МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2-10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leqslant ax+b \leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} & (2) \end{cases}$$

(2): $\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha)\ (\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\cos 2\beta\ (\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{5}$

Подставим первое. $\cos 2\beta = -\frac{1}{5} \cdot (-\sqrt5) = \frac{1}{\sqrt5}$

Тогда изначальная система равносильна такой:

$$\begin{cases} \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = \frac{-1}{\sqrt5} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5} - \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = \frac{-1}{\sqrt5} \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1 \end{array} \right.$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha+1}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha+1}$$

Т.к. $\mathrm{tg}\,\alpha$ определен, то мы ничего не нарушили.

$$\left[\begin{array}{l} 2\,\mathrm{tg}\,\alpha + 2(1-\mathrm{tg}^2\alpha) = -(\mathrm{tg}^2\alpha+1) \\ 2\,\mathrm{tg}\,\alpha + 2\cdot(-1+\mathrm{tg}^2\alpha) = -(\mathrm{tg}^2\alpha+1) \end{array}\right. \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha = t$$

$$\Rightarrow \cancel{\left[\begin{array}{l} 2t+2-2t^2 = t^2+1 \\ 2t-2+2t^2 = t^2+1 \end{array}\right.} \Rightarrow$$

$$\cancel{\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3t^2-2t-1=0 \\ t^2+2t-3=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{1}{3} \\ t=1 \\ t=-3 \end{array}\right.} \quad \text{~~Отв: } -3;\ -\tfrac{1}{3};\ 1\text{~~}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2t+2-2t^2 = -t^2-1 \\ 2t-2+2t^2 = -t^2-1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} t^2-2t-3=0 \\ 3t^2+2t-1=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3 \\ t=\frac{1}{3} \end{array}\right. \quad \text{Отв: } -1;\ \tfrac{1}{3};\ 3$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 12y = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90 \end{cases}$$

Пусть $a = x-6$, $b = 2y-1$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \iff \begin{cases} a \geq 6b \\ a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a \geq b \\ a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

Отметим, что если $b=0$, то и $a=0$, но тогда третье уравнение не выполняется $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a, b \neq 0 \iff \begin{cases} a \geq 6b \\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\left(\frac{a}{b}\right) + 36 = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \iff \begin{cases} a \geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = 9b \end{array}\right. \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \iff$$

~~a=9b~~

1) $$\begin{cases} a = 4b \\ 16b^2 + 9b^2 = 90 \\ b \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4b \\ 25b^2 = 90 \\ b \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4b \\ b = \pm\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ b \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=4b \\ b=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ b=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} a=9b \\ b\geq 0 \\ 81b^2+9b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9b \\ b\geq 0 \\ b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9b \\ b\geq 0 \\ b=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9b \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=1 \end{cases}$$

Итого $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=9 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{-12\sqrt{10}}{5} \\ b=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6=9 \\ 2y-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-6=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ 2y-1=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-12\sqrt{10}}{5}+6 \\ y=\frac{-3\sqrt{10}+5}{10} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(15;1)$

$\left(-\frac{12\sqrt{10}}{5}+6;\ \frac{-3\sqrt{10}+5}{10}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x + |10x-x^2|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$t = 10x - x^2$, $t > 0$ (из-за $\log_3(10x-x^2)$).

$t + |t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$, но т.к. $t > 0 \Leftrightarrow$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

Заметим, что $t^{\log_3 4} = 4^{\log_3 t}$

$t + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t} \Rightarrow 3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} - 5^{\log_3 t} \geq 0$

$4^{\log_3 t} = a > 0 \Rightarrow$ можно ~~разделить~~ на „a" без ~~потери~~ знака

$\left(\frac{3}{4}\right)^a + 1 - \left(\frac{5}{4}\right)^a \geq 0$. ~~Пусть~~ $\cancel{f(a) = \left(\frac{3}{4}\right)^a - \left(\frac{5}{4}\right)^a + 1}$

~~Заметим, что $f(a)\downarrow$, а При $a=2$ это тождество~~ $\Rightarrow$

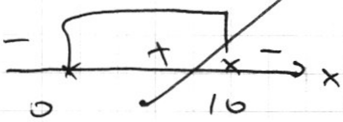
$\Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow f(a) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 2. \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in (0; 2]. \Rightarrow \begin{cases} 4^{\log_3 t} > 0 \\ 4^{\log_3 t} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{4^{\log_3 t} \leq 4^{\log_4 2}}$

$2^{2\log_3 t} \leq 2 \Leftrightarrow 2\log_3 t \leq 1 \Leftrightarrow$

$\log_3 t \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_3 t \le \log_3 \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t \le \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ 10x - x^2 \le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(10-x) > 0 \quad (1) \\ x^2 - 10x + 3 \ge 0 \quad (2) \end{cases}$

$\Rightarrow$ (1):  $x \in (0; 10)$.

