МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№5.

$$\begin{cases} f(ab)=f(a)+f(b) \\ f(p)=[p/4],\ p\text{ - простое} \end{cases} \qquad \begin{matrix} 1\le x\le 24 \\ 1\le y\le 24 \end{matrix}$$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Rightarrow f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$f(2)=0,\ f(3)=0,\ f(5)=1,\ f(7)=1,\ f(11)=2,\ f(13)=3$

$f(17)=4,\ f(19)=4,\ f(23)=5$

Заметим, что $f(1)=0$ т.к. $f(2)=f(2\cdot1)=$

$=f(2)+f(1)$.

$f\left(\frac{y}{y}\right)=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)=0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$

$f\left(\frac{x}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$

$f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0 \Rightarrow f(x)-f(y)<0$

$\underline{f(x)<f(y)}$ – необходимо выбрать такие x и y.

Заметим, что f – возраст. ф-я. (видно из простых чисел и их знач.)

$\Rightarrow$ необходимо выбрать $\underline{y>x}$:

Вариантов: 23!

Ответ: 23!

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(\frac{x}{y})<0 \quad f(x)+f(\frac{1}{y})<0$

$\begin{cases} 1\le x\le 24 \\ 1\le y\le 24 \end{cases}$

$f(\cancel{y}\cdot\frac{1}{\cancel{y}}) = f(y)+f(\frac{1}{y})$

$f(x\cdot\frac{1}{x}) = f(x) \overset{\oplus}{+} f(\frac{1}{x})$

$f(x)+f(\frac{1}{y})+f(y)+f(\frac{1}{x})$

$f(\frac{x}{y})+f(\frac{y}{x})$

$f(1)=0$

$f(13)= f(1\cdot 13) = f(13)+f(1) = 3$

$f(x)= f(p\cdot\frac{x}{p}) = f(p)+f(\frac{x}{p})$

$f(\frac{1}{y}) = f(\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{y}$

$\begin{cases} f(x\cdot y) = f(x)+f(y) \\ f(x/y) \overset{\ominus}{=} f(x)+f(\frac{1}{y}) <0 \end{cases}$

$f(x\cdot y) - f(\frac{x}{y}) = f(y) - f(\frac{1}{y})$

$f(xy)+f(\frac{1}{y}) = f(y)+f(\frac{x}{y}) = f(x)$

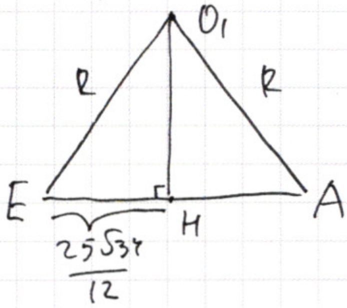
$f(\frac{y}{y}) = f(y)+f(\frac{1}{y}) = 0$

$f(x) \overset{\oplus}{+} f(\frac{1}{x}) = 0$

$\underset{<0}{f(x)+f(\frac{1}{y})} + \underset{>0}{f(y)+f(\frac{1}{x})} = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4. (продолжение).



$$\sin\angle EO_1H = \frac{\frac{25\sqrt{34}}{12}}{\frac{85}{6}} = \frac{\cancel{5}\sqrt{34}}{2\cdot 17} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$$
$(O_1H \perp EA)$

$$\Rightarrow \cos\angle EO_1H = \sqrt{1-\sin^2\angle EO_1H} = \sqrt{1-\frac{25}{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\Rightarrow \sin\angle EO_1A = 2\cdot\sin\angle EO_1H\cdot\cos\angle EO_1H =$$
$$= 2\cdot\frac{5}{\sqrt{34}}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{15}{17}.$$

$\angle AFE = \frac{\angle EO_1A}{2}$ т.к. EO_1A - центральный угол

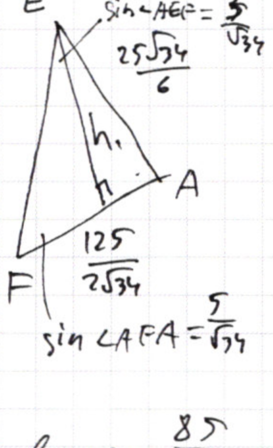
$$\Rightarrow \boxed{\angle AFE = \frac{\arcsin\frac{15}{17}}{2}}$$

3) т.к. $EF \perp BC$, то $EF \parallel AC \Rightarrow \angle AEF = \angle CAD$.

$\sin\angle CAD = \frac{DC}{DA} = \frac{8\cdot 3}{8\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$. По т. синусов:

$\frac{AF}{\sin\angle CAD} = \frac{AE}{\sin\angle EFA}$. ~~$\sin 2\angle EFA = \frac{15}{17}$~~ $\sin\angle EFA = \sin\angle EO_1H = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$$\Rightarrow AF = \frac{25\sqrt{34}}{6}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{125}{2\sqrt{34}}$$



