МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} & (2) \end{cases}$$

(2): $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$, подставим (1):

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = +\frac{2}{\sqrt{5}}$

Тогда имеем $\left[\begin{array}{l}\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{array}\right.$

1) Рассмотрим случай $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha =$

$= \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$2\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$2\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 0 \\ 2\sin\alpha + \cos\alpha = 0\end{array}\right.$

$\cos\alpha = 0$ – не подходит, т.к. $\operatorname{tg}\alpha$ не будет определен.

$2\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$

2) Рассмотрим случай $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow 2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$$

$$4\sin\alpha\cos\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = -1$$

$$2\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -2 \end{array}\right.$$

Ответ: $-2; -\frac{1}{2}; 0$.

Задача 2.

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} & (1) \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 & (2) \end{cases}$$

(1): $x - 2y = \sqrt{x(y-1) - 2(y-1)}$

$x - 2y = \sqrt{x-2}\cdot\sqrt{y-1}$, обозначим $b = x - 2$,

~~$a = x - 2$~~. $a = y - 1$. тогда $b - 2a = \sqrt{ab}$

~~$a = 2$~~ Возведем в квадрат, а т.к. переход неравносильный, то в конце проверим корни подстановкой.

$b^2 - 4ab + 4a^2 = ab \Rightarrow b^2 - 5ab + 4a^2 = 0 \quad /: a^2 \neq 0$

(при $a = 0$ система решения не имеет)

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 5\left(\frac{b}{a}\right) + 4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{b}{a} = 1 \\ \frac{b}{a} = 4 \end{array}\right.$$

Рассмотрим случай $\frac{b}{a} = 1$:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b = a \Rightarrow x-2 = y-1 \Rightarrow x = y+1$.

подставим в (2):

$(y+1)^2 + 9y^2 - 4(y+1) - 18y = 12$

$y^2 + 2y + 1 + 9y^2 - 4y - 4 - 18y = 12$

$10y^2 - 20y - 15 = 0$

$2y^2 - 4y - 3 = 0$

$D = 16 + 8 \cdot 3 = 40$

$y_1 = \frac{4 + 2\sqrt{10}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$, $x_1 = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

$y_2 = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$, $x_2 = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$

проверим y_1, x_1: $2 + \frac{\sqrt{10}}{2} - 2 - \sqrt{10} = \sqrt{\frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2}}$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ - неверно $\Rightarrow \left(2 + \frac{\sqrt{10}}{2}; 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ - не подходит

проверим y_2, x_2: $2 - \frac{\sqrt{10}}{2} - 2 + \sqrt{10} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}$

$\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ok, подходит $\left(2 - \frac{\sqrt{10}}{2}; 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

Рассмотрим случай $\frac{b}{a} = 4$

$\Rightarrow x - 2 = 4y - 4 \Rightarrow x = 4y - 2$

подставим в (2):

$(4y-2)^2 + 9y^2 - 4(4y-2) - 18y = 12$

$16y^2 - 16y + 4 + 9y^2 - 16y + 8 - 18y = 12$

$25y^2 - 50y = 0$ $\quad 25y(y-2) = 0$

при $y=0$, $x=-2$ проверка $-2-0=\sqrt{(0+2)+2+2}$ неверно, поэтому не подходит.

при $y=2$, $x=6$ проверка: $6-4=\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}$ ok
$36+9\cdot4-24-36=12$ верно. $(6;2)$ подходит.

Ответ: $(6;2)$, $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};\ 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

Задача 3.

$$5^{-\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

Замена $t=x^2+18x$

$$5^{\log_{12}t}+t\geq|t|^{\log_{12}13}$$

ОДЗ: $x^2+18x>0 \Rightarrow t>0$, поэтому модуль раскрываем с „+".

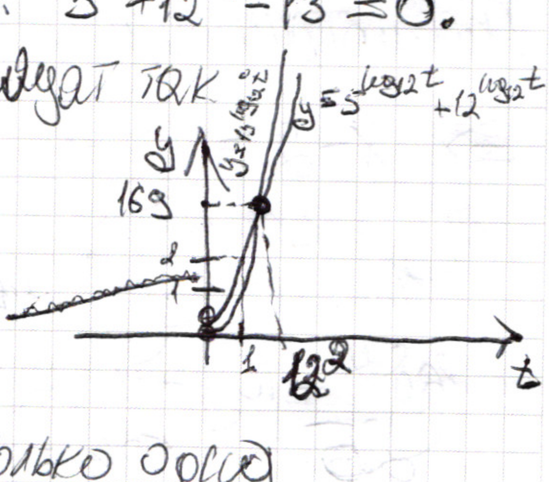
$$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}-t^{\log_{12}13}\geq0$$

$$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}-13^{\log_{12}t}\geq0$$

Заметим, что при $t=12^2$: $5^2+12^2-13^2=0$.