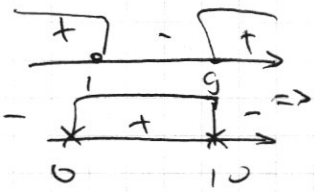
$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} - 5^{\log_3 t} \ge 0 \quad \Big| : 4^{\log_3 t} > 0$

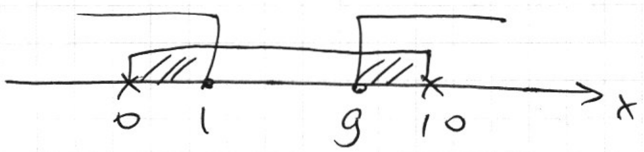
$\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_3 t} + 1 - \left(\frac{5}{4}\right)^{\log_3 t} \ge 0$

$f(a) = \left(\frac{3}{4}\right)^a + 1 - \left(\frac{5}{4}\right)^a \quad f(a)\downarrow$ и $f(2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a) \ge 0 \Leftrightarrow a \le 2 \Rightarrow \log_3 t \le 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 t \le \log_3 9 \Rightarrow \begin{cases} t \le 9 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - x^2 - 9 \le 0 \\ 10x - x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 9 \ge 0 \\ x(10-x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-9) \ge 0 \\ x(10-x) > 0 \end{cases}$  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow$

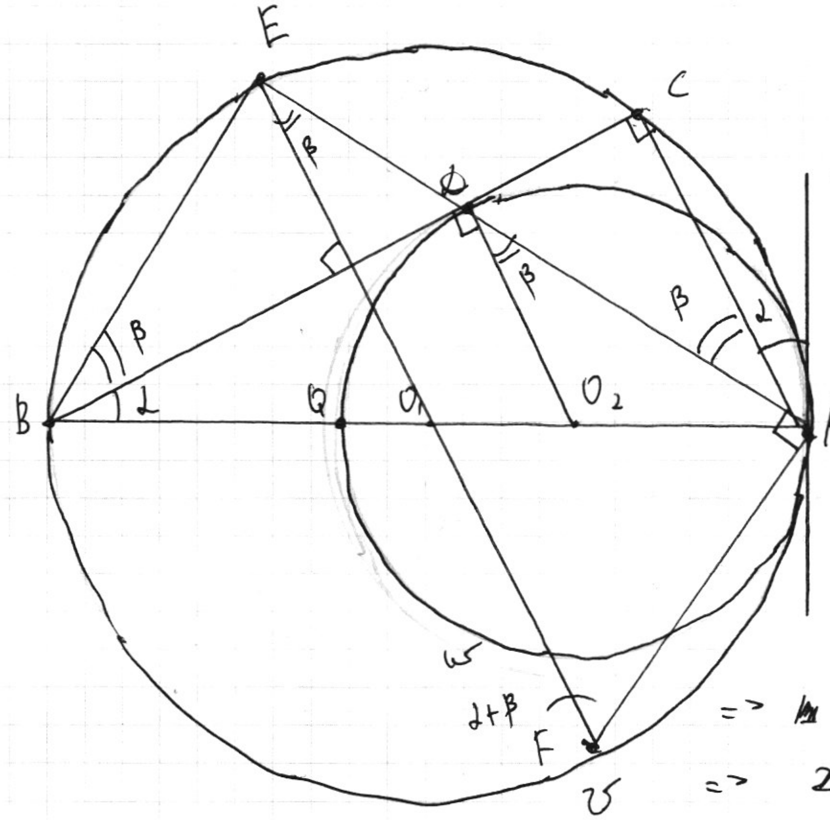
$\Rightarrow$ Отв: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



1) $CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

2) Пусть $O_2A = r$, $O_1A = R$

O_1, O_2, A лежат на одной прямой в силу касания в A.

$\angle BCA$ опир. на AB — диаметр $\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ$

$O_2D \perp BC$ по условию $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ По Фалесу $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BO_2}{O_2A} = \frac{BD}{CD} = \frac{17}{15} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2R - r}{r} = \frac{17}{15} \Rightarrow 30R - 15r = 17r \Rightarrow$

$\Rightarrow 30R = 32r \Rightarrow 15R = 16r.$

$BD^2 = BQ \cdot BA$ (по т. о касательной и секущей) $\Rightarrow \frac{17^2}{4} = (2R - 2r) \cdot 2R \Rightarrow$

$\Rightarrow 17^2 = 16R^2 - 16rR \Rightarrow 16R^2 - 15R^2 = 17^2 \Rightarrow \underline{R = 17.} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{r = \frac{15}{16} \cdot 17}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

3) $\angle CBA = \alpha$, $\angle EBD = \beta$

$\angle CAH = \alpha$ (угол между касательной и хордой).

$\angle CAD = \beta$ (опир. на $\cup EC$). $\Rightarrow \angle DAB = 90^\circ - \alpha - \beta$.

Заметим, что $DO_2 \parallel CA \parallel EF$ (в силу $\perp BC$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADO_2 = \beta = \angle DEF$

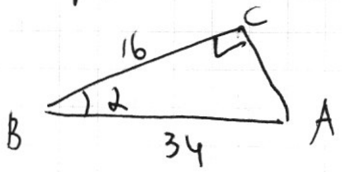
$\triangle DO_2A$: $DO_2 = O_2A$ как радиусы $\Rightarrow \angle ADO_2 = \angle DAO_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha + 2\beta = 90^\circ$

$\triangle FEA$: $\angle AFE + \angle FEA = 2\beta + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow EF$ – диаметр, $\Rightarrow O_1 \in EF$.

