МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$ $tg\alpha$ - ? определен => => $\cos\alpha\neq0$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta$, тогда

$\cos2\beta = -\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt5}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt5}$,   ($\sin2\beta\neq0$ очев)

1) Если $\sin2\beta>0$, тогда $\sin2\beta=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\cos2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1$ $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1=-1$

$\cos\alpha(4\sin\alpha+2\cos\alpha)=0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0 \text{ - не может быть т.к. } tg\alpha \text{ - определен}\\ 4\sin\alpha+2\cos\alpha=0\end{array}\right.$ => $\sin\alpha=-\frac{1}{2}\cos\alpha$ => $tg\alpha=-\frac{1}{2}$

2) Если $\sin2\beta<0$, $\sin2\beta=-\sqrt{1-\frac{4}{5}}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\cos2\alpha\cdot\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}-\cos2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-1$

$2\sin2\alpha-\cos2\alpha=-1$ $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$4\sin\alpha\cos\alpha-1+2\sin^2\alpha=-1$

$\sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha)=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0 \text{ - подходит}\\ \sin\alpha=-2\cos\alpha \text{ - подходит, } \cos\alpha\neq0\end{array}\right.$, тогда $\left[\begin{array}{l}tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=0\\ tg\alpha=-2\end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{1}{2}$; 0; -2

Задача 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

ОДЗ: $xy-x-2y+2\geq 0$, $(y-1)x-2(y-1)\geq 0$
$(x-2)(y-1)\geq 0$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{x-2}=a$, $\sqrt{y-1}=b$; тогда $x-2y=a^2-2b^2$ $\quad a\cdot b\geq 0$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$, $(x-2)^2+9(y-1)^2=25$; $a^4+9b^4=25$

$$\begin{cases} a^2-2b^2=ab \quad (1) \\ a^4+9b^4=25 \quad (2) \end{cases}$$

(1): $(a-b)(a+b)-b(b+a)=0$, т.е.
$(a-2b)(a+b)=0$ $\quad \left[\begin{array}{l} a=2b \\ a=-b \end{array}\right.$

1) Если $a=2b$ подставим в (2)

$16b^4+9b^4=25$; $\quad 25b^4=25$; $\quad \begin{cases} b=1 \Rightarrow a=2, & ab>0 \text{ уд} \\ b=-1 \rightarrow a=-2, & ab>0 - \text{уд.} \end{cases}$

1.1. $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x-2}=2 \\ \sqrt{y-1}=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

~~1.2.~~ Задача 2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$xy-x-2y+2=(x-2)(y-1)\geq 0$

возведем первое в квадрат, $x-2y\geq 0$
иначе не реше-ний

$$\begin{cases} (x-2y)^2=(x-2)(y-1) \\ (x^2-4x+4)+9(y^2-2y+1)-13=12 \end{cases}$$

Пусть $x-2=a$, $y-1=b$
$x-2y=a-2b$

$$\begin{cases} (a-2b)^2=ab \quad (1) \\ a^2+9b^2=25 \quad (2) \end{cases}$$

Рассм (1) как кв. от-но a:
$a^2-5ab+4b^2=0$ $\quad D=25b^2-16b^2=9b^2$

$$\left[\begin{array}{l} a=\frac{5b-3b}{2}=b \\ a=\frac{5b+3b}{2}=4b \end{array}\right.$$

1) $a=b$ - подставим в (2)

$b^2+9b^2=25$; $\quad b^2=\frac{25}{10}$; $\quad \left[\begin{array}{l} b=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ b=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} a=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ a=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$

1.1. $\begin{cases} x-2=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$, $\begin{cases} x=\sqrt{\frac{5}{2}}+2 \\ y=\sqrt{\frac{5}{2}}+1 \end{cases}$ в таком случае $x-2y=$
$\sqrt{\frac{5}{2}}+2-\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot 2<0$ - не уд.

т.к. $x-2y$ - должен быть ≥ 0

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2 продолжение.

