МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{x(y-6)-(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$

$\begin{cases} V=x-1 \\ u=y-6 \\ -6V+u=\sqrt{u\cdot V} \\ 9V^2+u^2=90 \end{cases}$

$\begin{cases} V=x-1 \\ u=y-6 \\ u\geqslant 6\cdot V \\ u^2-13\cdot u\cdot V+36V^2=0 \\ 9V^2+u^2=90 \end{cases}$

$\begin{cases} V=x-1 \\ u=y-6 \\ u\geqslant 6\cdot V \\ (u-4\cdot V)(u-9\cdot V)=0 \\ 9V^2+u^2=90 \end{cases}$

$$\begin{cases} v = x-1 \\ u = y-6 \\ \left[\begin{array}{l} u = 4v \\ u = 9v \end{array}\right. \\ u \geqslant 6\cdot v \\ 9v^2 + u^2 = 90 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} v = x-1 \\ u = y-6 \\ u = 4v \\ v \leq 0 \\ 25v^2 = 90 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} v = x-1 \\ u = y-6 \\ u = 4v \\ v = -3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-1 = \cancel{-12}\,-3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y-6 = -12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} v = x-1 \\ u = y-6 \\ u = 9v \\ v \geqslant 0 \\ 90v^2 = 90 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-1 = 1 \\ u = y-6 \\ u = 9 \\ v = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 15 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2;15)$, $\left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}};\ 6-12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

Пусть $t = \log_5(26x-x^2)$, тогда нер-во перепишется в виде (модуль можно раскрыть со знаком − это => из ОДЗ)

$12^t + 5^t \geqslant 13^t \quad | : (13^t)\ (>0)$

(т.к. по св-ву log: $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$)

$\left(\frac{12}{13}\right)^t + \left(\frac{5}{13}\right)^t \geqslant 1$

Рассмотрим функцию $f(t) = \left(\frac{12}{13}\right)^t + \left(\frac{5}{13}\right)^t$, т.к. эта сумма убывающих ф-ций, то $f(t)$ ↓↓ на $\mathbb{R}$, также заметим, что $f(2)=1$, поэтому

$f(t) \geqslant 1 \Leftrightarrow f(t) \geqslant f(2) \Leftrightarrow t \leqslant 2.$

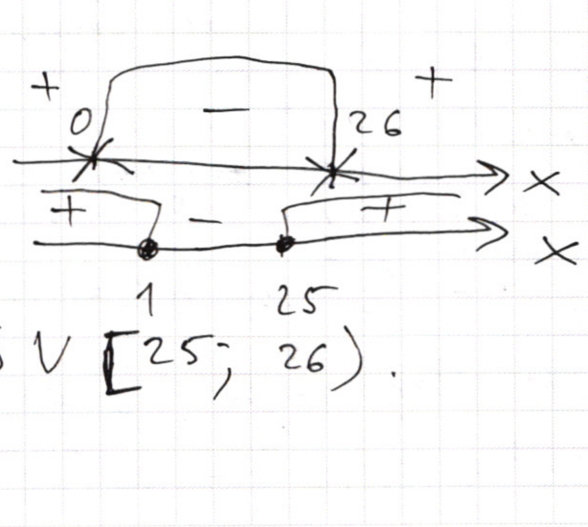
Теперь вернёмся к x:

$\log_5(26x-x^2) \leqslant 2 \ (= \log_5 25)$

$\begin{cases} 26x - x^2 > 0 \\ 26x - x^2 \leqslant 25 \end{cases}$

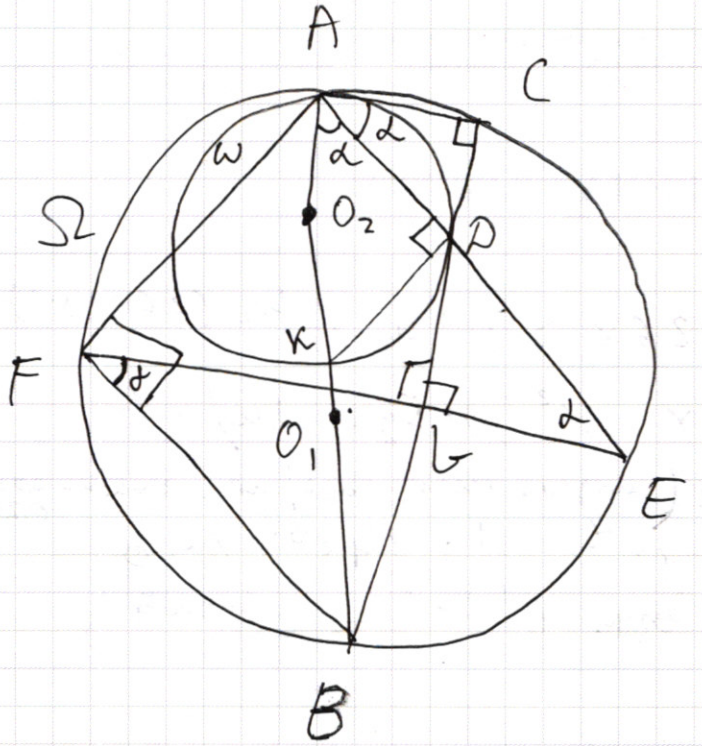
$\begin{cases} x^2 - 26x < 0 \\ x^2 - 26x + 25 \geqslant 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x(x-26) < 0 \\ (x-25)(x-1) \geqslant 0 \end{cases}$



Ответ: $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$.

4.



Дано:

AB – диаметр

$(\Omega, R), (\omega, r)$

$BC \cap \omega = D$

BC – кас. к ω

$AD \cap \Omega = E$

$EF \perp CB$

$CD = 12$

$BD = 13$

Найти:

$r, R, \angle AFE$ – ?

$S(AFE)$ – ?