$\triangle BCA$:



$\Rightarrow \alpha = \arccos\frac{8}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = \dfrac{90^\circ - \arccos\frac{8}{17}}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = \dfrac{90 + \arccos\frac{8}{17}}{2} =$

$= 45^\circ + \dfrac{\arccos\frac{8}{17}}{2}$

$EF = 34. \Rightarrow AE = EF \cdot \cos\beta$, $AF = EF \cdot \sin\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF = \dfrac{EF^2 \cdot \sin 2\beta}{4} = \dfrac{34^2}{4} \cdot \sin(90^\circ - \alpha) =$

$= \dfrac{34^2}{4} \cdot \cos\alpha = \dfrac{34^2}{4} \cdot \dfrac{8}{17} = \dfrac{34 \cdot 34 \cdot 8}{4 \cdot 17} = 34 \cdot 4 = 136.$

Отв: $R = 17$, $r = \dfrac{15 \cdot 16}{17} = \dfrac{240}{17}$, $\angle AFE = 45^\circ + \dfrac{\arccos\frac{8}{17}}{2}$,

$\dfrac{15 \cdot 17}{16} = \dfrac{255}{16}$

$S = 136$,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5.

$f(ab) = f(a) + f(b) \qquad f(1\cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0.$

$f(p) = [p/4].$

$f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) = f(1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = -f(\frac{1}{x})$

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) < f(y).$ $\qquad x \in [2; 25], y \in [2; 25], \in \mathbb{N}.$

Выпишем все значения f.

$f(2) = 0$
$f(3) = 0$
$f(4) = 0$
$f(5) = 1$
$f(6) = 0$
$f(7) = 1$
$f(8) = 0$
$f(9) = 0$
$f(10) = 1$
$f(11) = 2$
$f(12) = 0$

$f(13) = 3$
$f(14) = 1$
$f(15) = 1$
$f(16) = 0$
$f(17) = 4$
$f(18) = 0$
$f(19) = 4$
$f(20) = 1$
$f(21) = 1$
$f(22) = 2$
$f(23) = 5$
$f(24) = 0$

$f(25) = 2.$

~~Отметим, что вся задача симметрична относительно x и y.~~

1) Пусть $f(x) = 0 \Rightarrow x =$
$= 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24.$

Тогда нам подходят любые другие y, т.к. там $f(y) > 0. \Rightarrow$

Кол-во $10 \cdot 14 = 140.$

Пусть $f(x)=1$, тогда $x=5, 7, 10, 14, 15, 20, 21$

Тогда подойдет любой y, где $f(y)>1 \Rightarrow$

итого: $7 \cdot 7 = 49$.

Пусть $f(x)=2$, тогда $x=11, 22, 25$ Аналогично

итого: $3 \cdot 4 = 12$.

Пусть $f(x)=3$, тогда $x=13$.

итого: $1 \cdot 3 = 3$.

Пусть $f(x)=4$. тогда $x=17, 19$

итого: $2 \cdot 1 = 2$.

При $f(x)=5$ решений нет.

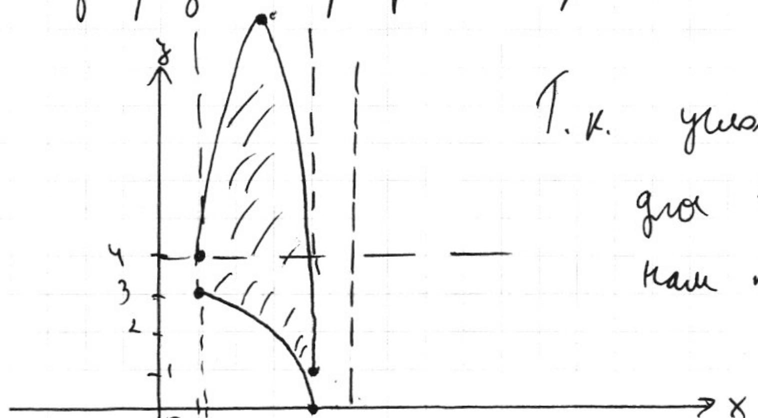
Отв: $140+49+12+3+2=\underline{\underline{206}}$

№6.

$$\begin{cases} ax+b \geq \dfrac{16x-16}{4x-5} \\ ax+b \leq -32x^2+36x-3 \end{cases} \quad x \in [\tfrac{1}{4}; 1].$$

$$\begin{cases} ax+b \geq 4+\dfrac{4}{4x-5} \\ ax+b \leq -(32x^2-36x+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+b \geq 4+\dfrac{1}{x-\frac{5}{4}} \\ ax+b \leq -(32x^2-36x+3) \end{cases}$$