Графики функций схематично выглядят так:



Поэтому точка пересечения только одна)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $t>12^2$ $5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}-13^{\log_{12}t}<0.$

при $t\le 12^2$ $5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}-13^{\log_{12}t}\ge 0$

при $t=12^2$ $5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}-13^{\log_{12}t}=0.$

нам подходят $t\in(0;12^2]$

Обратная замена:

$0<x^2+18x\le 12^2$

1) $x^2+18x>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

2) $x^2+18x-144\le 0$

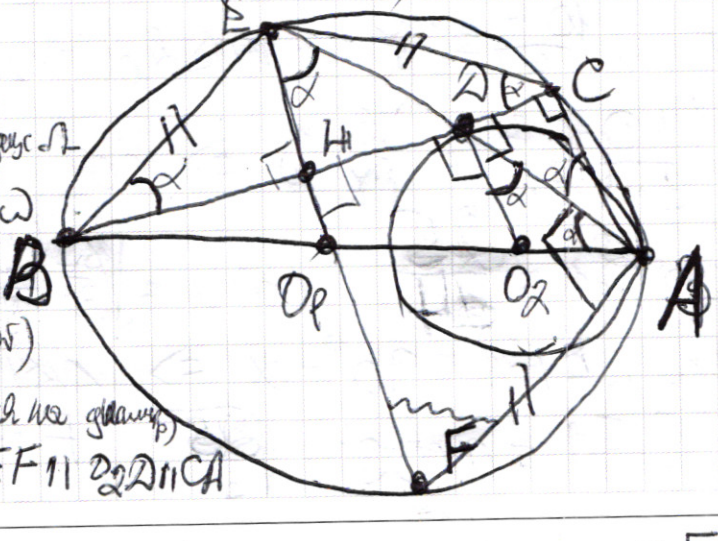
$(x+24)(x-6)\le 0 \Rightarrow x\in[-24;6]$

получаем: $\begin{cases} x\in[-24;6] \\ x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty) \end{cases}$

$\Rightarrow x\in[-24;-18)\cup[6;+\infty)$

Ответ: $x\in[-24;-18)\cup[6;+\infty)$

Задача 4.



O_1-центр окр Ω, R-радиус Ω

O_2 центр окр ω, r-радиус ω

$O_2D\perp BC$ (радиус к касательной)

$AC\perp BC$ ($\angle BCA=90°$, т.к. опирается на диаметр)

$EF\perp BC$ (по условию) $\Rightarrow EF\parallel O_2D\parallel CA$

Пусть $\alpha = O_2DA$, тогда из параллельности $\angle DAC = \alpha$, $\angle FEA = \alpha$; $\angle EAC = \angle EBA = \alpha$ (на дугу EC опираются)
$\Rightarrow \triangle BEC$ – равнобедренный, $BH = HC$, т.к. EH – высота, медиана (т. H – пересечение EF и BC)
$\Rightarrow$ имеем $BH = HC$ и $HO_1 \parallel AC \Rightarrow$ ~~EF~~
HO_1 – средняя линия $\triangle BCA \Rightarrow BO_1 = O_1A = R$
$\Rightarrow EF$ – диаметр, $\angle EAF = 90°$, $\triangle FAE$ – прямоугольный
из т. Фалеса : $\frac{BH}{BD} = \frac{BO_1}{BO_2}$ $\quad BH = \frac{BC}{2} = \frac{BD+DC}{2}$

$BO_1 = R$, $BO_2 = 2R - r$

$\Rightarrow (2R - r) \cdot \frac{BD + DC}{2} = BD \cdot R \Rightarrow (2R - r) \cdot \frac{25}{2} = 17R$
$34R = 50R - 25r \Rightarrow R = \frac{25}{16} r$

из $\triangle BDO_2$ прямоугольного по т. Пиф $BD^2 + r^2 = (2R - r)^2$
$\Rightarrow BD^2 + r^2 = \frac{17^2}{8^2} r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{BD^2 \cdot 8^2}{17^2 - 8^2} = \frac{17^2 \cdot 8^2}{9 \cdot 25}$
$r = \frac{17 \cdot 8}{3 \cdot 5} = \frac{136}{15}$, $R = \frac{25}{16} \cdot \frac{17 \cdot 8}{3 \cdot 5} = \frac{85}{6}$.