1.2 $\begin{cases} a = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ b = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y = 1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$ $x-2y = 2-\sqrt{\frac{5}{2}} - 2+2\sqrt{\frac{5}{2}} > 0$ подходит.

2) $a=4b$ – (6); подставим в (2)

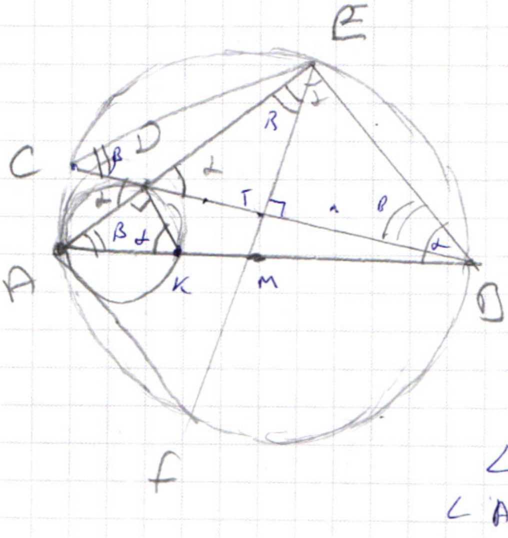
$16b^2+9b^2=25$: $\left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-4 \end{array}\right.$

2.1 $\begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$ $x-2y=2>0$ подходит

2.2. $\begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2=-4 \\ y-1=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$ $x-2y=-2<0$ не уд.

Ответ: $(6;2)$ $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

Задача 4.



$BD=17$; $DC=8$

R – радиус Ω r – радиус ω

Окр-ти касаются ⇒ центры на одной прямой – AB.

$\angle AKD = \angle ADC$ (угол м/у касат. CB и хордой AD)

$\angle ADC = \angle EDT$ (смежные)

$\angle DET = 90^\circ - \angle EDT$ (т.к. $EF \perp BC$)

$\angle ADK = 90^\circ - \angle AKD$ (т.к. $\angle ADK = 90^\circ$ – опир на диаметр AK)

т.е. $\angle DAK = \angle AEM \Rightarrow AM = ME$ $\triangle AME$ р/б

$\triangle AEB$ – прямоуг. $\angle AEB = 90^\circ$ – опир на диаметр, но тогда EM – медиана из прямого угла, M – середина AB – центр окр-ти Ω: $EM = MA = MB = R$

Задача 4 продолжение.

$\angle DEB = 90°$; тогда ET - высота из прямого угла, т.е.

$\angle EDT = \angle TEB$; $\angle DBE = \angle DET$; $\angle ECB = \angle EAB$ - опир. $\breve{EB}$

Тогда $\angle ECB = \angle DBE \Rightarrow \triangle ECB$ - р/б; $EC = EB$, ET - высота, медиана, биссектриса

Тогда $BT = TC = \frac{25}{2}$; $TD = TC - DC = \frac{9}{2}$

$\angle AEM = \beta$; $\angle AKD = \alpha$, из $\angle KDB = \beta$

ET - высота из прямого угла $ET^2 = TD \cdot TB$, $ET = \sqrt{\frac{9 \cdot 25}{4}} = \frac{15}{2}$

тогда $tg\alpha = \frac{ET}{DT} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ (из $\triangle DTE$)

$\angle AFE = \angle ABE$ (опир. на $\breve{AE}$) $= \alpha$, т.к. $\angle ABE = \angle MEB = \alpha$

$\boxed{\angle AFE = arctg\frac{5}{3}}$; из $\triangle DET$: $DE^2 = DT^2 + TE^2 = \frac{1}{4}(15^2 + 9^2)$

$DE = \frac{1}{2}\sqrt{306}$; Св-во хорд AE и CB: $AD \cdot DE = CD \cdot DB$

$AD \cdot \frac{1}{2}\sqrt{306} = 8 \cdot 17$; $AD = \frac{272}{\sqrt{306}}$; из $\triangle ADK$: $\sin\alpha = \frac{AD}{AK}$