Изобразим графики правых частей



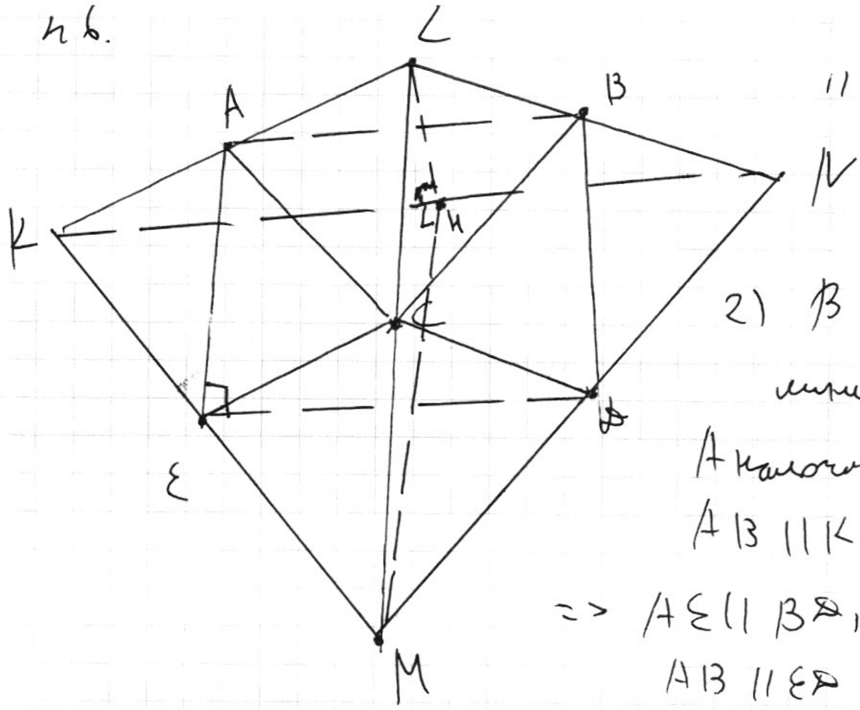
Т.к. условие должно выполняться для $\forall x \in [\frac{1}{4}; 1]$, то нам подходит полоса ~~от 3~~ до 4 от $y=3$ до $y=4$. при $x \in [\frac{1}{4}; 1] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $ax+b$ – полоса, описанная выше.

$\Rightarrow a=0,\ b \in [3;4]$.

Отв: $a=0,\ b\in[3;4]$.

№6.



1) $KA = AL,\ LB = BN$

$KE = EM,\ MD = DN$.

$LC = CM$

2) В $\triangle KLM$ AE – ср. линия $\Rightarrow AE \parallel LM$

Аналогично $BD \parallel LM$.

$AB \parallel KN,\ ED \parallel KN$.

$\Rightarrow AE \parallel BD,\ AB \parallel ED \Rightarrow ABDE$ – параллелогр.

$CABDE$ также вписана в сферу $\Rightarrow$ вокруг $ABDE$ можно описать окр. $\Rightarrow ABDE$ – прямоугольник.

Тогда $LM \perp KN$. Тогда ~~если $MH \perp KN$~~ $H \in KN$, то $LH \perp KN$.

по теореме о 3 перпенд.

Пусть $HM = a$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$

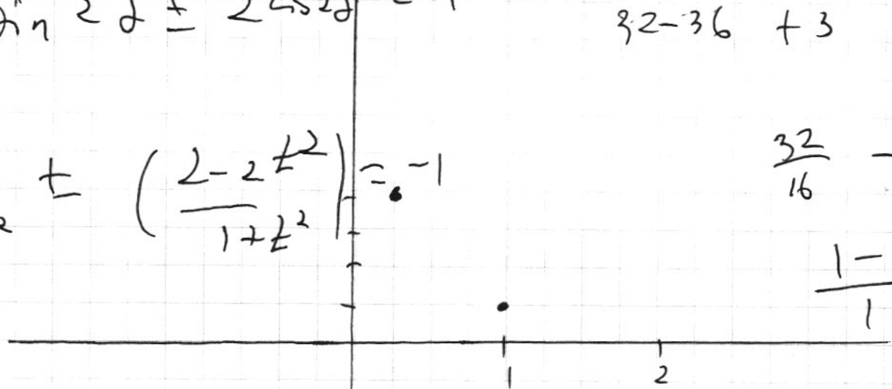
$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$32 - 36 + 3$

$$\frac{2t}{1+t^2} \pm \left(\frac{2-2t^2}{1+t^2}\right) = -1$$

$$\frac{32}{16} - \frac{36}{4} + 3$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

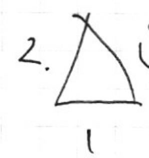


$2t \pm (2-2t^2) = -1-t^2$

$3t^2 \; 2t \; 3 = 0$

$2 - 2\cancel{t^2} + 2t = -1 - \cancel{t^2}$

$$\frac{36 \; 18}{2 \cdot 32} = \frac{9}{16}$$



$\sin 2\beta = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} \pm \frac{\cos 2\alpha \cdot 2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$-\frac{3\cancel{2} \cdot 9 \cdot 9}{\cancel{16} \cdot 1\cancel{6}} + \frac{\cancel{36} \cdot 9}{\cancel{16}} - 3$$

$2t + 2 - 2\cancel{t^2} = -1 - \cancel{t^2}$

$$-\frac{81}{8} + \frac{81 \cdot 2}{8} - 3$$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$$\frac{81}{8} - 3$$