Решение:

~~1) Понятно:~~

1) Понятно, что диаметр AB большей окружности проходит и через центр малой окружности (т.к. если провести общую касательную к обеим окружностям и радиусы малой и большей окружности ⊥ этой касат., т.е. в т. A, то т.к. прямая, проходящая через данную т. A { и ⊥ прямой в этой т. ~~A~~ (касательной) единственна, то т. A и ц. O_1 и O_2 ∈ одной прямой)

2) $\angle ACB = 90^\circ$ (опир. на диаметр), AD – бисс. ~~к~~ ∠ CAB (пусть $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$) (по лемме Архимеда) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = 12x$, $AB = 13x$. По теореме Пифагора в Δ-ке BAC:

$169x^2 = 144x^2 + 25^2 \Rightarrow x = 5$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow AC = 60,\ AB = 65 \Rightarrow R = \frac{AB}{2} = \frac{65}{2} = 32,5$

3) Пусть $AB \cap \omega = K$, тогда т.к. $\angle ADK = 90°$, (опир. на диаметр)
то $\triangle DAC \sim \triangle KAD$

$\Rightarrow \frac{AK}{AD} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AK = \frac{AD^2}{AC} =$

$= \frac{AB\cdot AC - DC\cdot BD}{AC} = \frac{65\cdot 60 - 12\cdot 13}{60} = \frac{\cancel{12}\cdot 13\cdot 24}{\cancel{12}\cdot 5} = \frac{13\cdot 24}{5}$

(по ф-ле длине биос. и AC по п.2)

$\Rightarrow r = \frac{AK}{2} = \frac{13\cdot 12}{5} = \frac{156}{5} = 31,2$

4) $\angle AFB = 90°$, $\angle EFB = \alpha$
(опир. на диаметр) (вписн. угол $\angle BAE = \angle EFB$)

$\Rightarrow \angle AFE = 90° - \alpha = \angle ADC$

5) В $\triangle$-ке ADC: $tg (90° - \alpha) = tg \angle ADC = \frac{AC}{CD} =$
$= \frac{60}{12} = 5 \Rightarrow \angle ADC = \angle AFE = \text{arctg}\, 5$
(по 4п.)

6) Пусть $EF \cap BC = G$, тогда т.к. $CG \perp AC$
и $CG \perp FE \Rightarrow AC \parallel FE \Rightarrow \angle CAE = \angle AEF = \alpha$
(нак. леж.)

$\Rightarrow \triangle FAE$ – прямоуг. $\Rightarrow \angle FAE = 90° \Rightarrow FE$ – диаметр

$\Rightarrow FE = 65$, т.к. $\angle AFE = \text{arctg}\, 5$, то если
(по 5п.)
обозначить $AE = 5y$, то $AF = y$ и по т. Пифагора:

$25y^2 + y^2 = FE^2 = 65^2$

$26y^2 = 65^2$

$y^2 = \frac{65^2}{26}$, а $S(AFE) = \frac{1}{2}\, 5\cdot y\cdot y = \frac{5y^2}{2} =$

$= \frac{5\cdot 65^2}{52} = \frac{5\cdot 5\cdot 5\cdot \cancel{13}\cdot 13}{2\cdot 2\cdot \cancel{13}} = \frac{125\cdot 13}{4} = \frac{1625}{4} = 406,25$

Ответ: 31,2; 32,5; arctg 5; 406,25.

$\frac{65^2}{26} \cdot \frac{5}{2} = \cancel{82}$

$= \frac{13 \cdot 5 \cdot \cancel{13} \cdot 5 \cdot 5}{\cancel{13} \cdot 2 \cdot 2} = \frac{125 \cdot 13}{4} =$

$= \frac{1625}{4} = \frac{1600}{4} + \frac{25}{4} = 400 + 6,25 =$

$= 406,25$

$\cancel{125 \times 13}$ $\cancel{325}$

$375 + 1250$

$\cancel{1450}$ 1550

$\cancel{1525}$ 1625

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 13 \\ \hline 375 \\ 125 \\ \hline 1625 \end{array}$$

$-\operatorname{tg} y = \cancel{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}}$

$\cancel{\operatorname{tg} (}$

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (y$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{17}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=-\frac{2}{17}$

Пусть $2\alpha = x$, $2\beta = y$, тогда

$\sin(x+y)\overset{(1)}{=}-\frac{1}{17}$ и $\sin(x+2y)+\sin(x)\overset{(2)}{=}-\frac{2}{17}$

(2): $\sin(x+2y)+\sin x = \sin x\cos(2y)+\cos x\sin(2y)+\sin x =$

$=\sin x(2\cos^2 y-1)+2\cos x\sin y\cos y+\sin x=$

$=2\sin x\cos^2 y+2\cos x\sin y\cos y = 2\sin(x+y)$ ((1))

$2\sin x\cos^2 y+2\cos x\sin y\cos y = 2\sin x\cos y+2\sin y\cos x$

$2\sin x\cos y(\cos y-1)+2\sin y\cos x(\cos y-1)\overset{(3)}{=}0$

$(\cos y-1)(\sin x\cos y+\sin y\cos x)\overset{(3)}{=}0$

$\left[\begin{array}{l}\cos y = 1\\ tg(-x)=tg(y)\end{array}\right.$ (~~$\cos x\neq 0$, иначе (3) не~~ $\cos x=0$

~~$\cos y = -\frac{1}{17}$ и (3) не имеет решений и $\cos y\neq 0$~~ $\cos y = 0$

~~иначе (3) не имеет решений~~ рассмотрим отдельно)

($tg\,x = tg(y+\pi)$ разбивается на 2 случая: $y+\pi = x+2\pi k$, $y+\pi = x+\pi+2\pi l$, $k,l\in\mathbb{Z}$)

Рассмотрим эти случаи по отдельности:

1) $\cos y = 1$:

$\cos y = 1 \Leftrightarrow y = 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\sin(x+y)=\sin x = -\frac{1}{17}$ ~~что~~. Сделаем обратную

замену: $\sin x = \sin(2\alpha) = -\frac{1}{17}$

$2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{34}$

$tg\,\alpha\cdot\cos^2\alpha = -\frac{1}{34}$

$tg\,\alpha\cdot\frac{1}{1+tg^2\alpha} = -\frac{1}{34}$

$tg^2\alpha + 34\, tg^2\alpha + 1 = 0$

$\frac{D}{4} = 17^2 - 1 = (17-1)(17+1) = 16 \cdot 18 = (4 \cdot 3)^2 \cdot 2$

$tg\,\alpha = -17 \pm 12\sqrt{2}$

2) $y = -x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

~~y=...~~, тогда

$\sin(x+y) = -\sin(0) = -\frac{1}{17}$ — это невозможно

~~$\sin(2x) = \frac{1}{17}$. Сделаем обратную замену~~

~~Сделаем обратную замену~~

$\cancel{\sin(4\alpha) = \frac{1}{17}}$

$\cancel{2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha) = \frac{1}{17}}$

$\cancel{4\sin\alpha\cos\alpha\cos(2\alpha) = \frac{1}{17}}$

$4tg\,\alpha\cos^2\alpha(2\cos^2\alpha - 1) = \frac{1}{17}$

$4tg\,\alpha \cdot \frac{1}{1+tg^2\alpha}\left(\frac{2}{1+tg^2\alpha} - 1\right) = \frac{1}{17}$

$4tg\,\alpha \cdot \frac{1}{1+tg^2\alpha}\left(\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right) = \frac{1}{17}$