~~Опустим высоту $h \perp AF$:~~

~~$h\sin\angle FAE = $~~

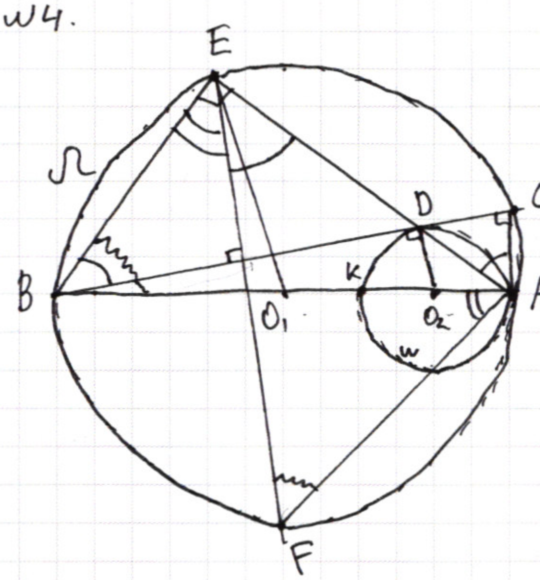
$$\cos\angle AEF = \sqrt{1-\frac{9}{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

По т. косинусов: $\frac{125}{4\cdot 34} = EF^2 + \frac{25^2\cdot 34}{36} - 2\frac{125}{2\sqrt{34}}\cdot\frac{25\sqrt{34}}{6}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}}$

а $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}\cdot EF\cdot AF\cdot\sin\angle AFA$

Ответ: $\frac{85}{6}$, $\frac{136}{15}$, $\frac{\arcsin\frac{15}{17}}{2}$.

№4.



(1) R, r, $\angle AFE$, $S_{\triangle AEF}$

$CD = 8 \quad BD = 17.$

1) Обозначим радиус Ω за R, а центр за O_1, радиус ω за r, центр за O_2.

Степень точки B от-но ω:

$BD^2 = BK \cdot AB$ (K - пер. AB и ω)

$17^2 = BD^2 = (2R - 2r) \cdot 2R$ (1)

т.к. BD касается ω, $O_2D \perp BC$.

Заметим, что $\angle BCA = 90^\circ$ т.к. BC опирается на диаметр AB.

Тогда $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ по 2 углам. ($\angle O_2DB = \angle ACB = 90^\circ$, $\angle B$ - общий)

$\Rightarrow \frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC} : \frac{2R - r}{2R} = \frac{17}{25}$ ($BC = BD + CD = 17 + 8 = 25$)

$50R - 25r = 34R \Rightarrow 25r = 16R \Rightarrow 2R = \frac{25}{8}r$

(1) $17^2 = \frac{25}{8}r \cdot \left(\frac{25}{8}r - 2r\right) = \frac{25}{8}r \cdot \frac{9}{8}r \Rightarrow r^2 = \frac{8^2 \cdot 17^2}{5^2 \cdot 3^2}$

$\Rightarrow \boxed{r = \frac{8 \cdot 17}{5 \cdot 3} = \frac{136}{15}} \Rightarrow R = \frac{25}{16}r = \frac{25}{16} \cdot \frac{8 \cdot 17}{5 \cdot 3} = \boxed{\frac{85}{6} = R}$

2) Заметим, что $\triangle BED \sim \triangle ACD$ т.к. B, E, C, A на 1 окруж. ($\angle EBD = \angle CAD$)

$\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{ED}{CD} \Rightarrow ED = \frac{BD \cdot CD}{AD}$

~~По т. Пифагора $AC^2 = BC^2 + AB^2 = 4R^2 - 25^2 = 4 \cdot \frac{85^2}{36} - 25^2 =$~~

~~$= \frac{28275}{36} \Rightarrow AC = \frac{5}{6}\sqrt{1131}$. $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{28275}{36} + 64} = \sqrt{\frac{25971}{36}}$~~

$\cos\angle CBA = \frac{BC}{AB} = \frac{25 \cdot 3}{85} = \frac{15}{17} \Rightarrow tg\angle CBA = \frac{8}{15}$

$\Rightarrow AC = BC \cdot tg\angle CBA = 25 \cdot \frac{8}{15} = \frac{40}{3}$ ~~$\Rightarrow AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} =$~~

~~$= \sqrt{\frac{40^2}{9} + 64} =$~~ $tg\angle CDA = \frac{AC}{CD} = \frac{40/3}{8} = \frac{5}{3} \Rightarrow \cos\angle CDA = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\Rightarrow AD = \frac{CD}{\cos\angle CDA} = \frac{8 \cdot \sqrt{34}}{3} \Rightarrow ED = \frac{BD \cdot CD}{AD} = \frac{17 \cdot 8 \cdot 3}{8 \cdot \sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{17}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{34}}{2}$

$\Rightarrow AE = ED + AD = \frac{3\sqrt{34}}{2} + \frac{8\sqrt{34}}{3} = \frac{25\sqrt{34}}{6}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$

С учетом ОДЗ $|x^2+18x| = x^2+18x$:

Замена $a=\log_{12}(x^2+18x)$:

$$5^a+12^a \geqslant 13^a \Big| :\underset{>0}{13^a} \quad \Big(|x^2+18x|^{\log_{12}13} \underset{\text{с учетом ОДЗ}}{=} 13^{\log_{12}(x^2+18x)}\Big).$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a \geqslant 1. \quad (1)$$

Заметим, что ф-я $F(a)=\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a$ монотонно $\downarrow\downarrow$, т.к. $\frac{5}{13}<1$ и $\frac{12}{13}<1$. $\Rightarrow$ при всех a, больших равенства, нер-во (1) будет неверно. Заметим, что при $a=2$: $5^2+12^2=13^2$. $\Rightarrow$ нер-во верно при $a\leqslant 2$:

$\log_{12}(x^2+18x)\leqslant 2 \Rightarrow x^2+18x\leqslant 144$

$x^2+18x-144\leqslant 0 \to x=\dfrac{-18\pm\sqrt{18^2+144\cdot 4}}{2}=\dfrac{-18\pm 30}{2}=\left[\begin{array}{l}-24\\6\end{array}\right.$

+ ///-/// +
-24 6

ОДЗ: $x(x+18)>0$ /+/ -18 − 0 /+/ С учетом ОДЗ:

Ответ: $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

ОДЗ: $xy-x-2y+2\geqslant 0$ $\to$ $(x-2)(y-1)\geqslant 0$

$$\begin{cases} ((x-2)-2(y-1))^2 = x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1) \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Замена $a=x-2$ и $b=y-1$:

$$\begin{cases} (a-2b)^2=ab \quad (1) \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

(1) $a^2-4ab+4b^2=ab \Rightarrow a^2-5ab+4b^2=0 \;\big|:b^2$

(если $b=0$, то $y=1 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$, но $(2-2)^2+9(1-1)^2\neq 25$)

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\cdot\frac{a}{b}+4=0 \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\left[\begin{array}{l}1\\4\end{array}\right.$

1) $\frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b$: $x-2=y-1 \Rightarrow x=y+1$

$(y-1)^2+9(y-1)^2=25 \Rightarrow 10\cdot(y-1)^2=25 \Rightarrow (y-1)^2=\frac{5}{2}$

$\Rightarrow y=1\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow x=2\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

С учетом ОДЗ: $(x,y)=\left(2+\sqrt{\frac{5}{2}},\ 1+\sqrt{\frac{5}{2}}\right),\ \left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right],\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

2) $\frac{a}{b}=4 \Rightarrow a=4b$; $x-2=4(y-1)$

$16(y-1)^2+9(y-1)^2=25 \Rightarrow (y-1)^2=1 \Rightarrow$ $y=2 \Rightarrow x=6$; $y=0 \Rightarrow x=-2$

подходят под ОДЗ

Ответ: $(x,y)=(-2,0);\ (6,2);\ \left(2+\sqrt{\frac{5}{2}},\ 1+\sqrt{\frac{5}{2}}\right);\ \left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \quad (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5} = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$$

(1) • $\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$ — случай $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$$\frac{2\sin 2\alpha}{\sqrt5} + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{1+\cos 2\alpha}{2} = -\cos^2\alpha$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = -\cos^2\alpha$$

$\cos\alpha = 0$ или $2\sin\alpha = -\cos\alpha \Rightarrow 2\,tg\,\alpha = -1$

из условия $tg\,\alpha$ определен $\Rightarrow \cos\alpha \neq 0.$

$\Rightarrow \underline{tg\,\alpha = -\frac{1}{2}}.$

• Случай $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = -1 \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cos^2\alpha - 2$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$$

$\sin\alpha = 0$ или $\cos\alpha = -\sin\alpha \Rightarrow tg\,\alpha = -1$

$\Rightarrow tg\,\alpha = 0.$ (Из условия значений не меньше 3^x, значит все подходят).

Ответ: $tg\,\alpha = \{0; -\frac{1}{2}; -1\}$

№6. (продолжение).

$y=ax+b$ проходит через a: $5=-\frac{11}{4}a+b$

и касается $y=3+\frac{2}{4x+3}$: $3+\frac{2}{4x+3}=ax+b$ имеет ровно 1 решение.

$x\neq-\frac{3}{4}$: $ax\cdot(4x+3)+b(4x+3)-3\cdot(4x+3)-2=0$

$4ax^2+x(3a+4b-12)+3b-11=0$

$D=0$: $(3a+4b-12)^2-16a(3b-11)=0$ и $5=-\frac{11}{4}a+b$

$9a^2+16b^2+144+24ab-72a-8\cdot12b-48ab+16\cdot11a=0$

$$\begin{cases}9a^2+16b^2+104a-24ab-96b+144=0\\ b=5+\frac{11a}{4}\end{cases}$$

$\Rightarrow 9a^2+16\cdot(25+\frac{121a^2}{16}+\frac{55}{2}a)+104a-24a\cdot(5+\frac{11a}{4})-96(5+\frac{11a}{4})+144=0$

$a^2(9+121-6\cdot11)+a\cdot(8\cdot55+104-24\cdot5-24\cdot11-\frac{11}{4}\cdot24)+144+16\cdot25-96\cdot5=0$

~~$64a^2+276a+144+16\cdot25=0$~~

~~$16a^2+69a+36=0$~~ $+4\cdot25$ ~~$\Rightarrow a=\frac{-69\pm\sqrt{69^2-4\cdot16\cdot136}}{2\cdot16}$~~

~~$16a^2+69a+136=0$~~

$4a^2+10a+4=0$

$64a^2+160a+64=0 \Rightarrow$ ~~$8a^2+15a+8=0$~~

~~$64(a^2+$~~

$2a^2+5a+2=0 \Rightarrow a=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{-5\pm3}{2}=\left[\begin{array}{l}-4\Rightarrow b=5-11=-6\\ -1\Rightarrow b=5-\frac{11}{4}=\frac{9}{4}\end{array}\right.$