из $\triangle CAB$ – прямоуг. : $CA^2 = 4R^2 - BC^2 = \frac{4 \cdot 17^2 \cdot 5^2}{36} - 25^2 =$
$= \left(\frac{2 \cdot 17 \cdot 5}{6} - 25\right)\left(\frac{2 \cdot 17 \cdot 5}{6} + 25\right) = \frac{10}{3} \cdot \frac{160}{3}$
$CA = \frac{10 \cdot 4}{3} = \frac{40}{3}$; ~~$\cos 2\alpha$~~ $\angle BAC = 2\alpha$, $\cos 2\alpha = \frac{CA}{2R} =$
$= \frac{40 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{8}{17}$ ~~$\Rightarrow 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{16}{17}$~~ $\cos 2\alpha = \frac{8}{17}$, $2\cos^2\alpha - 1 = \frac{8}{17}$

$\cos^2\alpha = \frac{25}{34}$ $\quad \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$ т.к. α – острый угол $\triangle FAE$
тогда $\angle EFA = 90° - \alpha \Rightarrow$ ~~$\angle EFA = \arccos\frac{5}{\sqrt{34}}$~~
$\Rightarrow \angle EFA = \arcsin\sqrt{\frac{25}{34}}$; $FA = EC = BE$ (на них опираются углы α)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т. косинусов для $\triangle BEC$:

$$BC^2 = BE^2 + EC^2 - 2\cdot BE\cdot EC\cdot\cos(180-2\alpha)$$

$$BC^2 = 2AF^2(1+\cos 2\alpha)$$

$$AF^2 = \frac{BC^2}{2(1+\cos 2\alpha)} = \cancel{\frac{BC^2}{2(1+\frac{16}{17})}} = \cancel{\frac{BC^2\cdot 17}{2\cdot 33}} = \frac{BC^2}{2(1+\frac{8}{17})} = \frac{17BC^2}{50}$$

$$\cancel{AF = \frac{BC\sqrt{17}}{\sqrt{2\cdot 33}} = \frac{25\sqrt{17}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{33}}} \quad \cancel{\sin\angle EFA = \frac{AE}{EF} \Rightarrow AE = 2R\cdot\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{34}} =}$$

$$\cancel{= \frac{2\cdot 17\cdot 5\cdot\sqrt{33}}{2\cdot 3\cdot\sqrt{34}} = \frac{17\cdot 5\cdot\sqrt{33}}{3\cdot\sqrt{34}}}$$

$$\cancel{S_{FAE} = \frac{AE\cdot AF}{2} = \frac{17\cdot 5\cdot\sqrt{33}}{3\cdot\sqrt{34}}\cdot\frac{25\sqrt{17}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{33}}\cdot\frac{1}{2} =}$$

$$\cancel{= \frac{17\cdot 5\cdot 25}{3\cdot 2\cdot 2} = \frac{2125}{12}}$$

$$AF = \frac{\sqrt{17}BC}{5\sqrt{2}}, \quad AE = 2R\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{2\cdot 5\cdot 17\cdot 5}{6\sqrt{34}}$$

$$S_{AEF} = \frac{AE\cdot AF}{2} = \frac{\sqrt{17}\,BC}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{2\cdot 5\cdot 5\cdot 17}{6\sqrt{34}}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{BC\cdot 17\cdot 5}{2\cdot 6} = \frac{25\cdot 17\cdot 5}{12} = \frac{2125}{12}$$

Ответ: $\frac{136}{15} = r$, $R = \frac{85}{6}$; $S = \frac{2125}{12}$; $\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2R = \sqrt{34}x$