$t = -1$

$t = 3$

$2t - 2 + 4\cancel{t^2} = -1 - \cancel{t^2}$

$3t^2 + 2t - 1 = 0$

$t = -1 \quad t = \frac{1}{3}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

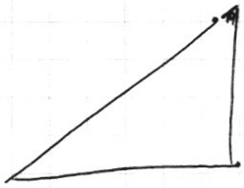
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

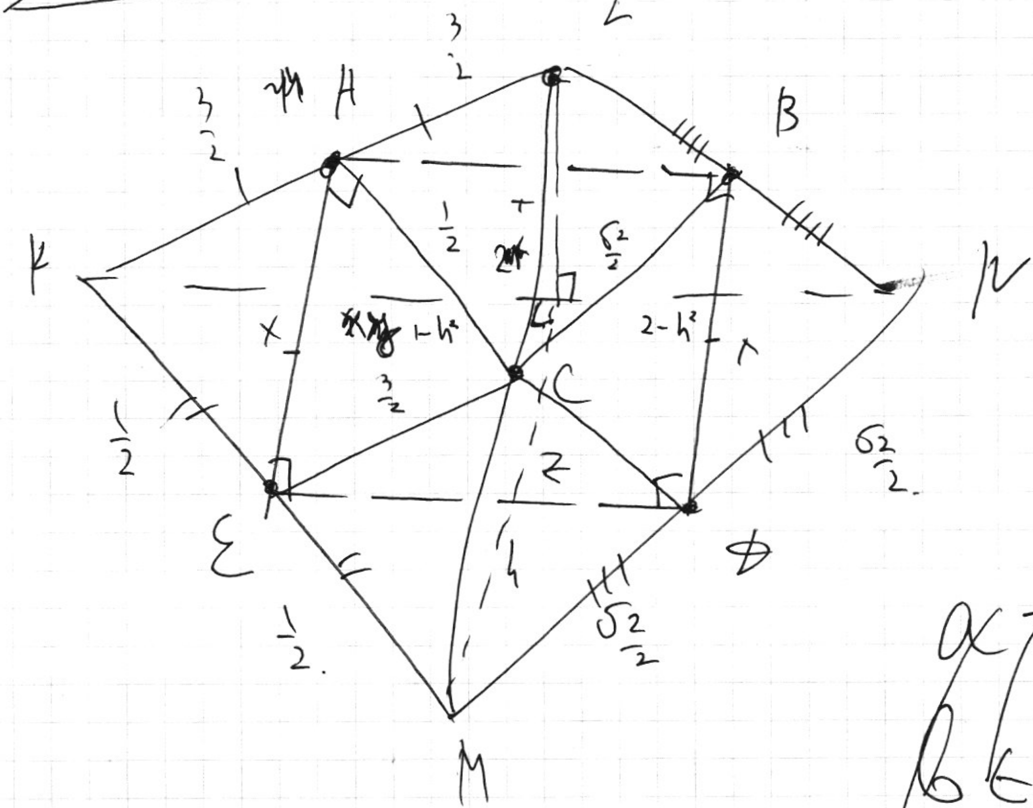
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9 -



h^2.