2) Подходят прямые $y=ax+b$, проходящие через т. B, от момента касания с $y=3+\frac{2}{4x+3}$ до момента прохождения через т. A.:

$$\begin{cases}1=-\frac{3}{4}a+b\\ ax+b=3+\frac{2}{4x+3}\text{ - ровно 1 решение.}\end{cases}$$

$\Downarrow$ $9a^2+16b^2+104a-24ab-96b+144=0$

$9a^2+16(1+\frac{9}{16}a^2+\frac{3}{2}a)+104a-24a(1+\frac{3a}{4})-96(1+\frac{3a}{4})+144=0$

$a^2(9+9-6\cdot3)+a(24+104-24-16\cdot3)+16-96+144=0$

$56a+64=0 \Rightarrow a=-\frac{64}{56}=-\frac{8}{7}\Rightarrow b=1+\frac{3}{4}\cdot(-\frac{8}{7})=1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7}$

Прохож. через т. A: $5=-\frac{11}{4}a+b$: $5=-\frac{11}{4}a+\frac{1}{7}\Rightarrow a=-\frac{136}{77}$

~~Итак $b=\frac{1}{7}$ $a\in(-\frac{8}{7};-\frac{136}{77})$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

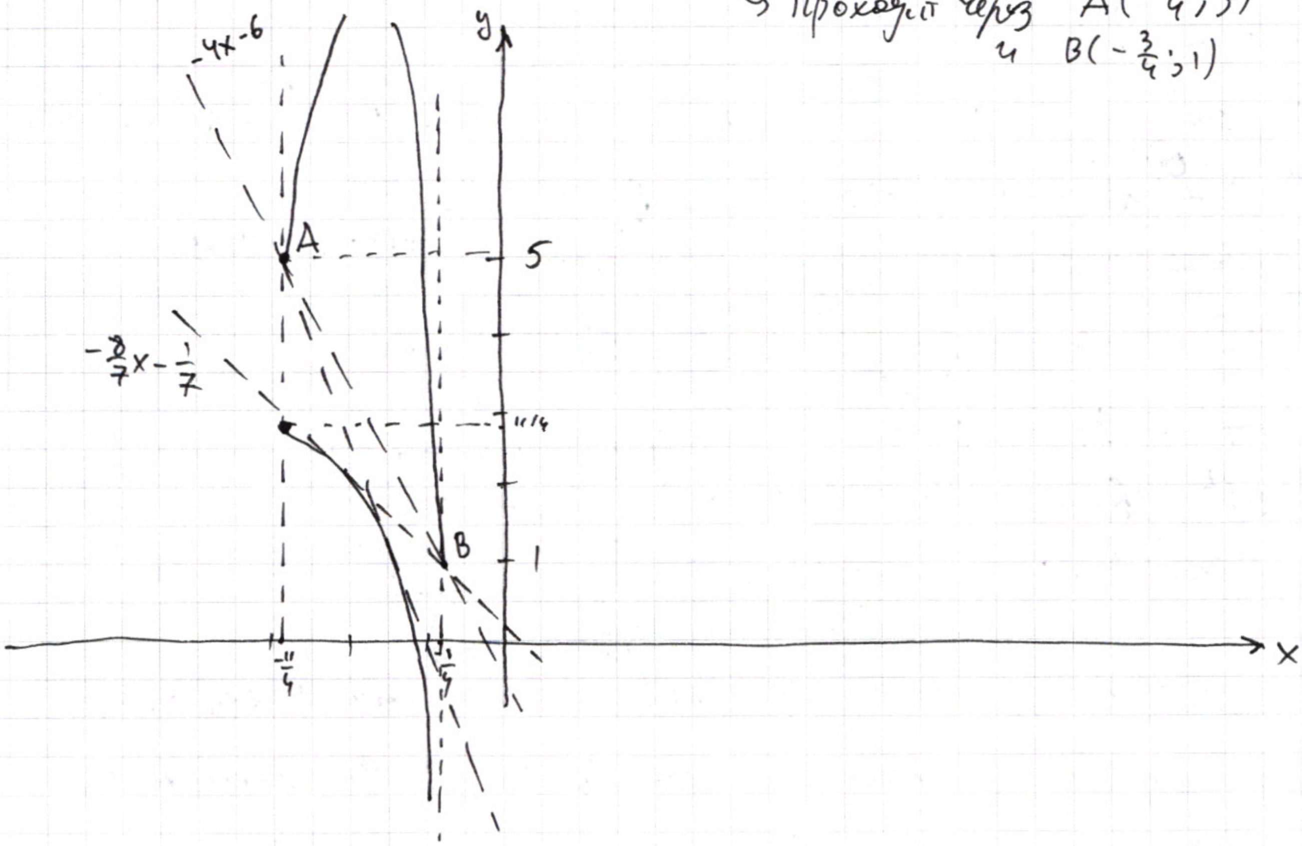
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$. верно $\forall x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

$3 + \frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

проходит через $A(-\frac{11}{4}; 5)$ и $B(-\frac{3}{4}; 1)$



1) Чтобы нер-ва выполнялись возможно несколько случаев ~~__~~ прямая $y = ax+b$ пересекает параболу в т. A. тогда она должна пересечь $x = -\frac{3}{4}$ в т. B или ниже до момента касания с $y = 3 + \frac{2}{4x+3}$. (если $y = ax+b$ пересекает $x = -\frac{11}{4}$ выше т. A или пересекает $x = -\frac{3}{4}$ выше т. B, то нер-во $ax+b \le -8x^2-30x-17$ будет верно уже не для $\forall x \in [-\frac{11}{4}; \frac{3}{4}$)).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. Продолжение.