$R = \sqrt{17}x$

$R = \frac{\sqrt{34}}{2}$

$x = \frac{2R}{\sqrt{34}}$

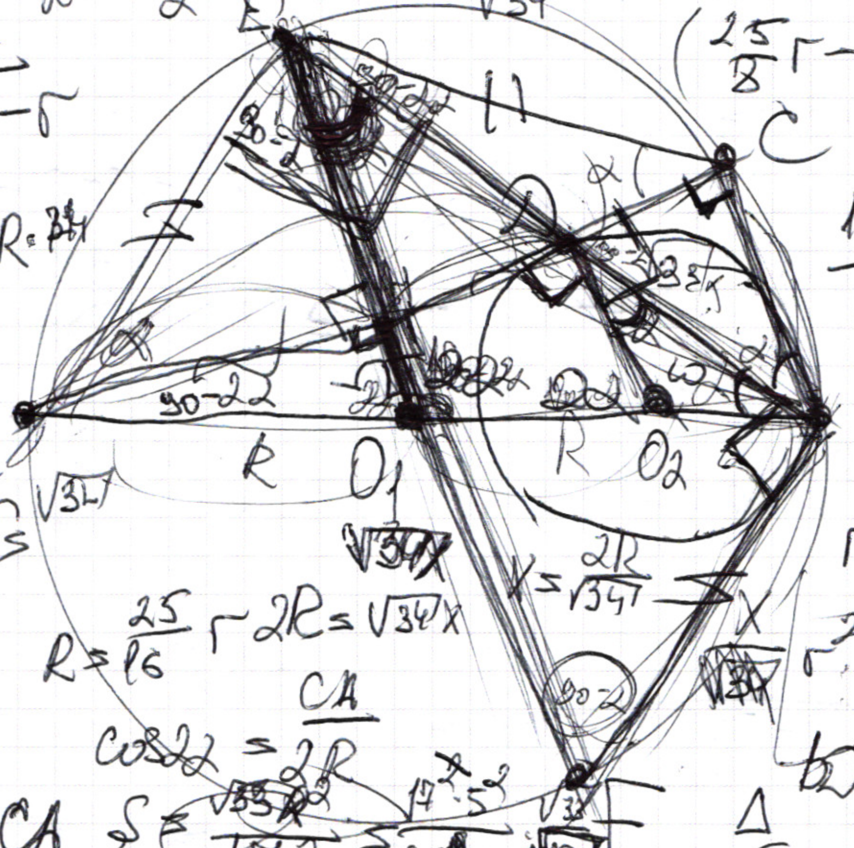
$\frac{BA}{BD} = \frac{R}{2R - r}$

$\left(\frac{25}{8}r - r\right)^2 = r^2 + BD^2$

$\frac{25}{8}(2R - r) = R$

$\frac{25}{15} - 1 = \frac{17}{8}$

$\frac{17^2 r^2}{8^2} = r^2 + BD^2$



$34R = 50R - 25r$

$25r = 16R$

$\boxed{\frac{R}{r} = \frac{25}{16}}$

$S = \sqrt{34}$

$\sqrt{34}x$

$R = \frac{25}{16}r \quad 2R = \sqrt{34}x$

$x = \frac{2R}{\sqrt{34}}$

$r^2\left(\frac{17^2 - 8^2}{8^2}\right) = BD^2$

$r^2 = \frac{8^2}{25 \cdot 9} BD^2$

$r = \frac{8}{5 \cdot 3} BD$

$\frac{17 \cdot 8}{15}$

$\cos 2\alpha = \frac{CA}{2R}$

$O_1H = \frac{CA}{2} \quad S = \frac{\sqrt{33}R}{17 \cdot 2} = \frac{17^2 \cdot 5^2}{36} \quad \sqrt{33}$

$CA^2 = 4R^2 - BC^2$

$(2R - r)^2 = r^2 + BD^2$

$CA = 4 \cdot \frac{17^2 \cdot 5^2}{6^2} - BC^2$

$\frac{\sqrt{33}}{2}$

$R = \frac{8BD}{5 \cdot 3} \cdot \frac{25}{16 \cdot 5} = \frac{17 \cdot 5}{6}$

$\frac{10}{3}$

$\frac{85 - 75}{3}$

$O_1H^2 + BH^2 = R^2$

$x = \frac{17 \cdot 5 \cdot 2}{36 \cdot \sqrt{34}}$

$\frac{17 \cdot 5}{3} - \frac{75}{3}$

$\frac{4R^2 - BC^2}{4} + \frac{BC^2}{4} = R^2$

$\frac{BH}{HD} = \frac{R}{R - r}$

$\frac{5}{15} \cdot \frac{25}{5}$

$\frac{17}{8} \sqrt{30}$

$4R^2 - BC^2 + BC^2 = 4R^2$

$\frac{BC}{2\left(\frac{BC}{2} - 2Dc\right)} = \frac{R}{R - r} = \frac{125}{16}$

$\frac{2 \cdot 17 \cdot 5}{6}$

$x = \frac{2R}{\sqrt{34}} = \frac{2 \cdot 17 \cdot 5}{6 \cdot 3\sqrt{34}}$

$25(R - r) = R(25 - 16)$

$16R = 25r$

$\times\frac{125}{17}$

2025

$25R - 25r = 9R$

$\frac{25\sqrt{33}}{36}$

$\frac{R}{r} = \frac{25}{16}$

$\frac{85}{3} - 75$

$S = \frac{4R^2}{34} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{33}}{2} = \frac{4 \cdot 17^2 5^2}{36 \cdot 34} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{33}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$13^2 - 18\cdot 6$

$25+36 \quad CA^2 = 4\cdot 11$

$\sqrt{8}\ \frac{25\sqrt{17}}{\sqrt{21}}\quad 18\cdot 2 = \left(\frac{25\sqrt{17}}{\sqrt{21}}\right)^2\quad \frac{1}{\sqrt{33}}$

$\times\frac{125}{17}$ 875 $+24$ 125 2125

$\times\frac{24}{6}$ 144

$36+18\cdot 6 = 108$

$= 80+64 =$ 144

OK

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$\times\frac{289}{5}$ 1445

$$ax+b \ge \frac{12x+11}{4x+3}$$

$85+75=160$

$8x^2+30x+17$

$D = 900 - 32\cdot 17 = 356$

$= 2\cdot 178 = 4\cdot 89$

$$\frac{(ax+b)(4x+3) - 12x-11}{4x+3} \ge 0$$

1725

$-18 = x_1+x_2$

$$\frac{4ax^2+3ax+4bx+3b-12x-11}{4x+3} \ge 0$$

$144 = x_1x_2$

$24^2 - 18\cdot 24 = 6\cdot 24 = 144$

$5^{\log 12}$

$(-24)\cdot 6$

18

$\cancel{4ax^2+(3a+4b)x -}$

18^2 $\times\frac{18}{18}$ 84 284

$$\frac{4ax^2+(3a+4b-12)x+3b-11}{4x+3} \ge 0$$

-24 6

$$D = (3a+4b-12)^2 - 16a(3b-11) =$$

$$= 9a^2+16b^2+144+2(12ab-36a-48b)-48ab+11=$$

$$= 9a^2+16b^2+144+24ab-72a-96b-48ab+11=$$

$\frac{18}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{33}x^2}{2} = \frac{\sqrt{33}x^2}{34\cdot 22}$$