$AK = 2r$; $r = \frac{AD}{2\sin\alpha}$; $\sin\alpha = \frac{ET}{DE} = \frac{15}{\sqrt{306}}$

$r = \frac{272}{\sqrt{306}} \cdot \frac{\sqrt{306}}{30} = \frac{272}{30} = \frac{136}{15}$; $AE = AD + DE = \frac{272}{\sqrt{306}} + \frac{\sqrt{306}}{2} = \frac{850}{2\sqrt{306}}$

из $\triangle AEB$: $AB = 2R = \frac{AE}{\sin\alpha} \Rightarrow$ $R = \frac{850}{2\sqrt{306}} \cdot \frac{\sqrt{306}}{2 \cdot 15} = \frac{850}{60} = \frac{85}{6}$

$\boxed{\begin{array}{l} r = \frac{136}{15} \\ R = \frac{85}{6} \end{array}}$

$S_{\triangle AEF}$ - ?: $AE = \frac{850}{2\sqrt{306}}$; $EF = 2R = \frac{85}{3}$

$\sin\beta = \frac{DT}{DE} = \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{306}} = \frac{9}{\sqrt{306}}$

$S_{AEF} = \frac{AE \cdot EF \sin\beta}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{850}{2\sqrt{306}} \cdot \frac{85}{3} \cdot \frac{9}{\sqrt{306}} = \frac{850 \cdot 85 \cdot 9}{12 \cdot 306} = \frac{425 \cdot 85}{12 \cdot 34}$

Ответ: $R = \frac{85}{6}$; $r = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = arctg\frac{5}{3}$

$S_{AEF} = \frac{425 \cdot 85}{12 \cdot 34} = \frac{2125}{24}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6.

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

при $a = b = 1$: $f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$; $f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$; $f(4) = f(2) + f(2) = 0$; $f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$;

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$; $f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$; $f(8) = f(2) + f(4) = 0$; $f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(10) = f(5) + f(2) = 1$; $f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$; $f(12) = f(3) + f(4) = 0$; $f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$; $f(15) = f(5)\ f(3) = 1$; $f(16) = f(2)\ f(8) = 0$;

$f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$; $f(18) = f(2)\ f(9) = 0$; $f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$; $f(20) = f(5) + f(4) = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$; $f(22) = f(2) + f(11) = 2$; $f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$; $f(24) = 0$

Очевидно, что $f(n^k) = f(n) \cdot k$ по св-ву, тогда

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$, $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$. Пусть

X, такое, что $f(x) = 0$, тогда $f(y)$ - может быть 1, 2, 3, 4, 5

~~для~~ Нетрудно заметить, что среди вычисленных значений ф-й: у нас 11 - „0" 7 - „1" 2 - „2"; 1 - „3"; 2 „4" 1 - „5"

для X - вариантов 11, для Y 13 кол-во пар $11 \cdot 13$

2) если $f(X) = 1$, для y функция быть такой, что $f(y) = 2, 3, 4, 5$

для x - вариантов 7, для y - 6 пар $7 \cdot 6$

3) $f(x) = 2$, тогда $f(y) = 3, 4, 5$ для x - вариантов 2, для y вариантов 4 пар $2 \cdot 4$

4) $f(x) = 3$, тогда $f(y) = 4, 5$ для x - 1 вариант, для y - 3 варианта пар $3 \cdot 1$

8

Задача 5 продолжение

5) $f(x)=4$, тогда $f(y)=5$ для x – 2 вар для y – 1 вар

пар $8\cdot 2$

Итого точек пар: $11\cdot 13+7\cdot 6+2\cdot 4+3+2=198$.

