2\cdot 25^2}{30^2} = \dfrac{8^2\cdot 30^2 + 8^2\cdot 50^2}{30^2} = 8^2 + \left(\dfrac{50}{30}\right)^2\cdot 8^2 =$

$= 8\cdot\sqrt{\dfrac{900+2500}{900}}$ $8\cdot\sqrt{\dfrac{25+9}{9}} = \dfrac{8}{3}\cdot\sqrt{34}$

$\dfrac{DE}{AE}$ $\dfrac{AE}{AD}\cdot r = \dfrac{16\cdot 17}{30}\cdot\dfrac{25\sqrt{34}\cdot 3}{26 - 8\sqrt{34}} = 25\cdot$ $\begin{array}{r} 125 \\ \times 17 \\ \hline 875 \\ 125 \\ \hline 2125 \end{array}$

$\frac{17}{15}$

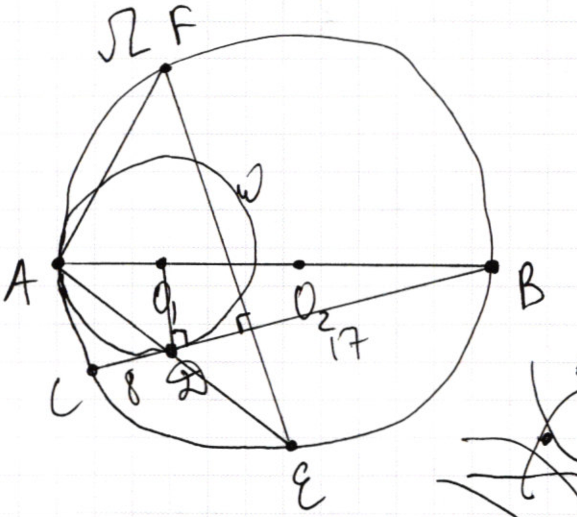
$\dfrac{5}{\sqrt{34}}\cdot\dfrac{50\cdot 17}{30} = \dfrac{25}{6}\cdot\dfrac{34}{\sqrt{34}}$ 25

$\frac{34}{6}\left(\frac{34}{\ }\right.$ $125\cdot 17$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\angle AFE = \frac{1}{2}\angle AO_2E$

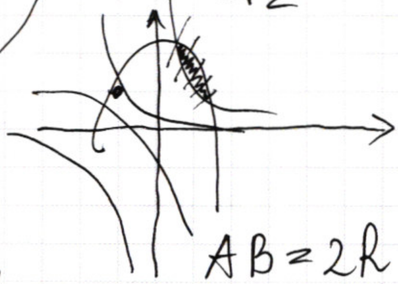
$16 \times 17 = 112,\ 16,\ 272$

$25 \times 17 = 175,\ 25,\ 425$

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$34 \times 34 = 136,\ 102,\ 1156$

$1156 - 256 = 900$



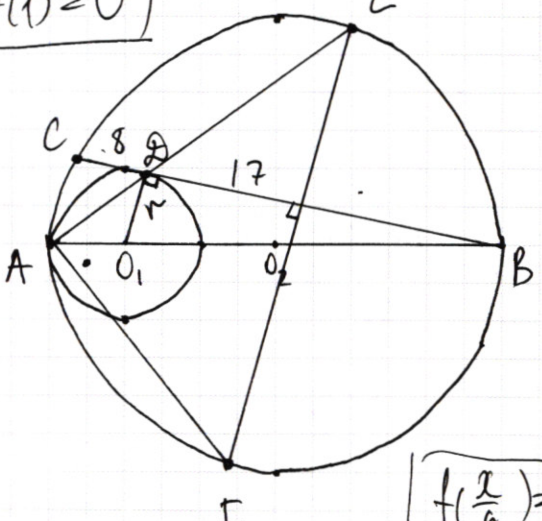
$f(p) = f(1) + f(p)$

$\boxed{f(1) = 0}$

$AB = 2R$

$O_1B = 2R - r$

$\frac{17 \cdot \cancel{8} \cdot 3}{\cancel{8}\sqrt{34}} = \frac{17 \cdot 3 \cdot \sqrt{34}}{34} = \frac{3}{2}\sqrt{34}$



$\frac{2R}{2R - r} = \frac{25}{17}$

$f(-2) = f(2) + f(-1) = f(-1)$

$34R = 50R - 25r$

$25r = 16R \quad R = \frac{25}{16}r$

$\boxed{f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)}$ $f(a) = f(ab) - f(b)$

$(2R - r)^2 = r^2 + 17^2$

$\left(\frac{50}{16}r - r\right)^2 = r^2 + 17^2$

$\frac{34^2}{16^2} \cdot r^2 = r^2 + 17^2$

$\frac{x}{y}$

$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$

$\frac{34^2 - 16^2}{16^2} \cdot r^2 = 17^2$

$r = \frac{16 \cdot 17}{\sqrt{34^2 - 16^2}} = \frac{16 \cdot 17}{30}$

$R = \frac{25 \cdot 17}{30}$