$\frac{4tg\,\alpha(1-tg^2\alpha)}{(1+tg^2\alpha)^2} = \frac{1}{17}$

$68\,tg\,\alpha - 68\,tg^3\alpha = 1 + tg^4\alpha + 2tg^2\alpha$

$tg^4\alpha + 68tg^3\alpha + 2tg^2\alpha - 68tg\,\alpha + 1 = 0$

$2tg(2\alpha)\cos^2(2\alpha) = \frac{1}{17}$

Аналогично пред. сл. получаем:

$tg(2\alpha) = -17 \pm 12\sqrt{2}$

$\frac{2tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha} = -17 \pm 12\sqrt{2}$. Рассмотрим случ.:

1. $2tg\,\alpha = -17 + 12\sqrt{2} + (-17+12\sqrt{2})tg^2\alpha$

$(-17+12\sqrt{2})tg^2\alpha - 2tg\,\alpha - 17 + 12\sqrt{2} = 0$

$\frac{D}{4} = 1 - (-17+12\sqrt{2})^2 =$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 7

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $y = -x + \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\sin(x+y) = \sin(\pi) = -\frac{1}{17}$, что невозможно

4) $\cos x = 0$:

~~sin~~ тогда $x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ и (1) и (2) примут вид

$$\begin{cases} \sin(y) = -\frac{1}{17} & ((1)\ \text{примет}) \\ 2\sin x(1-\sin^2 y) = -\frac{2}{17} & ((2)) \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sin(y) = -\frac{1}{17} \\ \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ 1-\sin^2 y = -\frac{1}{17} \end{array}\right. \Leftrightarrow \varnothing \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ 1-\sin^2 y = \frac{1}{17} \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

5) $\cos y = 0$:

~~тогда $y = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ и (1) и (2) примут вид $\sin x = -\frac{1}{17}$~~ ~~$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{17}$~~ т.к. значений тангенса ~~sin~~ ≥ 3, то ~~sin~~ этот случай точно должен подходить, поэтому

$$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{17}$$

$$\cos x = -\frac{1}{17}$$

$2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = -\frac{1}{17}$. Сделаем обратную замену: $2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{1}{17} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{17}$ ~~cos~~ так $\Leftrightarrow \frac{1}{1+tg^2\alpha} = \frac{8}{17} \Leftrightarrow 17 = 8 + 8tg^2\alpha \Leftrightarrow tg^2\alpha = \frac{9}{8} \Leftrightarrow tg\alpha = \pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$

Ответ: $tg\alpha = -17 \pm 12\sqrt{2};\ \pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$ – выполнено для всех $x \in (\frac{2}{3}; 2]$

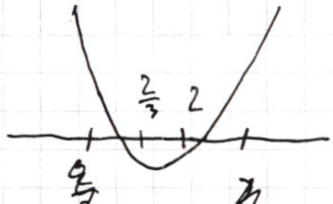
$\Leftrightarrow \begin{cases} 18x^2-(51+a)x+28-b \leq 0 \\ (ax+b)(3x-2)+6x-8 \leq 0 \end{cases}$ – выполнено для всех $x \in (\frac{2}{3}; 2]$

(т.к. $3x-2>0$ при $x \in (\frac{2}{3}; 2]$)

$\begin{cases} 18x^2-(51+a)x+28-b \leq 0 \\ 3ax^2+x(6-2a+3b)-8-2b \leq 0 \end{cases} \quad (1)$

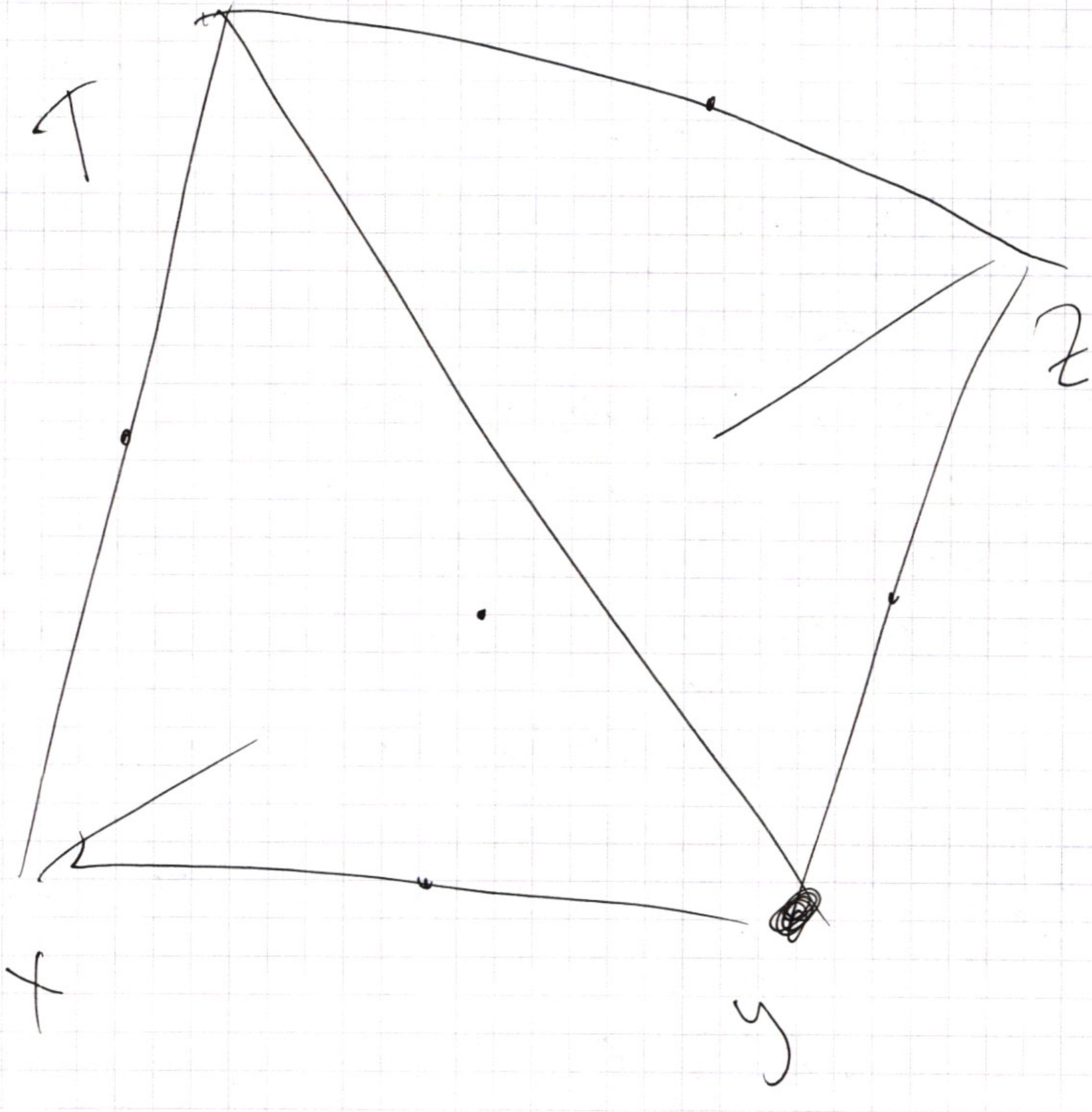
Пусть $f(x) = 18x^2-(51+a)x+28-b$ и $g(x) = 3ax^2+x(6-2a+3b)-8-2b$, тогда $f(x) \leq 0$ выполнено для всех $x \in (\frac{2}{3}; 2]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\frac{2}{3}) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases}$ и $g(x) \leq 0$ выполнено для всех $x \in (\frac{2}{3}; 2] \Leftrightarrow$