Задача 3.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

ОДЗ: $x^2+18x>0$, $x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$; $x^2+18x>0 \Rightarrow |x^2+18x|=x^2+18x$

Пусть $t=x^2+18x$

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$, $f(t)=5^{\log_{12}t}+t-t^{\log_{12}13}$

~~очевидно ф-я возрастает при $t\geq 8$, заметим что при $t=8$~~

~~$f(12)=12$~~ $t=5^{\log_5 t}$

$5^{\log_{12}t}+5^{\log_5 t} \geq 5^{\log_5 t\cdot\log_{12}13}$

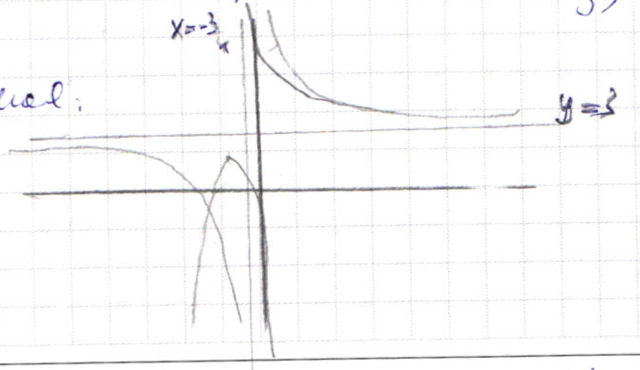
Задача 6 $\underbrace{\frac{12x+11}{4x+3}}_{f(x)} \leq \underbrace{ax+b}_{h(x)} \leq \underbrace{-8x^2-30x-17}_{g(x)}$ р/м пл-ть OXY

$f(x)=\frac{12x+11}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}$; гипербола асимптоты вертикальная $x=-\frac{3}{4}$

горизонтальная $y=3$

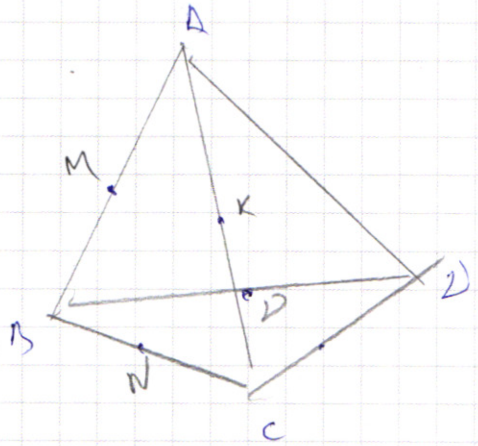
$g(x)=-8x^2-30x-17$ – парабола ветви вниз, вершина $x_в=-\frac{15}{8}$

$h(x)$ – прямая.

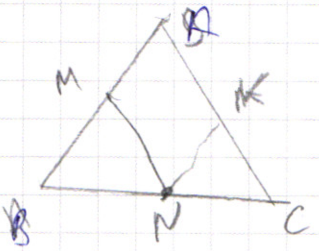


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7.



сечение Ω (ADC)



MBNK – впис.

$\angle MBK + \angle MNK = 180^\circ$

Очевидно, что если $\angle BA < 90^\circ$, то нельзя на BC выбрать точку N так что $\angle MNK > 90^\circ$. Аналогично если $\angle A > 90^\circ \Rightarrow$ такое возможно только если $\angle A = 90^\circ$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(2) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$

$f(5) = 1$; $f(6) = 0$; $f(7) = 1$; $f(8) = 0$; $f(9) = 0$

$f(10) = 1$; $f(11) = 2$; $f(12) = 0$; $f(13) = 3$; $f(14) = 1$

$f(15) = 1$; $f(16) = 0$; $f(17) = 4$; $f(18) = 0$; $f(19) = 4$

$f(20) = 1$; $f(21) = 1$; $f(22) = 2$; $f(23) = 5$; $f(24) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ ≥ 0 . $x : y$ - то, сольно ≥ 0