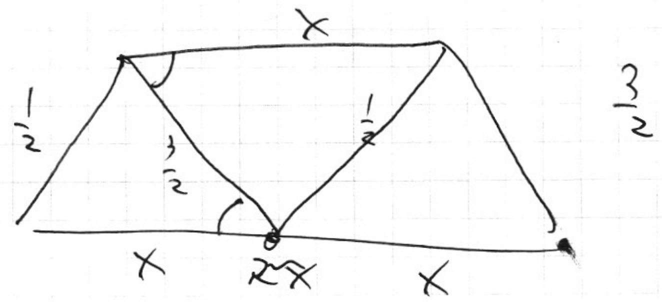
$a = 0$

$b \in [3;4]$

$9^2 - y^2 +$

$+ 1 - y^2$

$82 - 2y^2$



$1 - h^2 = 2-$

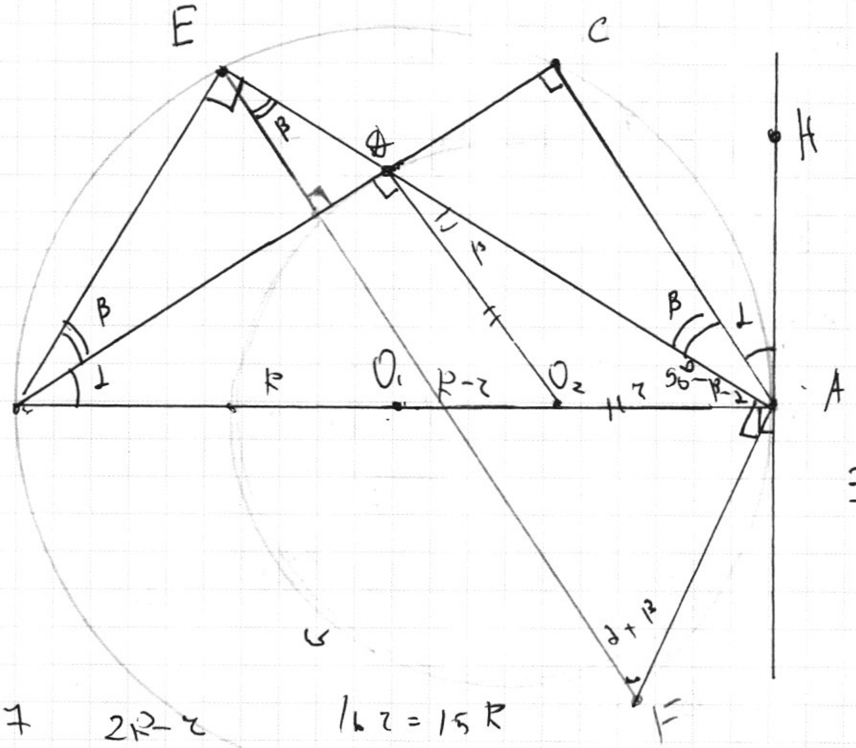
$17^2 = 16R^2 - 16rR = R^2$

$\frac{17^2}{4} = (2R - 2r) \cdot 2R \quad \alpha = \beta.$

$16r = 15R^2$

$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$



$BD \cdot CD = ED \cdot AD.$

$\frac{BD}{DC} = \frac{BO_2}{O_2A} = BO_1 +$

$\frac{2R - r}{r} = \frac{17}{15}.$

$30R - 15r = 17r$

$30R = 34r$

$15R = 17r$

$\frac{17}{16} = \frac{2R - r}{8R}$

$16r = 15R$

$17R = 32R - 16r$

$\angle AFE = \alpha + \beta$

$90 - \alpha - \beta = \beta \quad 2\beta + \alpha = 90^\circ$

$BD^2 = 2R(2R - 2r)$

$AC^2 = 4R^2 - BC^2$

$\alpha.$

$O_2A = O_2D$!

$\beta = 90 - \beta - \alpha.$

$\frac{2R - r}{r} = \frac{17}{15}$

$2\beta + \alpha = 90^\circ$

$30R - 15r = 17r.$

$225 + 15 = 240$

$17^2 = 16R^2 - 16rR$

$15R = 16r.$

$\frac{17^2}{4} = 2R \cdot (2R - 2r)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_3 t \cdot \log_3 (1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}) \geq \log_3 5 \ \log_3 t$

$\log_3 t \ (\log_3 (1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}) - \log_3 5) \geq 0$

$\begin{cases} (t-1)(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - 5) \geq 0 \\ t > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (t-1)(t^{\log_3 \frac{4}{3}} - 4) \geq 0 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{t^{\log_3 4}}{t} - 4$

$t^{\log_3 4} - 4t$

$t^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq 4 = t^{\log_t 4}.$

$t^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq 4.$ $\quad (t-1)(\log_3 \frac{4}{3} - \log_t 4)$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}.$

$t + 4^{\log_3 t} - 5^{\log_3 t} \geq 0.$ $\quad \log_3 t = a.$ $\quad t = 3^a.$

$3^a + 4^a - 5^a \geq 0 \quad |:4^a$

$\left(\frac{3}{4}\right)^a + 1 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^a$ $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^a + 1 - \left(\frac{5}{4}\right)^a \geq 0$

$a = 2 \quad a \leq 2.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$a = 6b.$

№2

$x \geq 12y.$

$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

2) $(x-6)^2 + 36(y - \frac{1}{2})^2 = 90.$

$36 \quad +9$

$2y(x-6)$

$b, a \neq 0$

$x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\left(\frac{a}{b}\right) + 36 = 0$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$x - 6 = a$

$6y - 3 = b.$

$\frac{a}{b} = 4$

$x - 12y =$

$\boxed{\frac{a}{b} = 9.}$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y \mp x + 6.$

$a - 2b = \sqrt{(x-6)(2y-1)} = \sqrt{a \cdot \frac{b}{3}}$

$2y(x-6) - (x-6)$

№3.

$16x - x^2 = t \qquad t > 0$

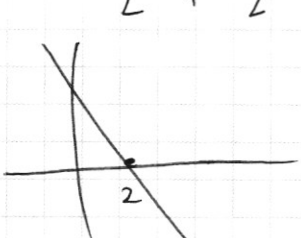
$10x + |t|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(t)}$

$t > 0$

$t + |t|^{\log_3 4} \cancel{z} - 5^{\log_3 t} \geq 0$

$4^{\log_3 t} \leq 2 \cdot 4^{\log_4 2}$

$t + t^{\log_3 4} - 5^{\log_3 t} \geq 0$



$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}.$

$\log_3 t \leq \frac{1}{2} = \log_3 \sqrt{3}$

$t \leq 3$

$t \cdot (1 + t^{\log_3 4 - 1}) \geq 5^{\log_3 t}.$

$t \cdot (1 + t$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\cos$

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$

№1

1) $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

2) $\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$.

2) $\sin(2\alpha)\ (\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$.