$\begin{cases} g(\frac{2}{3}) \leq 0 \\ g(2) \leq 0 \end{cases}$, т.е. исходная система (1) выполнено для всех $x \in (\frac{2}{3}; 2]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{(51+a)^2-4(28-b)18>0} \\ \cancel{(6-2a+3b)^2+4(8+2b)3a>0} \\ 18\cdot\frac{4}{9} - \frac{2}{3}(51+a)+28-b \leq 0 \\ 18\cdot 4-(51+a)2+28-b \leq 0 \\ 3\cdot a\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{3}(6-2a+3b)-8-2b \leq 0 \\ 3\cdot a\cdot 4+2(6-2a+3b)-8-2b \leq 0 \end{cases}$


T
Z
X
Y

~~$(51+a)^2 \ldots \geq 2a$~~

~~$(b+2a+3b)^2 \ldots \geq 2a$~~

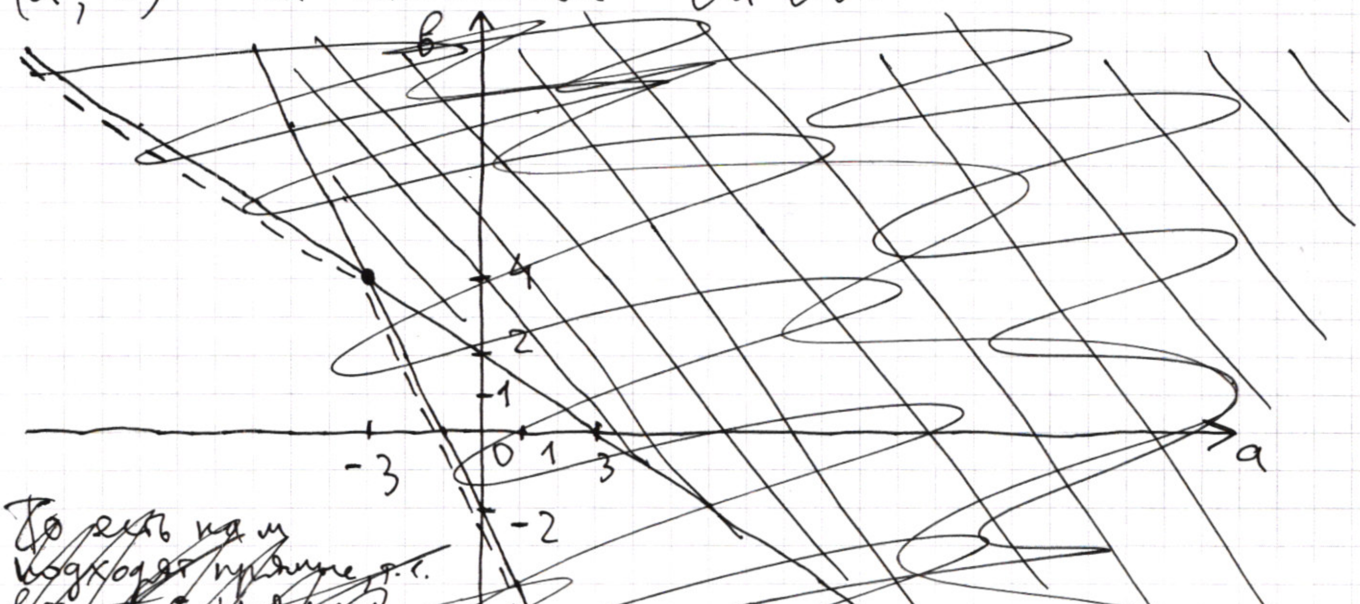
$$\begin{cases} \frac{2}{3}(51+a) \geq 36 - в \\ 2(51+a) \geq 100 - в \\ \frac{4}{3}a + 4 - \frac{4}{3}a + 2в - 8 - 2в \leq 0 \text{ — верно} \\ 12a + 12 - 4a + 6в - 8 - 2в \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} в \geq 2 - \frac{2}{3}a \\ в \geq -2 - 2a \\ 8a + 4 + 4в \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} в \geq 2 - \frac{2}{3}a \\ в \geq -2 - 2a \\ в \geq -1 - 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} в \geq 2 - \frac{2}{3}a \\ в \geq -1 - 2a \end{cases}$$

Изобразим множество, подходящих этой системе $(a; в)$ на плоскости $Oa\,Oв$:



~~То есть нам подходят прямые т.т. все т. ∈ прямым $в = 2 - \frac{2}{3}a$ или $в = -2 - 2a$ и все точки леж~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 — 7 шт.~~

$28+4-1=25$

18: 18 не прош

$x=4$: 17

$x=5$: 16

$f(x)+f(\frac{1}{y})<0$

$f(x)-f(y)<0$

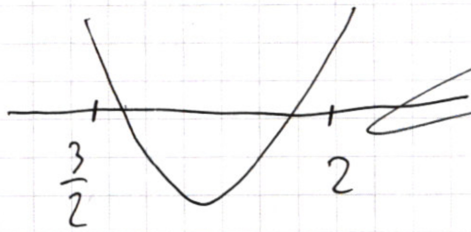
$f(x)<f(y)$

$\ln x$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$x\in(\frac{2}{3}; 2]$

$$\begin{cases} 18x^2-(51+a)x+28-b \leq 0 \\ -3ax^2-x(6+2a+3b)+8-2b \geq 0 \end{cases}$$