x и y — вз. простые. $f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

x и y ког-ко нор взаимно простых - П,

$f(x) = 0$, $y = \frac{1}{q}$ - не уч

$y = \frac{1}{6}$: где $f(6) = 2, 3, 4, 5$, 10 уже не подходит

только $x =$ гласс что $f(x) = 3$

$130 + 13 = 143 + 42 + 8 + 3 + 2$

~~11; 13; 15; 17; 18;~~

$185 + 13 = 198$

только x, которых $f(x) = 0$

$x = 2 \Rightarrow y = 5; 7; 11$. $\frac{24 \cdot 12}{2} =$

$289 = 2R \cdot (2R - 2r)$

$289 = 4R^2 - 4R \cdot \frac{15}{\sqrt{206}}$ $\frac{880}{2} = \frac{425 \cdot 85}{3}$

$\frac{R^2}{4} = \frac{225}{206} + 4 \cdot 289$ $306 | 9$ 34

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\log_{12} t \cdot \log_5 t = \log_5 t \cdot \log_{12} 13$

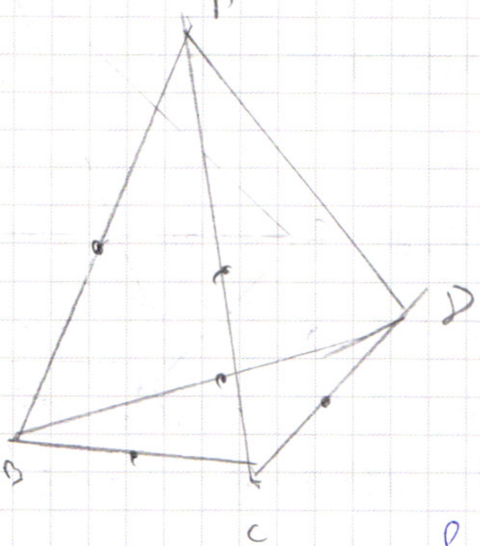
$\log_{12} t \cdot \log_5 t (1 - \log_{12} 13) =$

AB = 1, BD = 2

$80 + 56$

$= 136$

$200 + 82 = \frac{272}{\sqrt{206}}$



B

$BC^{420} = 3$

$BC = ?$

$17x + 17$

225

$\sin D$

AE

$225 - 136 =$

$8x^2 + 30x + 17$

1040

225

-136

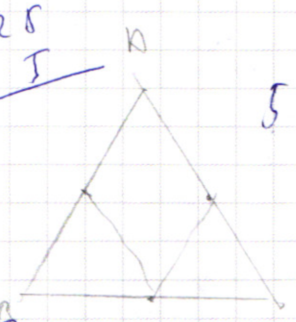
89

$85 \cdot 17$

425

$5 \cdot$

24



$5^a + 5^b = 5^c$

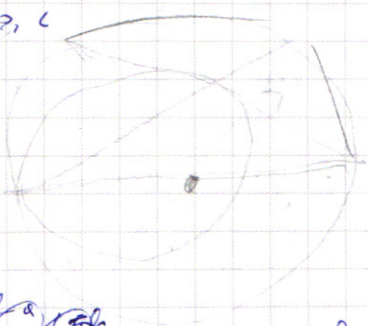
$a + 6 = c$

$S_{\triangle AEF} = 8$

$2^x + 8$

$5^b (5^{a-b} + 8) = 5^c$

$5^{a-b} + 8 = 5^{c-b}$



$(400 + 25) \cdot 5$

$2000 + 17$

$\frac{225}{4} + \frac{81}{4}$

$\frac{AE}{AB} = \sin\alpha$

5^{b-a}

$= \frac{8 \cdot 9}{16} + \frac{30 \cdot 3}{4} - 17$

$AB = \frac{EA}{\sin\alpha} = \frac{750}{2\sqrt{306}} \cdot \frac{\sqrt{206}}{35} = \frac{750}{30} = 25$