1) в случае прохода $y=ax+b$ через т. A до момента касания с $y=3+\frac{2}{4x+3}$:

при $b=\frac{9}{4}$ касание из графика нет:

$\Rightarrow a=-4,\ b=-6 \Rightarrow$ при $a>-4$ до момента

прохода $ax+b$ через т. B: $\begin{cases} 1=-\frac{3}{4}a+b \\ 5=-\frac{11}{4}a+b \end{cases}$

$\Rightarrow 5=-\frac{11}{4}a+1+\frac{3a}{4}$

$4=-\frac{8}{4}a \Rightarrow \underline{a=-\frac{1}{2}} \Rightarrow b=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

$\Rightarrow$ подходят пары: $\begin{cases} a\in[-4;-\frac{1}{2}] \\ b\in[-6;\frac{5}{8}] \end{cases}$

2) в случае прохода через т. B и касания с $3+\frac{2}{4x+3}$:

$\cancel{a\in[-\frac{8}{7};-\frac{136}{77}]}$ $\cancel{b}$ $\begin{cases} 1=-\frac{3}{4}a+b \\ 5=-\frac{11a}{4}+b \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{8}$.

$\begin{cases} a\in[-\frac{8}{7};-\frac{1}{2}] \\ b\in[\frac{1}{7};\frac{5}{8}] \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} a\in[-4;-\frac{1}{2}] \\ b\in[-6;\frac{5}{8}] \end{cases}$ и $\begin{cases} a\in[-\frac{8}{7};-\frac{1}{2}] \\ b\in[\frac{1}{7};\frac{5}{8}] \end{cases}$

Прямая $y=ax+b$ проходит через A и ниже B. : $a \leq -2$

$b = 5 + \frac{11}{4}a = 5 + \frac{11}{4} \cdot -2 = 5 - \frac{11}{2} = -\frac{1}{2}$ $b \leq -\frac{1}{2}$.

$y = ax+b$ ~~≤ 1 пересечение на $x \in (-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ с $2+\frac{2}{4x+3}$~~
у касание.

усл. прямая проходит через т. A и касается $2+\frac{2}{4x+3}$
$y=ax+b$.

$$\begin{cases} 5 = -\frac{11}{4}a + b \\ ax+b = 2+\frac{2}{4x+3} \text{ ровно 1 реш.} \end{cases}$$

$ax(4x+3) + b(4x+3) - 2(4x+3) - 2 = 0$

$x^2(4a) + x(3a+4b-8) + 3b-8 = 0$

$D = (3a+4b-8)^2 - 16a^2(3b-8) = 0.$

$69 \times 69 = 4761$; $4761 - 2304 = 2457$; $2457 : 3 = 819$; $819 : 3 = 273$; $273 : 3 = 91$

$36 \times 16 = 576$; $576 \times 4 = 2304$

$136 \times 36 = 4896$; $96 : 4 = 24$

$55 \times 8 = 440$; $440 + 104 = 544$; $544 - 280 = 276$; $276 : 2 = 138$; $138 : 2 = 69$