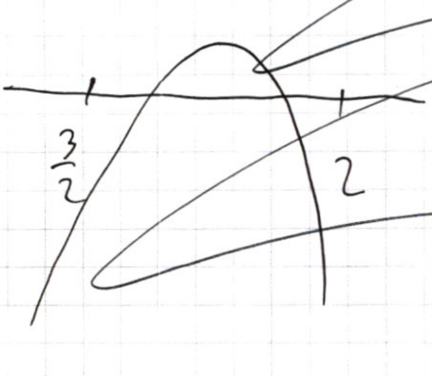


$$\begin{cases} D>0 \\ f(\frac{3}{2})\geq 0 \\ f(2)\geq 0 \end{cases}$$

$D\geq 0$

$g(\frac{3}{2})\leq 0$

$g(2)\leq 0$

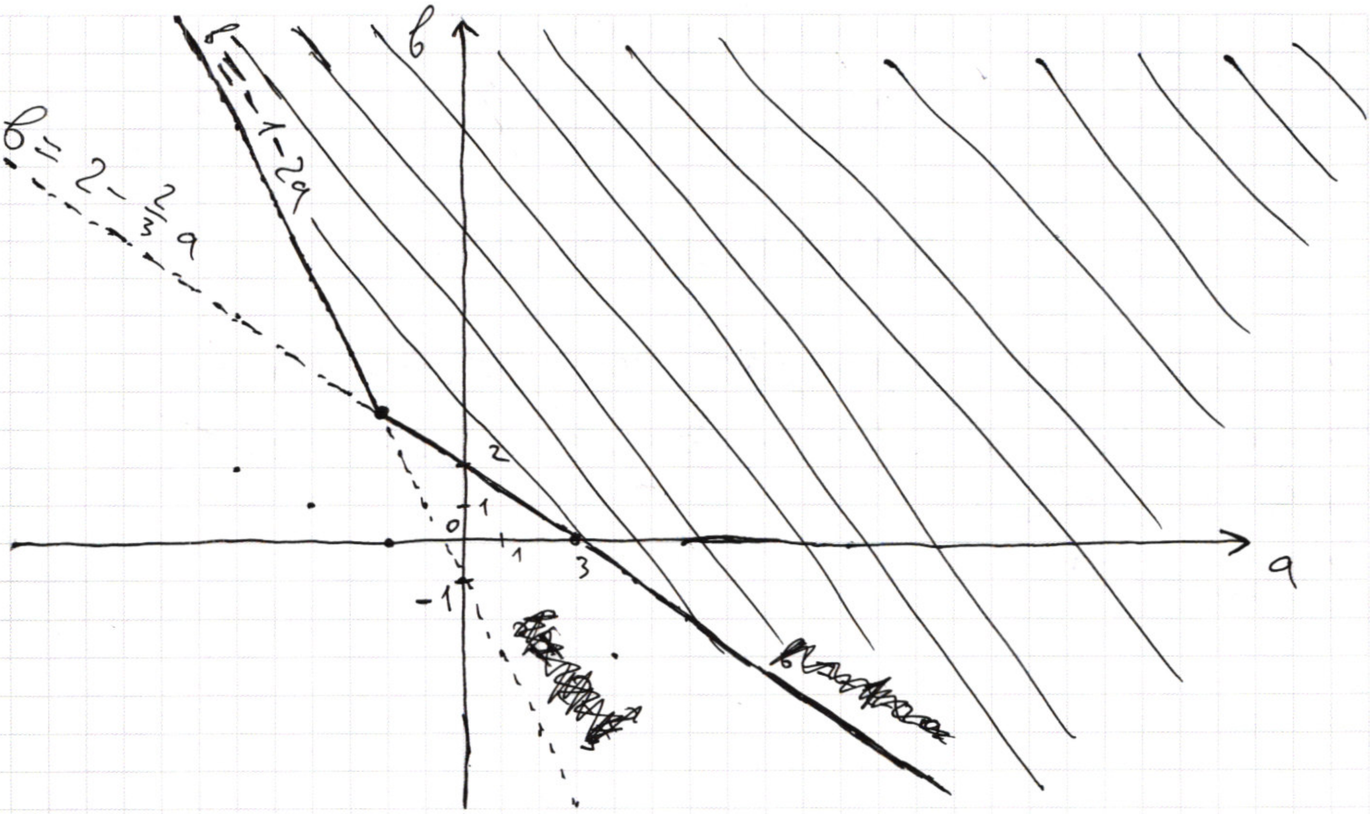


☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



То есть нам подходит всё, что выше прямой $в = -1-2a$ и прямой $в = -1-2a$

Ответ: ↗

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

То есть нам подходят все т., лежащие выше прямой $b = 2 - \frac{2}{3}a$ и прямой $b = -2 - 2a$.