$\frac{81}{4} + \frac{225}{4}$

BC = 25

$BF = \frac{25}{2}$

$DF = \frac{25}{2} - DC = \frac{25 - 16}{2} = \frac{9}{2}$

$tg\alpha = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{5}{3}$

$\frac{EF}{FB} = \frac{BD}{EF}$

$\sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{25}{2}} = \frac{15}{2}$

$tg\,\beta = \frac{15}{2} \cdot \frac{3}{5}$

$544 + 306 =$

$\frac{150}{60} = \frac{15}{6} =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x = t$

$5^{\log_{12} t} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$

$|x^2+18x| > 1$, то t

$\cancel{x=2b}$

$(a-2b)^2 = ab$

$a^2 - 5ab + b^2 = 0$

$a = \frac{5b \pm \sqrt{21b^2}}{2}$

$a^2 + 9b^2 = 25$

$a = \frac{5b + b\sqrt{21}}{2}$

$\frac{25b^2 + 10b^2\sqrt{21} + 21b^2}{4} + 9b^2 = 25 \mid \cdot 4$

$46b^2 + 10b^2\sqrt{21} + 36b$

$f\left(\frac{1}{p_1 p_2}\right)$

$f\left(\frac{1}{q}\right) + f\left(\frac{1}{q_2}\right)$

$a, b \in Q$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ p-простое

кол-во $(x;y)$ $2 \leq x \leq 24$; $2 \leq y \leq 24$ $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$x, y \in \mathbb{N}$

$\frac{x}{y} =$ $x = \frac{p_1 p_2 \ldots p_n}{q_1 q_2 \ldots q_n}$; $y = \frac{r_1 \ldots r_n}{r}$

$2 \cdot 3 \cdot 5$

$x = \frac{m}{n}$ $X = p_1 \cdot p_2$

$7 \cdot 3$

$f(p_1^{\alpha}) \cdot f(p_2^{\beta})$

$f\left(\frac{p_1^{\alpha} p_2^{\beta}}{q_1^{\alpha} \cdot q_2^{\beta}}\right) = f(p_1^{\alpha} p_2^{\beta}) + f\left(\frac{1}{q_1^{\alpha} q_2^{\beta}}\right)$

$\underbrace{\left[\frac{p_1}{4}\right] + \left[\frac{p_1}{4}\right] + \left[\frac{p_1}{4}\right]}_{\alpha} + \underbrace{\left[\frac{p_2}{4}\right] \ldots + \left[\frac{p_2}{4}\right]}_{\beta}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$a^2-2b^2=2$

$\cancel{x^2-4xy+4y^2=R}$

$-\frac{-30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$$\begin{cases}(a-2b)^2 = ab \\ a^2+4b^2=25\end{cases}$$