$$x^2+18x-144=0$$

$\times\frac{18}{6}$ 108

$$D = 264+4\cdot 144$$

$36+18\cdot 6$

$\times\frac{17}{17}$ $\frac{17}{17}$ 289

144

$36-18\cdot 6-144$

x^2 $18\cdot 18 - 18\cdot 18 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

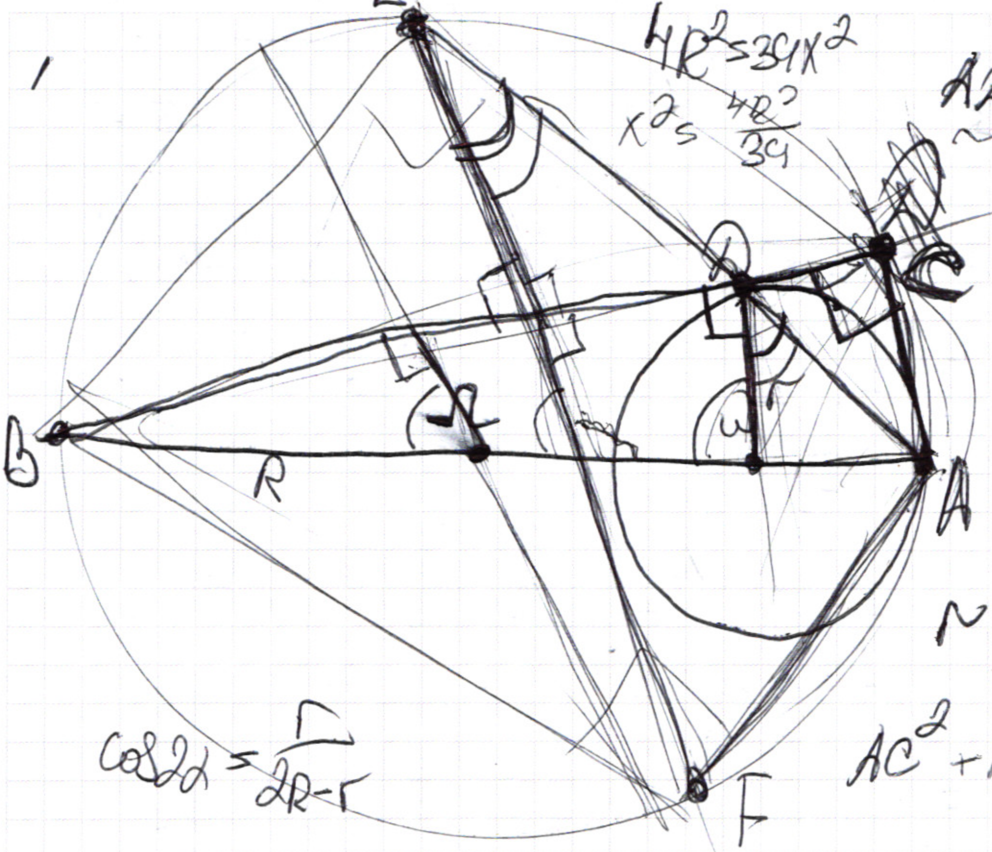
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1