Ответ: →

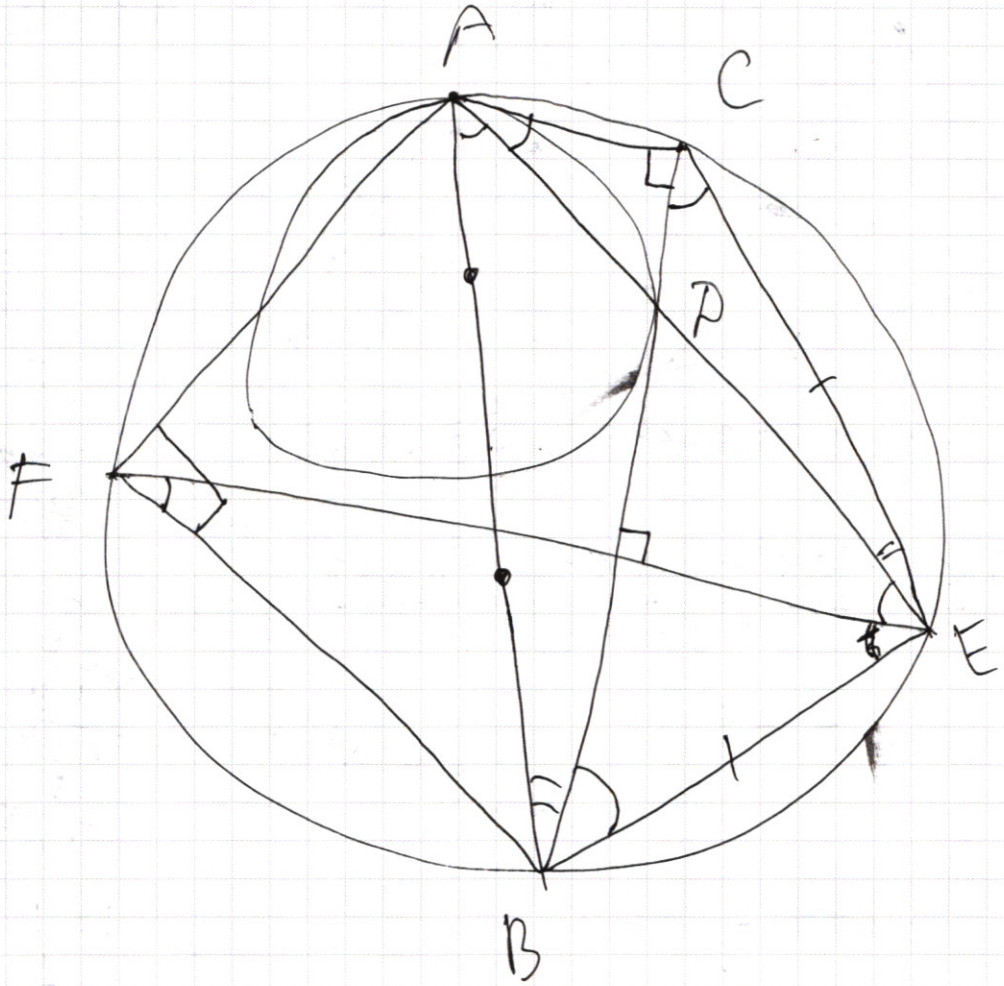
☑ черновик ~~☑ чистовик~~

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

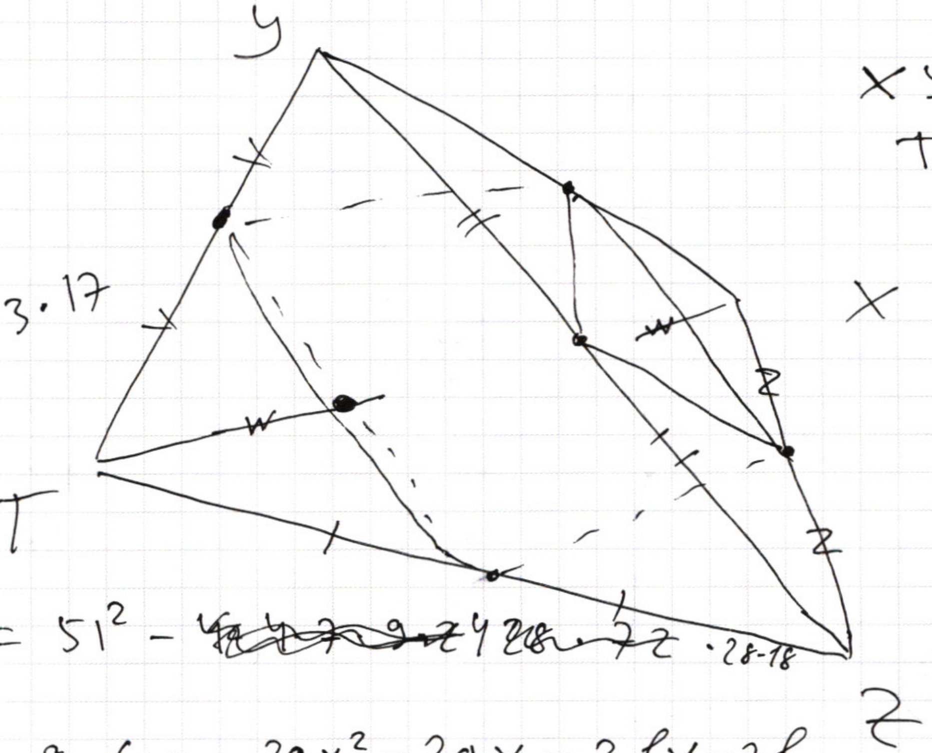
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$CD = 12$
$BD = 13$
$BC = 25$
$AC = 12x$
$AB = 13x$

$\cancel{13x^2}$ $169x^2 = 144x^2 + 625$
$25x^2 = 25^2$
$x^2 = 25$
$x = 5$

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$$



$XY=\sqrt{3}$

$TX=\sqrt{2}$

$TZ=2$

$51=3\cdot 17$

$46-51$ $\quad 51 \times 5 = 255$

$D=51^2-\cancel{4\cdot 4\cdot 7\cdot 9\cdot 2}\ 4\cdot 28\cdot 72 \cdot 28\cdot 18$

51×51: 51, 255, 2601

$$\frac{8-6x-3ax^2-2ax-3bx-2b}{3x-2} \geq 0$$

6

28×18: 224, 28, 504

$2 \geq a+b \geq -5$

$-x(6+2a+3b$

$-1 \geq \cancel{a+b}\ 2a+b \geq$

$2101 - 4 = 2097$

$2097 = 4$

-16

$8 \quad | 497$

8

X

$25\cdot 24$

$28-4+1=25$

$5-4+1$

$x<y$

$\ln x < \ln y$

$\cancel{\log}\ \ln x + \ln\frac{1}{y} < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$\frac{1}{28} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{4}$ $\quad \cancel{\leq \frac{1}{y}}$ $\quad \cancel{5, 7, 11}$

$f(ab)=f(a)+f(b),\ f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{17}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin(x+y)=-\frac{1}{17}$; $\sin(x+2y)+\sin x=-\frac{2}{17}$

$\boxed{\pm\sqrt{1-\frac{1}{17^2}}=\pm\frac{4\cdot 3\sqrt{2}}{17}=\cos(x+y)}$

$\cancel{\sin(x+2y)=-\frac{1}{17}\cos(y)-\frac{12\sqrt{2}}{17}\sin(y)+\sin x=-\frac{2}{17}}$

$\sin x\cos y+\cos x\sin y=-\frac{1}{17}$

$\cancel{2\sin x\cdot\cos y\cdot\sin y}$

$\cancel{\sin x\cdot(\cos y-\sin y)(\cos y+\sin y)+2\cos x\sin y\cos y}=$

$=\cancel{\sin x\cos^2 y-\sin x\sin^2 y}$

$=\cancel{\sin x(\cos^2}\ 2\sin x\cos^2 y+2\cos x\sin y\cos y=$

$=2\sin x\cos y+2\cos x\sin y$

$2\sin x\cos y(\cos y-1)+2\cos x\sin y(\cos y-1)=0$

$\left[\begin{array}{l}\cos y=1\\ \sin x\cos y=\cos x\sin y\end{array}\right.$

$\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y$

$x=y$

$x=y+\pi$

$\frac{2(2835+6825)}{17}$

$6825-8825$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

1. $\cos y = 11$

$\sin x = -\frac{1}{17}$

$\frac{2t}{1+t^2} = -\frac{1}{17}$

$-34t = -1 - t^2$

$t^2 - 34t + 1 = 0$

$\frac{D}{4} = 17^2 - 4 = 15 \cdot 19$

$t = 17 \pm \sqrt{15 \cdot 19}$

2. $y = x + 2\pi n$

$\sin(2x) = -\frac{1}{17}$

$\frac{2tg(x)}{1+tg^2(x)} = -\frac{1}{17}$

$\frac{2t}{1+t^2} = t17 \pm \sqrt{15 \cdot 19}$

$\cancel{\dfrac{2\dfrac{2t}{1+t^2}}{1+\dfrac{4t^2}{1+t^4+2t^2}}}$

3. $y = x + \pi + 2\pi n$

$\sin(2x) = \frac{1}{17}$

$\frac{tl}{1} - = h\omega$

$\frac{tl}{1} = h\omega$

$*h\omega$

$0 = h\omega$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{17}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{17}$