$a^2-5ab+b^2=0$

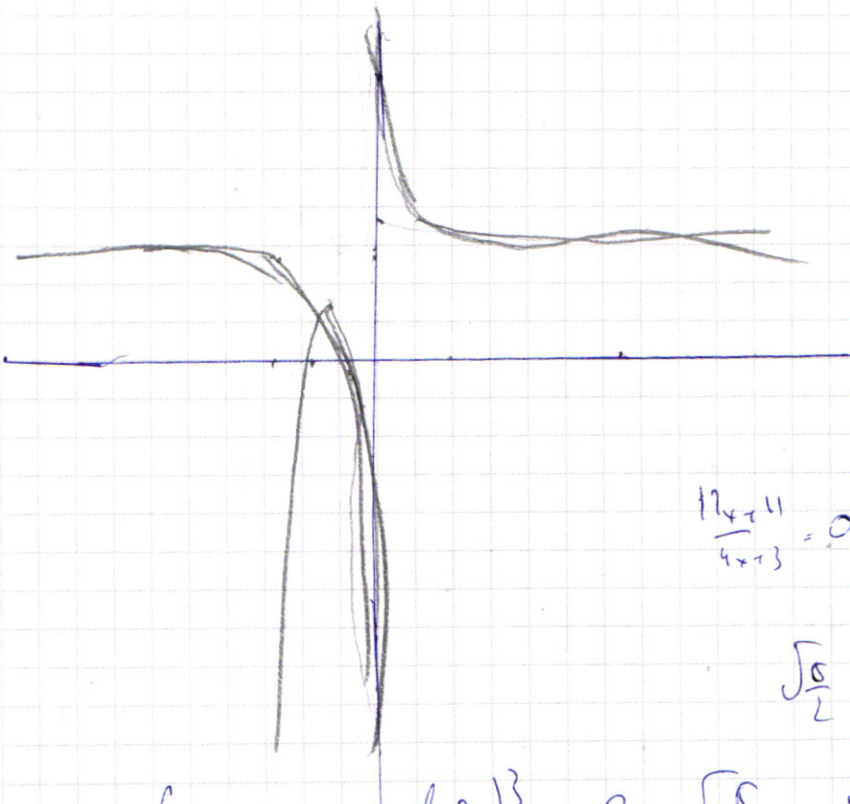
$D = 25b^2-4b^2 = 21b^2$

$a = \frac{b-b\sqrt{21}}{2}$ $\quad a = \frac{b+b\sqrt{21}}{2}$

$-\frac{8\cdot 15}{64}+\frac{30\cdot 15}{8}-17 = -\frac{15}{8}+\frac{160}{8}-17 = \frac{135}{8}-17 = \frac{136-122}{8} = \frac{13}{8}$

$\cancel{b^2} + \frac{b^2+2b^2\sqrt{21}+21b^2}{4} + 4b^2 - 25 + 10$

$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{3(4x+3)+2}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$



$3+\frac{2}{3}$

$\frac{2}{4}$

$-11+3=-8$

$3+\frac{2}{-8} = 3-\frac{1}{4}$

$2\frac{3}{4}$

$3+\frac{2}{-3-1}$

$\frac{12x+11}{4x+3}=0 \quad x=-\frac{11}{12}$

$\sqrt{\frac{5}{2}}+2 \quad \sqrt{\frac{5}{2}}-2$

$5^{\log_{12} t} + t - \cancel{6}^{\log_{12} 13} \ge 0$

$2-\sqrt{\frac{5}{2}} - 2 + ?$

$t = 5^{\log_5 t}$

$5^{\log_{12} 5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle AEF = \triangle DBE$

$BT = TC$

$CD = 8;\ BD = 17$

$R_1, r\quad R, r,\quad \angle AFE\ ?$

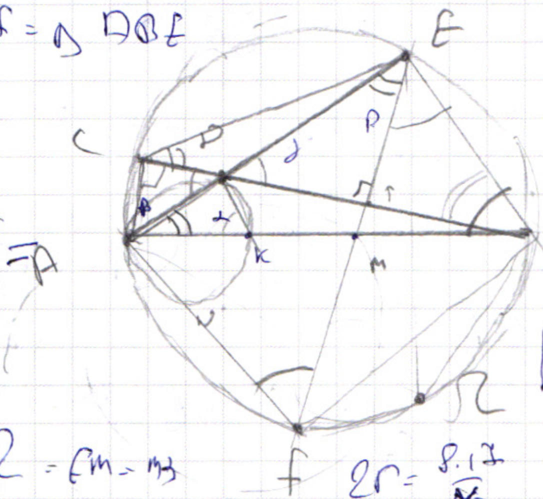
$S_{AEF}\ ?$

$EF \perp BC$

$\sin\alpha = \frac{AD}{AK} =$

$= \frac{AE}{AB} = \frac{ET}{DE} = A$

$=$



$BK \cdot AB = 17^2$

$\angle CAD = \angle CBE$

$\boxed{ET = 1}$

$\triangle AFB$ - прямоуг.