$\sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$

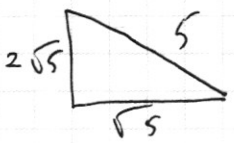
$\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{5}$

$\cos 2\beta\ (\sin 2\alpha\ \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha) = -\frac{1}{5}$.

$\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{5}$

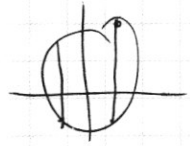
$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos 2\beta = +\frac{1}{5}\sqrt5$



$\sin 2\beta = \pm \frac{2\sqrt5}{5}$

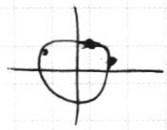
$\sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$



1) $\frac{2\sqrt5}{\sqrt5\sqrt5} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = -\frac{1}{2} \\ \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$2\alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}n.$



$\alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}n.$

$\sin(2\alpha) \pm 2\cos 2\alpha = 1$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$. $\quad \log_3 t \leq 2.$

$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$.

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

"0" – 9 $\qquad 9 \cdot 15 \cdot 2 + 8 \cdot 7 \cdot 2$

"1" – 8 $\qquad$ 0 $\;$ –1

"2" – 3

"3" – 1 $\qquad 9 \cdot 15 \cdot 2 + 8 \cdot 7 \cdot 2 + \ldots$

"4" – 2.

"5" – 1

$y \quad \frac{1}{x}. \qquad (x;y) \quad (y;x)$

$-32x^2+36x-7=0 \qquad \frac{81}{-25}{56}$

$-32x^2+36x-3=4$

$-(32x^2-36x+3) \qquad -\frac{32}{16}+\frac{36}{4}-7 \qquad -\frac{32 \cdot 25}{16 \cdot 16} -3+\frac{81}{8}$

$x^2-\frac{9}{8}x+3 \qquad -2+9-7=0 \qquad \frac{56}{8}-3$

$-32\left(\left(x-\frac{9}{16}\right)^2+\frac{3}{32}-\frac{81}{256}\right)$

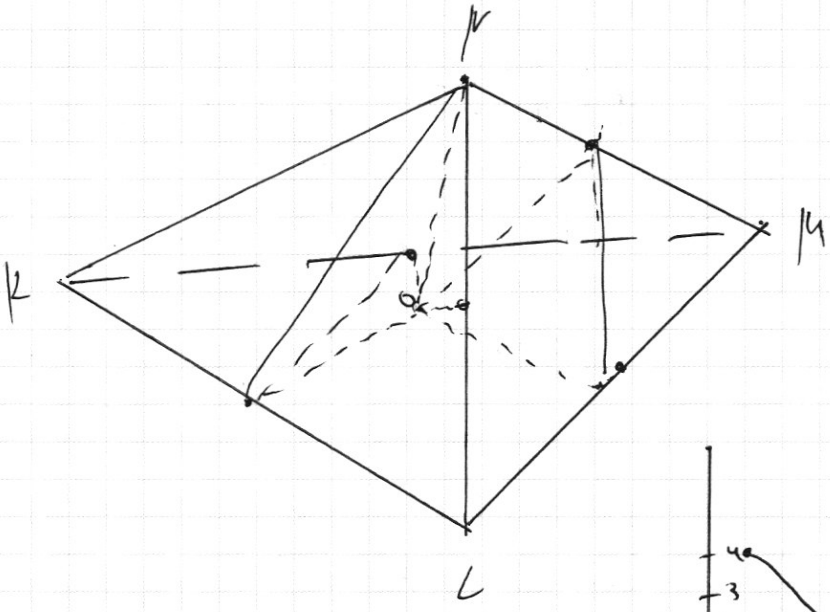
256

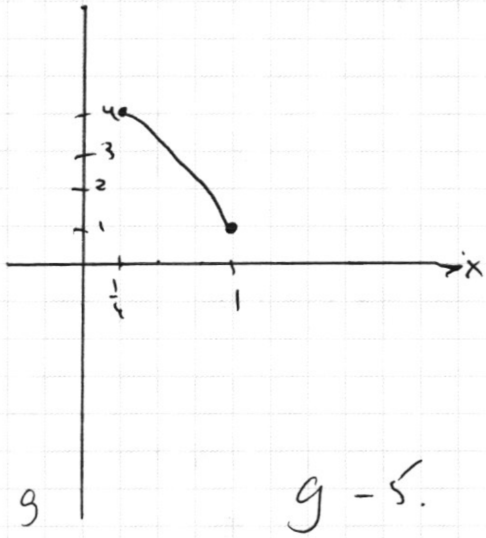
$-32\left(x-\frac{9}{16}\right)^2 - 3 + \frac{81}{8}$

$-\frac{32 \cdot 49}{16 \cdot 16}-3+\frac{81}{8} \qquad \frac{81 - 49}{32} \qquad 189 + 12 = 201$

$\frac{32}{8}-3$

4 – 3





$-32x^2+36x-3>4$

$-32x^2+36x-7>0$

x^2+2x+1

$(x+1)^2$

$$\frac{-\cancel{32}}{\cancel{4}\cdot 4}\cancel{x}^2 + \frac{36}{4} - 3$$

9 − 5.

$\frac{+\cancel{36}\ 18}{\cancel{32}\cdot 2}$ 9

16.