$\boxed{\pm\sqrt{1-\frac{1}{17^2}} = \pm\sqrt{\frac{16\cdot 9\cdot 2}{17^2}} = \pm\frac{12\sqrt{2}}{17}}$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) + 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{17}$

$2(\sin(\alpha+\beta)\cos\beta + \cos(\alpha+\beta)\sin\beta)(\cos(\alpha+\beta)\cos\beta - \sin(\alpha+\beta)\sin\beta) =$

$= 2\sin(\alpha+\beta)\cos^2\beta\cos(\alpha+\beta) - 2\sin^2(\alpha+\beta)\cos\beta\sin\beta +$

$+ 2\cos^2(\alpha+\beta)\cos\beta\sin\beta - 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\sin^2\beta =$

$= -\frac{1}{17}\cos^2\beta + \sin(2\beta)\cos(2\alpha+2\beta)$

$+ \frac{1}{17}\sin^2\beta = -\frac{1}{17}\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cos(2\alpha+2\beta)$

$1) = -\frac{1}{17}\cos(2\beta) - \frac{12\sqrt{2}}{17}\sin 2\beta$

$2\alpha = u$
$2\beta = v$

$\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha = 2\,tg\alpha\cdot\left(\frac{1}{1+tg^2\alpha}\right) =$

$= \frac{2\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\sin u = x$
$\sin v = y$

$\sin(u+v) = -\frac{1}{17}$; $\sin(u+2v) + \sin u = -\frac{2}{17}$

$\sin u\cos v + \cos u\sin v = -\frac{1}{17}$; $\sin u\cos 2v + \cos u\sin 2v + \sin u = -\frac{2}{17}$

~~$\sin u\cos v + \cos u\sin v = \sin u\cos v\sin v + \cos u\sin v\cos v + \sin u\cdot\frac{1}{2}$~~

~~$\sin u\cos v(1-\sin v) + \cos u\sin v(1$~~

~~$xy + \sqrt{1-x^2}\,y$~~

$\sin(u+2v) = \sin(u+v)\cos v + \cos(u+v)\sin v$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} = \sqrt{x(y-6) - (y-6)} = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ (3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$$

$u = x - 1$

$v = y - 6$

$-6u$

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$$

$\boxed{v \geqslant 6 \cdot u}$

$$\begin{cases} \sqrt{u \cdot v} = -6 \cdot u + v \\ 9 \cdot u^2 + v^2 = 90 \end{cases}$$

$v^2 + 36u^2 - 12uv = uv$

$v^2 - 13u \cdot v + 36u^2 = 0$

$\frac{v^2}{u^2} - 13 \frac{v}{u} + 36 = 0$

$D = 169 - 144 = 25$

$2,1^{15}$

$\frac{v}{u} = \frac{13 \pm 5}{2} = 9;\ 4$

$v = 9u$

$9u^2 + 81u^2 = 90$

$u^2 = 1$

v

$\begin{cases} u = 1 \\ v = 9 \end{cases}$

$\times \begin{cases} u = -1 \\ v = -9 \end{cases}$

$(x-1)(y-6)$

$\cancel{3}$

9

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$\cancel{|x^2-26x|}$ $t>0$

$\cancel{x^2-26x}$ $\cancel{t<0}$

$\cancel{(x^2-26x)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+(}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+(26x-x^2)^{\log_5 13}$

$\cancel{(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2-}$ $t<0$

$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$

$\cancel{t^{\log_5 12} \geq t^{\log_5 13}-t}$ $t=\log_5(26x-x^2)$

$\cancel{\log_5 \lg \log_5 12 \cdot \lg(-t)}$

$\cancel{\lg(t^{\log_5 12}+t) \geq \log_5 13 \lg t}$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}}+1 \geq t^{\log_5 \frac{13}{5}}$

$12^t+\cancel{\log\ 5^{\log_5 t}}\ 5^t \geq 13^t$

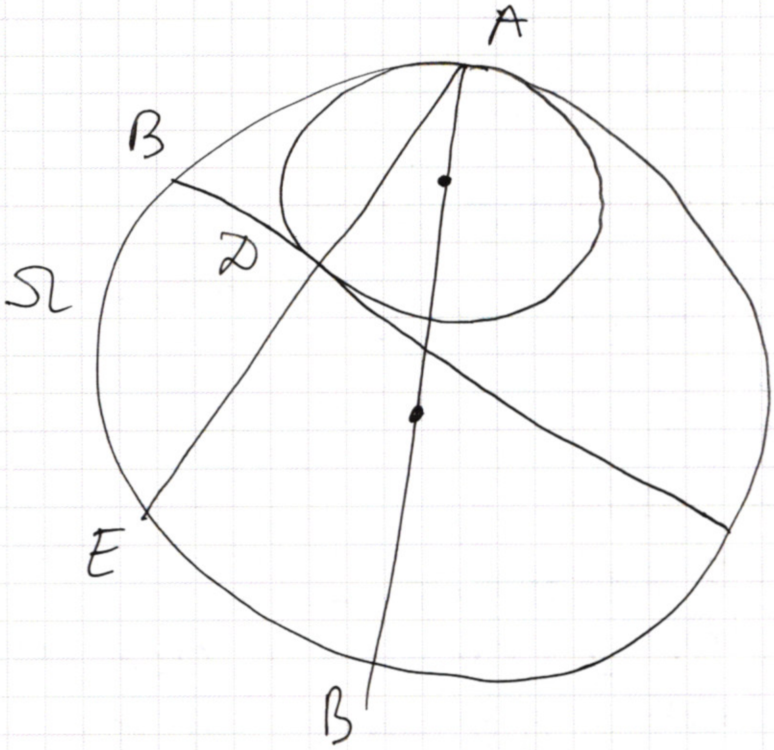
$\left(\frac{12}{13}\right)^t+\left(\frac{5}{13}\right)^t \geq 1$