$4R^2 = 34x^2$

$x^2 = \frac{4R^2}{34}$

$AD \cdot ED = BD \cdot DC$

$S_{AEF} - ?$

$\angle AFE - ?$

$R, r - ?$

$r = \frac{4R^2 - BD^2}{4R}$

$AC^2 + BC^2 = 4R^2$

$\cos 2\alpha = \frac{r}{2R - r}$

$AD \cdot ED = BD \cdot DC$

$DA^2 = DC^2 + AC^2$

$(2R - r)^2 = r^2 + BD^2$

$2R(2R - 2r) = BD^2$

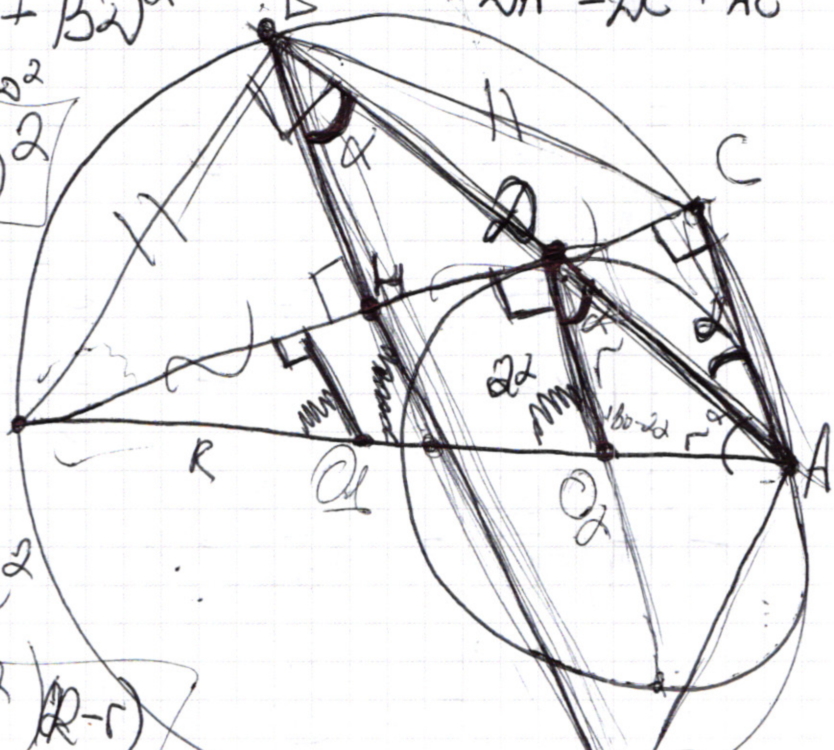
$\boxed{4R^2 - 4Rr = BD^2}$

$DA^2 = 2r^2(1 + \cos 2\alpha)$

$2r^2(1 + \cos 2\alpha) = DC^2 + 4R^2 - BC^2$, $\cos 2\alpha = \frac{r}{2R-r}$

$\frac{2r^2 \cdot 2R}{2R - r} = DC^2 + 4R^2 - BC^2$

$\boxed{4Rr^2 = (DC^2 + 4R^2 - BC^2)(2R - r)}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\cancel{4R}\cdot\frac{(4R^2-BD^2)^2}{(4R)^{\cancel{2}}} = (DC^2+4R^2-BC^2)\left(2R-\frac{4R^2-BD^2}{4R}\right)$$

$$\frac{(4R^2-BD^2)^2}{\cancel{4R}} = \frac{(DC^2+4R^2-BC^2)(8R^2-4R^2+BD^2)}{\cancel{4R}}$$

$25^2-8^2 = 33\cdot 17$ $\qquad BC = 25$

$$16R^4-8R^2BD^2 = (DC^2+4R^2-BC^2)(4R^2+BD^2)$$

$$16R^4-8R^2\cdot 17^2 = (64+4R^2-25^2)(4R^2+17^2)$$

$$16R^4-17^2\cdot 8R^2 = (-33\cdot 17+4R^2)(4R^2+17^2)$$

$$\cancel{16R^4}-17^2\cdot 8R^2 = \cancel{16R^4}-4\cdot 17\cdot 33R^2+4R^2\cdot 17^2-33\cdot 17^3$$

$$-12R^2\cdot 17^2 = -4\cdot 17\cdot 33R^2-33\cdot 17^3$$

$$-12R^2\cdot 17 = -4\cdot 33R^2-33\cdot 17^2$$

$17 \cdot 12 = 34$, 204

$$72R^2 = 33\cdot 17^2 \qquad R^2 = \frac{33\cdot 17^2}{72} = \frac{11\cdot 17^2}{24}$$

$33\cdot 4 = 132$, $204-132 = 72$

$$R = \sqrt{\frac{33\cdot 17^2}{72}} = \sqrt{\frac{11\cdot 17^2}{24}} = \sqrt{\frac{11}{6}}\cdot\frac{17}{2}$$

$6\cdot 4$

$11\cdot 12 = 132$

$$r = \frac{\frac{\cancel{4}\cdot 11\cdot 17^2}{\cancel{24}_6}-17^2}{4\cdot\frac{17}{2}\sqrt{\frac{11}{6}}} = \frac{\frac{5}{6}\cdot 17^{\cancel{2}}}{2\cdot\cancel{17}\sqrt{\frac{11}{6}}} = \frac{17\cdot 5\sqrt{6}}{12\sqrt{11}} = \text{И}$$

$$4\cdot\frac{17^2\cdot 5^2\sqrt{33}}{6^2\cdot 34\cdot 2}$$

$$= \frac{17\cdot 5\sqrt{66}}{12\cdot 11} = \frac{17\cdot 5\sqrt{66}}{132} = \frac{85\sqrt{66}}{132} \qquad R = \frac{\sqrt{66}\cdot 17}{12}$$

$$\frac{4R^2\sqrt{33}}{361\cdot 2} =$$

1 $\quad \cancel{\frac{R}{r} = \frac{11}{5}} \qquad X = \frac{2R}{\sqrt{34}} \qquad S = \frac{\sqrt{33}\cdot X^2}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\frac{b}{a}=4 \Rightarrow x-2=4y-4$ $\quad b=x-2$, $a=y-1$