$16 \times 11 = 176$; $176 - 72 = 104$

$130 - 66 = 64$

$24 \times 11 = 264$; $264 + 24 = 288$

$144 : 4$; $144 - 12 = 24$

$-8 \cdot \frac{121}{16} + \frac{30 \cdot 11}{4} - 17$

$\frac{-121 \cdot 2 + 30 \cdot 11}{4} - 17$

$\frac{11(-22+30)}{4}$

$22 - 17 = 5$

$144 - 16 \cdot 5$

$144 - 80 = 64$; $64 \times 4 = 256$

$544 - 424 = 120$

$16 \times 24 = 384$; $104 + 32 = 424$

$120 : 8 = 15$

$104 - 48 = 56$; $56 : 4 = 14$

$440 - 1007$; $544 - 384 = 160$

$16 \times 24 = 384$

$34 \times 4 = 136$

6

$\frac{11}{4}a = \frac{1}{7} - 5 = -\frac{34}{7}$

$a = -\frac{34 \cdot 4}{77} =$

=

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

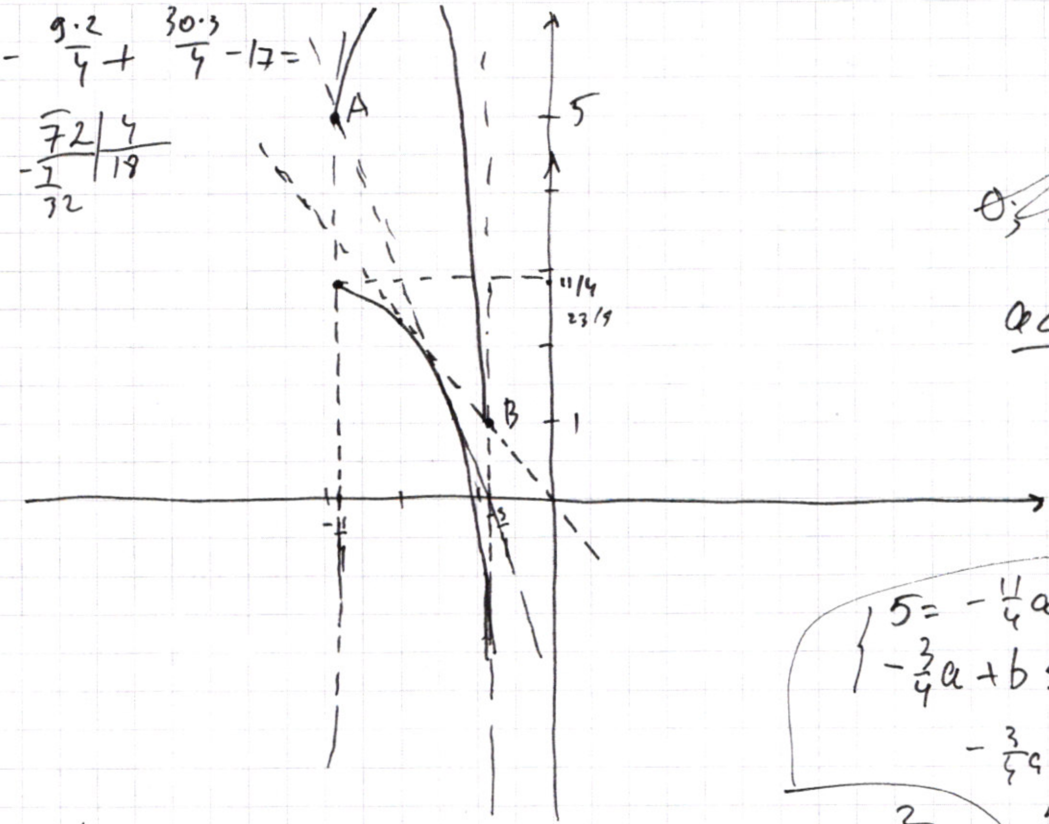
$-\frac{9\cdot 2}{4}+\frac{30\cdot 3}{4}-17=$

$72 \,|\, 4$, 18, 32

$89/\frac{8}{11}$

$23/\frac{9}{2}$

$a<0$.



$$\begin{cases} 5=-\frac{11}{4}a+b \Rightarrow b=5+\frac{11}{4}a \\ -\frac{3}{4}a+b\le 1 \end{cases}$$

$-\frac{3}{4}a+5+\frac{11}{4}a\le 1$

$5+2a\le 1$

$2a\le -4$

$a\le -2$.

Найдем касание $y_1=ax+b$ и $y_2=3+\frac{2}{4x+3}$

$y_k=a$

$y_2'=\left(\frac{2}{4x+3}\right)'=\frac{-4\cdot 2}{(4x+3)^2}=\frac{-8}{(4x+3)^2}$

кас. в x_0: $-\frac{8}{(4x_0+3)^2}=a$

$x_0\in\left(-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$

$(4x_0+3)^2=-\frac{8}{a}$

$(-11+4)^2=-\frac{8}{a}$

$7^2=-\frac{8}{a}\Rightarrow a=-\frac{8}{49}$

$a>-\frac{8}{49}$

$$\begin{cases} 1=-\frac{3}{4}a+b \\ -\frac{8}{(4x_0+3)^2}=a \end{cases}\Rightarrow 1=-\frac{3}{4}\cdot\frac{8^2}{(4x_0+3)^2}+b$$

$1+\frac{6}{(4x_0+3)^2}=b$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(1\cdot\frac{1}{y}\right)=f(1)+f\left(\frac{1}{y}\right)\Rightarrow \underline{f(1)=0}$$

№1.

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y \rightarrow \sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$

$x+y=\alpha$

$x-y=\beta$ $\Rightarrow x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}=\sqrt{\frac{2}{\cos2\alpha+1}-1}$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=$

$\cos(x+y)+\cos x-y=2\cos x\cos y$

$\cancel{\cos 2\beta+}$

№6.

$\frac{12x+11}{4x+3}\le ax+b\le-8x^2-30x-17 \quad x\in\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$

$x=-\frac{11}{4}:\ 3+\frac{2}{-11+3}=3-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$