$-2\cdot 32x+36=0$

$x=$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$p+$

$4+\frac{4}{4}$ $\frac{36}{2\cdot 32}$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$.

$\frac{32}{16}-\frac{36}{4}<3$

4

1

$$\begin{cases} 2\le x\le 25 \\ 2\le y\le 25 \\ f(x/y)<0 \end{cases}$$

$f(x/y)=f(x\cdot\frac{1}{y})=$
$=f(x)+f(\frac{1}{y})$

$f(x)+f(\frac{1}{y})<0$

$f(t\cdot\frac{1}{t})=f(t)+f(\frac{1}{t})$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$.

$f(1)=f(1)+f(1)\Rightarrow$
$f(1)=0$

$f(t)=-f(\frac{1}{t})$

$f(2)=0$

$f(4)=0$

$f(3)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$.

$f(7)=1$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(23)=5$

$f(24)=1$

$f(25)=2$.

$ax + b \geq \frac{16x-16}{4x-5}$ $x \in [\frac{1}{4}; 1]$.

$ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$

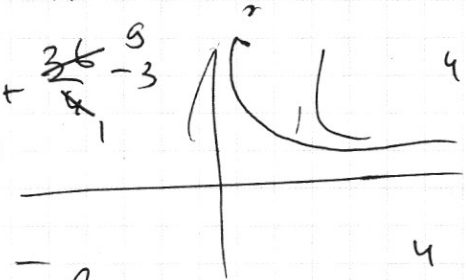
$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{16x-20+4}{4x-5}$

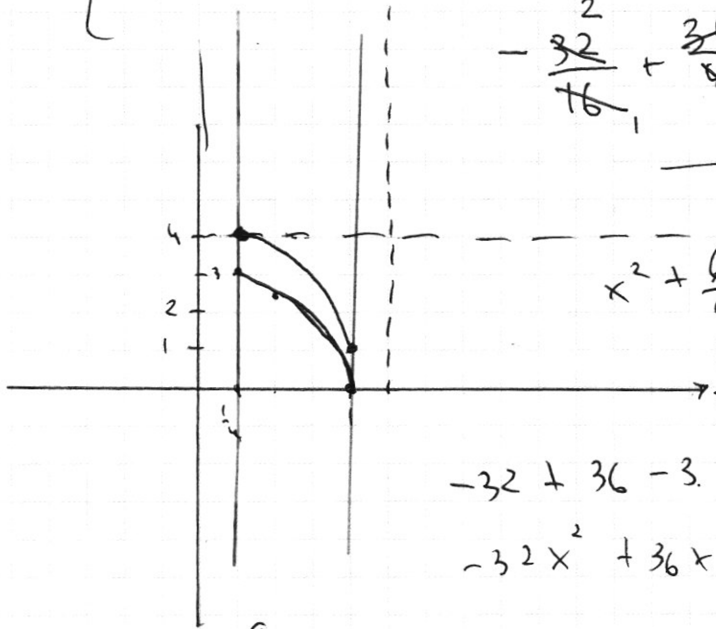
$$\begin{cases} (4x-5)(ax+b) \leq 16x-16 \\ 32x^2 - 36x + 3 + ax + b \leq 0 \end{cases}$$

$4 + \frac{4}{4x-5}$

$-\frac{\cancel{32}^{2}}{\cancel{16}_{1}} + \frac{\cancel{36}^{9}}{\cancel{4}_{1}} - 3$

$4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$





$4 + \frac{4}{4\cdot5-4}$

$x^2 + \frac{b}{a}x$

$(x + \frac{b}{2a})^2$ 4 $\frac{\cancel{36}\,18}{\cancel{2}\cdot32}$

$\frac{1}{2}$

$33-32$

$-32 + 36 - 3.$ $4 + \frac{1}{2-5}$ $4 - \frac{4}{3}$

$-32x^2 + 36x - 3$ $-\frac{b}{2a}$ 8

$ax^2 + bx + c$ $\frac{8}{3}$

$-\frac{\cancel{32}^{2}}{16} + \frac{\cancel{36}^{9}}{\cancel{4}} - 3$ $-\frac{32^2}{16} + \frac{36}{4} - 3$ $\frac{ab^2}{4a^2} +$

$\frac{\cancel{36}\,18}{\cancel{2}\cdot32}$ $\frac{9}{16}$ $-32 + 36 - 3$

$-2 + 9 - 3$

$\frac{+\cancel{36}\,18}{2\cdot32}$

$-2 + 9 - 3$

$-\frac{b}{2a}$

$-\frac{\cancel{32}^{2}}{\cancel{16}} + \frac{36}{4} - 3$

$\frac{9}{16}$

$ax^2 + bx + c$

$-2 + 9 - 3$ $-\frac{\cancel{32}^{2}\cdot 81}{\cancel{16}\cdot16} + \frac{\cancel{36}^{9}\cdot5}{16} - 3$

$\frac{4}{16}$ $\frac{16}{16}$

$-\frac{\cancel{32}^{2}}{\cancel{16}} + \frac{36}{4} - 3$

$-2 + 9 - 3$ $\frac{81\cdot2}{16} - 3$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)