$x=4y-2$ $\quad f'(t)=$

$(4y-2)^2+9y^2-4(4y-2)-18y=12$

$16y^2-16y+\cancel{4}+9y^2-16y+\cancel{8}-18y=\cancel{12}$

$25y^2-50y=0$

$25y(y-2)=0$

~~$y=0$, $x=-2$~~ $\quad -2-0=0+2+0+4$ не ок

$\boxed{y=2 \; : \; x=6}$ подходит $\quad 6-4^2=4.$ OK

Ответ: $(6;2)$

$\cancel{36}+36-24-\cancel{36}=12$ $\quad$ 12 ок

$\left(2-\frac{\sqrt{16}}{2};\ 1-\frac{\sqrt{16}}{2}\right)$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$x^2+18x=t$ $\quad t>0$ по ОДЗ.

$5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$ $\quad$ переход по ОДЗ

$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$t^{\log_{12}13} - t - t^{\log_{12}5} \leq 0$

$t\left(t^{\log_{12}13-1} - 1 - t^{\log_{12}5-1}\right) \leq 0$

$t^{\log_{12}13-1} - 1 - t^{\log_{12}5-1} \leq 0$

$t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1 - t^{\log_{12}\frac{5}{12}} \leq 0$

$c \cdot t^{c-1}$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t} + t \geq 13^{\log_{12}t}$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13}$

$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$

$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} = 13^{\log_{12}t}$

$25 + 144 = 169$ OK

$1 + 1 - 1 = 0$

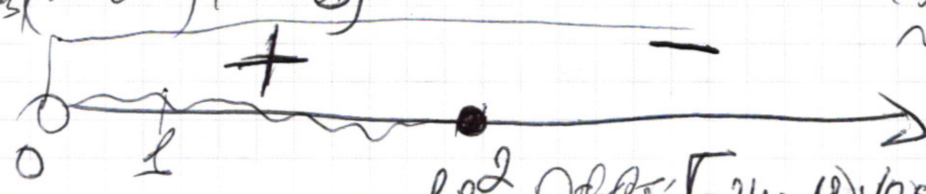
$x^2 + 18x = 144$

$x^2 + 18x - 144 \leq 0$

$36 + 108 - 144 = 0$

$12 \cdot 12 = 6(24)$

$(x+24)(x-6) \leq 0$



$t \in (0; 12^2]$

$0 < x^2 + 18x \leq 12^2$

$\frac{2 \cdot 17 \cdot 5}{8 \cdot 3}$

$17 + 8 = 25$

$\sqrt[3]{13}$

$\times\frac{169}{13}$, 507, 169, 2197

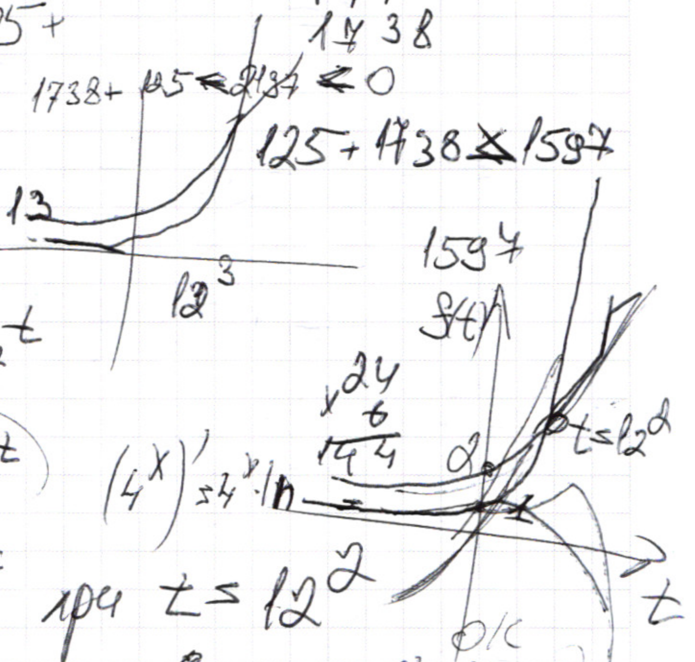
$1738 \cdot 12 = 3476 + 17380 = 20856$

$144 \cdot 12 = 288 + 1440 = 1728$

$625 +$

$1738 + 125 \leq 2197 \leq 0$

$125 + 1738 \geq 1597$



$(4^x)' = 4^x \cdot \ln$

при $t = 12^2$

$24^2 + 18 \cdot 24 - 6 \cdot 24 = 0$

$-24 \cdot 24 = 0$

$5^3 + 12^3 \vee 13^3$

ОДЗ: $x^2 + 18x > 0$

$x(x+18) > 0$

-18, 0

$\times\frac{125}{17}$, 875, 125

Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$

$\begin{cases} x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-24; 6] \end{cases}$