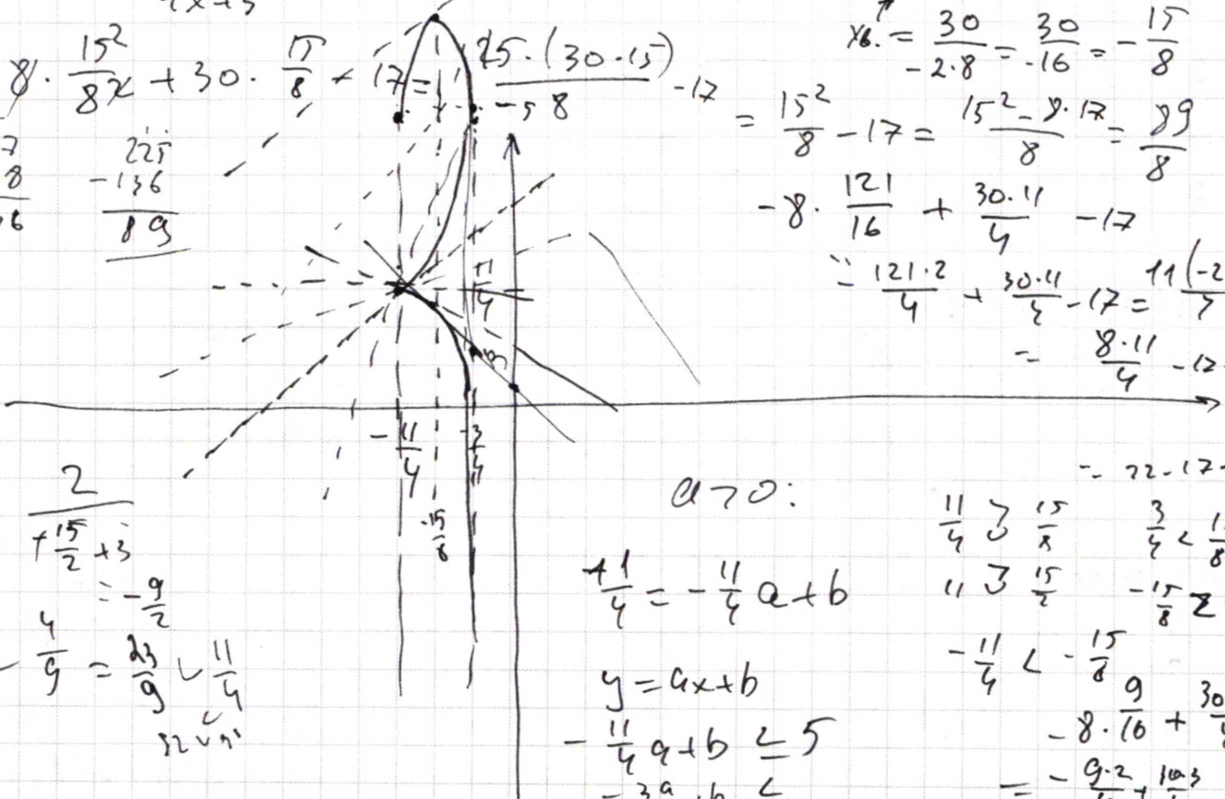
$\frac{(4x+3)\cdot3+2}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}\le ax+b\le-8x^2-30x-17$

$x_в=\frac{30}{-2\cdot8}=\frac{30}{-16}=-\frac{15}{8}$

$-8\cdot\frac{15^2}{8^2}+30\cdot\frac{15}{8}+17=\frac{15\cdot(30-15)}{-8}-17=\frac{15^2}{8}-17=\frac{15^2-8\cdot17}{8}=\frac{89}{8}$

$17\times8=136$; $225-136=89$

$-8\cdot\frac{121}{16}+\frac{30\cdot11}{4}-17=-\frac{121\cdot2}{4}+\frac{30\cdot11}{4}-17=\frac{11(-22+30)}{4}-17=\frac{8\cdot11}{4}-17=22-17=5$



$3+\frac{2}{4\cdot\frac{-15}{8}+3}$, $=-\frac{9}{2}$

$3-\frac{4}{9}=\frac{23}{9}<\frac{11}{4}$

$92<99$

$a>0$:

$\frac{11}{4}=-\frac{11}{4}a+b$

$y=ax+b$

$-\frac{11}{4}a+b\le5$

$-\frac{3a}{4}+b\le$

$\frac{11}{4}>\frac{15}{8}$, $11>\frac{15}{2}$, $-\frac{11}{4}<-\frac{15}{8}$

$\frac{3}{4}<\frac{15}{8}$, $-\frac{15}{8}<-\frac{3}{4}$

$-8\cdot\frac{9}{16}+\frac{30\cdot3}{4}-17=-\frac{9\cdot2}{4}+\frac{10\cdot3}{4}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \quad (1) \qquad ОДЗ: xy-x-2y+2\geq 0 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \Rightarrow (x-2)^2+(3y-3)^2=5^2 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2=x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)$

(2) $(x-2)^2+9\cdot(y-1)^2=5^2$

$$\begin{cases} ((x-2)-2(y-1))^2=(x-2)(y-1) \\ (x-2)^2+9\cdot(y-1)^2=5^2 \end{cases}$$

Замена $a=x-2$ и $b=y-1$

$$\begin{cases} (a-2b)^2=ab \Rightarrow a^2+4ab+4b^2=ab \quad (*) \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

(*) $a^2+3ab+4b^2=0 \quad | : b^2$. (если $b=0$, т.е. $y=1$:

$x-2=\sqrt{x-x-2+2} \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2.$

$(2-2)^2+9\cdot(1-1)^2\neq 5^2 \Rightarrow b\neq 0).$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2+3\cdot\frac{a}{b}+4=0 \Rightarrow \frac{a}{b}=-3\pm\sqrt{9}$

$$\begin{cases} f(ab)=f(a)+f(b) \qquad f-\mathbb{R}>0. \\ f(p)=[p/4] \ \forall \text{ простого } p. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\leq x\leq 24 \\ 1\leq y\leq 24 \\ f(x/y)<0 \end{cases} \quad x,y\in\mathbb{N}.$$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

прост. числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

$f(2)=0 \quad f(3)=0 \quad f(5)=1 \quad f(7)=1 \quad f(11)=2 \quad f(13)=3$

$f(17)=4 \quad f(19)=4 \quad f(23)=5 \qquad f(x)=f\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=0+f\left(\frac{x}{2}\right)=$

$=f(x)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \quad (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \quad (2) \end{cases}$$

(!) $tg\alpha$

(1) $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

(2) $2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) + 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} \sin2\alpha\cos4\beta + \cos2\alpha\sin4\beta + \sin2\alpha = -\frac{4}{5} \\ \sin2\alpha\cos2\beta + \cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$$

№2.