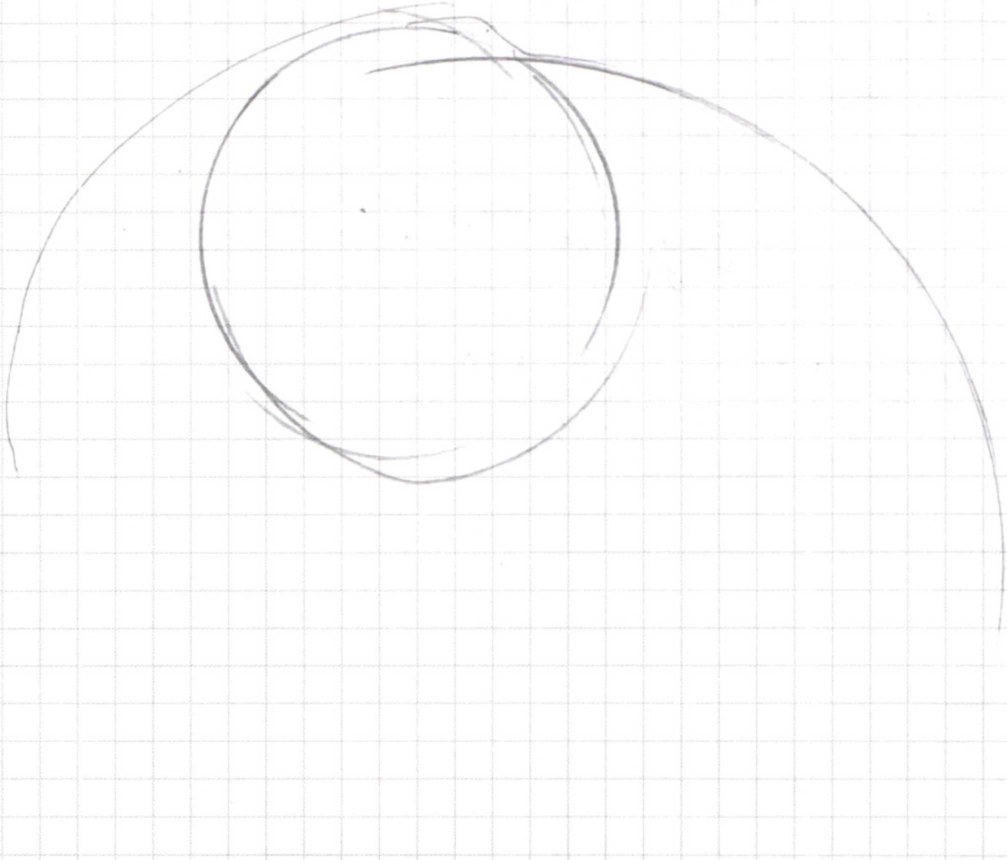
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)


A
B
D
Ω
E
B



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= (18 - 12\sqrt{2})(-16 + 12\sqrt{2}) = \cancel{24(2\sqrt{2}+3)(}$

$= \cancel{24(3-2\sqrt{2})(4-3\sqrt{2}) = 24(3-\sqrt{8})(4-\sqrt{18}) < 0}$

$= 24(3-\sqrt{8})(\sqrt{18}-4) > 0$

$\operatorname{tg}\alpha = 1 \pm 24(3-\sqrt{8})(\sqrt{18}-4)$

2. $2\operatorname{tg}\alpha = -17 - 12\sqrt{2} + (-17 - 12\sqrt{2})\operatorname{tg}^2\alpha$

$\frac{D}{4} = 1 - (-17 - 12\sqrt{2})^2 < 0$

$\operatorname{tg}\alpha \in \varnothing$

3) $\pi + y = x + \pi + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}$, т.е.

$\sin(x+y) = \sin(2x) = -\frac{1}{17}$

Рассуждая аналогично 2 случаю, получим, что возможен только такой случай:

$2\operatorname{tg}\alpha = 17 - 12\sqrt{2} + (17 - 12\sqrt{2})\operatorname{tg}^2\alpha$

$\frac{D}{4} = 1 - (17 - 12\sqrt{2})^2$ ~~...~~ и получим те же $\operatorname{tg}\alpha$, что и в 2 сл.

Ответ $\operatorname{tg}\alpha = -17 \pm 12\sqrt{2};\ 1 \pm 24(3-\sqrt{8})(\sqrt{18}-4)$

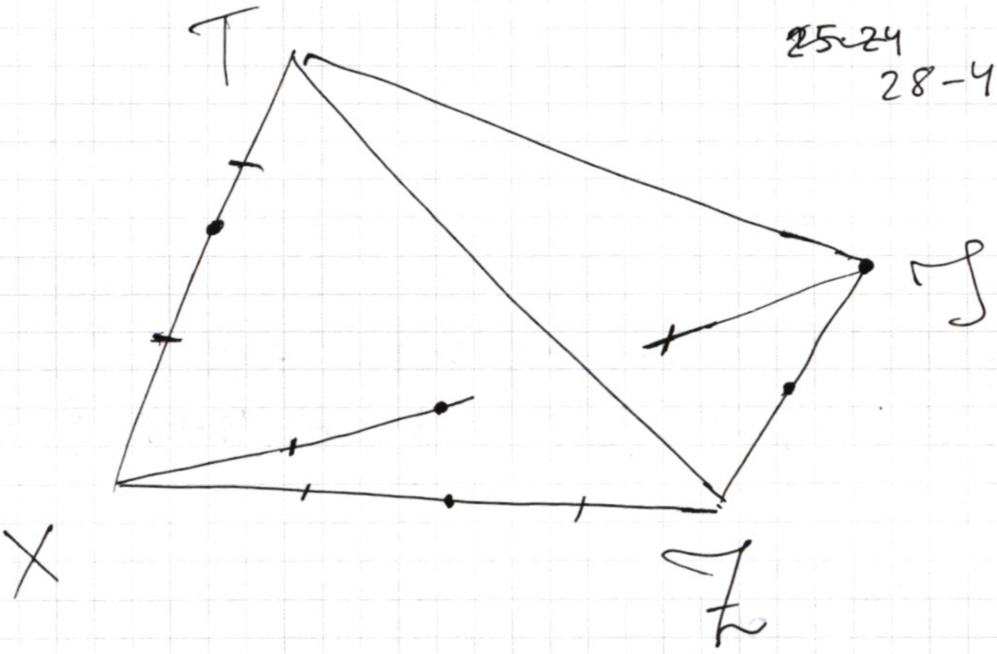
☑ черновик ~~☑ чистовик~~

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №[illegible]

(Нумеровать только чистовики)

7.



~~25~~·24
28 − 4 + 1 = 25

5, 7, 11, 17, 19, 23

1 1 2 4 4 5