$x^2 + 18x - 144 \leq 0$

$x \in [-24; 6]$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$D = 16+$

$x^2-4x-21=0$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$\cancel{x(y-1)}$

$x=2$

$x^2+9-4x-18=12$

$$\begin{cases} (x-2y)^2+4xy+5y^2-4x-18y=12 \\ x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \end{cases}$$

$y=1 \quad x=2$

$4+9-8-18=12$

$13-8-16$

$xy-x-2y+2+4xy+5y^2-4x-18y=12$

$5y^2+5xy-5x-20y-10=0$

$y^2+xy-x-4y-2=0$

$(y-2)^2-6+xy-x=0$

$(y-2)^2-6+x(y-1)=0$

$b^2-4ab+4a^2=ab$

$b^2-5ab+4a^2=0 \,/ : a^2$

$\left(\frac{b}{a}\right)^2-5\left(\frac{b}{a}\right)+4=0$

$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{b}{a}=1 \\ \frac{b}{a}=4 \end{array}\right.$$

$x-2y=\sqrt{y-1}\cdot\sqrt{x-2}$

$a=y-1, \; b=x-2$

$b-2a=\sqrt{ab}$

$(x-2)^2-4+(y-1)^2+8y^2-16y-1=12$

$b^2-5+a^2+8y^2-16y=12$

$b^2+a^2+8y(y-2)=17$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

1) $\frac{b}{a} = \cancel{1} \Rightarrow \cancel{x-1 = y-1} \quad \cancel{x=y}$

$x-2 = y-1$

$x-y = \cancel{1}$ $\quad x = y+1$

$1-y = \sqrt{(y-1)(y-1)}$

$x^2+9y^2-4x-18y = 12$

$(y+1)^2+9y^2-4(y+1)-18y = 12$

$y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y = 12$

$10y^2-20y-15 = 0$ $\quad \boxed{x = 2y}$

$2y^2-4y-3 = 0$

$D = 16+4\cdot2\cdot3 = 16+24 = 40$

$y_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$

1) $x = 2+\frac{\sqrt{10}}{2}$, $y = 1+\frac{\sqrt{10}}{2}$

2) $\cancel{y=2}$ $\boxed{x = 2-\frac{\sqrt{10}}{2},\ y = 1-\frac{\sqrt{10}}{2}}$ $\quad -\frac{\sqrt{10}}{2}$ – не ок

1) проверка: $2+\frac{\sqrt{10}}{2}-2-\frac{2\sqrt{10}}{2} =$ – не ок

$\cancel{x(y-1)-2(y-1)}$

$\cancel{(x-2)(y-1) = \frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{\frac{10}{4}} =}$

2) проверка: $2-\frac{\sqrt{10}}{2}-2+\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$\sqrt{\left(+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ OK

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ~~sin(2α + sin~~

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

~~sin(α+β) cos~~

$\sin\gamma + \sin\theta$

$+\begin{cases} \sin(\gamma+\theta) = \sin\gamma\cos\theta + \sin\theta\cos\gamma \\ \sin(\gamma-\theta) = \sin\gamma\cos\theta - \sin\theta\cos\gamma \end{cases}$

$\sin(\gamma+\theta) + \sin(\gamma-\theta) = 2\sin\gamma\cos\theta$

$\left.\begin{matrix} \gamma+\theta = a \\ \gamma-\theta = b \end{matrix}\right) + \quad \gamma = \frac{a+b}{2} \quad \theta = \frac{a-b}{2}$

$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{5}}}\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\frac{2}{-\sqrt{5}} = -\frac{4}{5}$ $\quad -\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ # $\Rightarrow \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ или $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

C_{1} + "

$\sin(2\alpha+2\beta) = \cancel{2\sin}\ \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta =$

$= \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \cdot \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\cos\alpha \sin\alpha + 1 - 2\sin^2\alpha = -1$

$2 + 4\cos\alpha\sin\alpha - 2\sin^2\alpha = 0$

$1 + \cancel{2}\sin 2\alpha - \cancel{2}\sin^2\alpha = 0$

$\cos^2\alpha + \sin 2\alpha = 0$

$\cos\alpha(\cos\alpha + 2\sin\alpha) = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = 0$ или $\boxed{tg\alpha = -\frac{1}{2}}$

tg не сущ.

2) с $_{''}$ - $''$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \underbrace{\cos 2\beta}_{\frac{2}{\sqrt{5}}} + \cos 2\alpha \underbrace{\sin 2\beta}_{-\frac{1}{\sqrt{5}}} =$

$= \frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$2\sin 2\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha) = -1$

$\cancel{2\sin 2\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = -1}$

$\cancel{\sin\alpha(\sin\alpha + 2\cos}$

Отв: $-2; -\frac{1}{2}; 0$

$\sin 2\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

1) $\sin\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{tg\alpha = 0}$

2) $2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{tg\alpha = -2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)