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \quad (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

ОДЗ пропущен!

$(x-2)^2-4+(3y-3)^2-9=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25=5^2$

(1) $x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$

$-xy-4xy \qquad 2y(2y+1)$

$x(x-y)-4y(x-y)+x-4y+6y-2=0$

$(x-y)(x-4y)+(x-4y)+6y-2=0$

$x^2-5xy+9y^2-5y^2+x+2y-2=0$

$\cancel{-5y(x+y)}$

$$\begin{array}{r|l} 85 & 5 \\ -5 & 17 \\ 35 & \end{array}$$

$AB=2R=\frac{85}{3}$

$\cos\angle CBA = \cancel{3}\,\frac{25\cdot3}{85} = \frac{15}{17}$

$\frac{17^2}{15^2} = 1+tg^2x$

$\frac{17^2-15^2}{15^2} = tg^2x$

$\frac{2\cdot32=64}{15^2} = tg^2x$

$tgx = \frac{8}{15}$

$\begin{array}{r} \overset{3}{64} \\ \times\ 9 \\ \hline 6 \end{array}$

$tg\angle ABC = \frac{AC}{CD} = \frac{40/3}{8} = \frac{5}{3}$

$1+\frac{25}{9} = \frac{1}{x^2}$

$\frac{CD}{AC} = \frac{8\cdot3}{40} \quad \frac{34}{9} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$4\frac{3}{5} \qquad 9+25$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)} - 18x$$ с учетом ОДЗ

Замена $t = x^2+18x$

$5^{\log_{12} t} + t \geq 13^{\log_{12} t}$ или $t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13}$

~~$t\left(1 + t^{\log_{12}5-1} - t^{\log_{12}13-1}\right) \geq 0$~~

~~$\log(t^{\log_{12}5} + t) \geq$~~ $\log_{12}(x^2+18x) = a$

$5^a + 12^a \geq 13^a \quad | : 13^a$

$\underbrace{\left(\frac{5}{13}\right)^a + \left(\frac{12}{13}\right)^a}_{\text{монотонно} \downarrow\downarrow} \geq 1$ => верно только при $\underline{a=2}$.

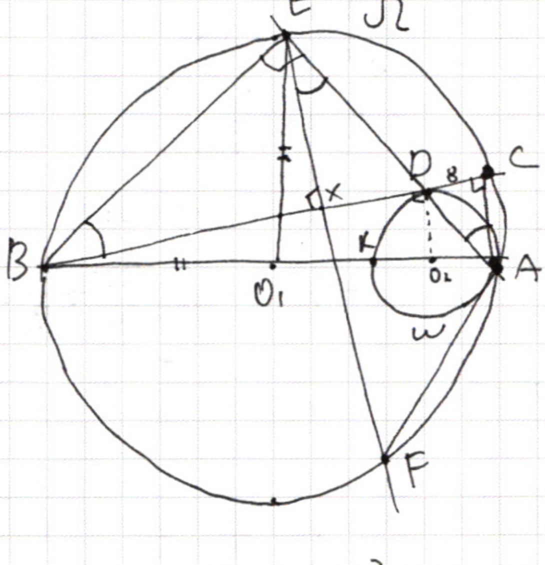
$85 \cdot 85 = 7225$, $7225 \cdot 4 = 28900$, $28900 - 625 = 28275$

$125 \cdot 125 = 15625$

$18 \cdot 18 = 324$, $144 \cdot 4 = 576$, $576 + 324 = 900$, $144 + 25 = 169$

$28275 - 2304 = 25971$, $64 \cdot 36 = 2304$

№4.



$CD = 8 \quad BD = 17$ (!/R ... $\angle AFE$, $S_{\triangle AEF}$

$BK \cdot AB = BD^2$

$(2R-2r) \quad 2R \qquad 2R(2R-2r) = BD^2$

$\frac{BO_2}{AB} = \frac{BD}{BC}$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{17+8}$ $= 25$

$50R - 25r = 34R \Rightarrow 25r = 16R$

$\Rightarrow 2R = \frac{25}{8}r$

$\frac{25}{8}r\left(\frac{25}{8}r - 2r\right) = 17^2$

$\frac{9r}{8} \Rightarrow \frac{25\cdot 9 r^2}{8\cdot 8} = 17^2$

$\Rightarrow r = \frac{8\cdot 8\cdot 17^2}{25\cdot 9} \qquad R = \frac{25}{16}r$

$\triangle BED \sim \triangle ADC$.

$AC = \sqrt{(2R)^2 - BC^2} \qquad AD^2 = CD^2 + AC^2 \quad \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow ED = \frac{BD\cdot CD}{AD}$

→ $EA = ED + DA$ → находим EO_1A → находим EFD.

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)