$AM = R = EM = MB$

$KM = R - 2r$

$2r = \frac{8 \cdot 17}{\cancel{x}}$

$KD \parallel EB$

$\angle DAK = \beta$

$\sin\beta = \frac{DE}{BD}$

$\cos\beta = \frac{AD}{2r}$

$\angle KAD = \angle DEF$

$\frac{AD}{DE} = \frac{CD}{D}$

$\angle AKD = \angle ABE = \angle ADC = \angle BDE$

$tg\,\beta = \frac{CD}{AD}$

$\angle DEB = 90^\circ$

$\frac{DE}{BD} \cdot \frac{2r}{AD}$

$AM = ME$

EM - медиана из прямого угла - ?

$\angle AKD = \angle AFE = \angle$

$\sin\alpha = \frac{AD}{2r}$

$ET \cdot DT \cdot TB$

$\triangle DEB \sim \triangle DET$

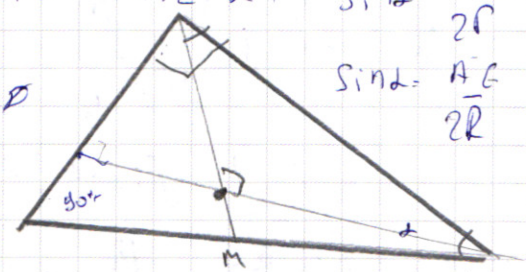
$\frac{CD}{\cancel{AD}} = \frac{DE \cdot 2r}{BD \cdot AD}$

$\sin\alpha = \frac{AE}{2R}$

EF - диаметр

$\frac{DE}{2R} = \frac{DT}{EB} = \frac{ET}{AE}$

$\sin$



$EM = AM = MB = MF$

$\angle AFE = \alpha$

$2R \cdot ET = DE \cdot AE$

$\sin\beta = \frac{EB}{2R}$

$\sin\alpha = tg\,\alpha = \frac{BT}{ET} = \frac{ET}{DT}$

$BA = 2R;\quad KA = r$

$\boxed{2R \cdot (2R - 2r) = 17^2}$

$\sin\beta = \frac{DE}{BD}$

$\triangle ADK \sim \triangle AEB:$

$\boxed{\frac{2r}{R} = \frac{AD}{AE} = \frac{DK}{EB}}$

$\frac{AD \cdot DE}{2r} = \frac{DE \cdot AE}{2R}$

$\frac{EB}{AE} = \frac{DE}{EB} =$

$AD \cdot DE \cdot CD \cdot DB$

$\triangle DCD \sim \triangle DEDB$

$\frac{75}{6} = \frac{25}{2}$

$\frac{AD}{AD + DE} = 1 + \frac{DE}{AD}$

$\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{BD}$

$289 - R$

$\frac{AD}{ET} = \frac{DK}{DT} = \frac{AK}{DE}$

$AD \cdot DE = 2r \cdot ET$

$\triangle ADK \sim \triangle DET$

$BT = \frac{2r}{2}$

$\sin\alpha = 1\quad \frac{25}{2} - \frac{16}{2} = \frac{9}{2}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)

$TB = \frac{25}{2}$; $ET = \frac{15}{2}$ $\quad \frac{150}{12} = \frac{75}{6} =$ $\quad \frac{\frac{280}{2\sqrt{206}}}{2R} = \frac{15}{\sqrt{206}}$

$5^{\log_{12}(t)} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$ $\quad EB = \sqrt{\frac{1}{4}(625+225)} = \frac{1}{2}\sqrt{850}$

если $|t| \geq 1$, тогда слева справа монотонно

при этом при $t = 1$: $5^{\log_{12} t} + t = 1$ $\quad 400 + 144$

$x^2 + 18x \geq 1$ выполнено всегда $\quad \frac{450}{2\sqrt{206}} = \frac{308}{\sqrt{206}}$

$DE =$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12} 13}$ $\quad \frac{272}{\sqrt{206}} + \frac{\sqrt{206}}{2} = \frac{544+206}{2\sqrt{206}} =$

$x^2 + 18x = 5^{\log_5(x^2+18x)}$ $\quad x, y \in \mathbb{N}$, $\frac{750}{2\sqrt{206}}$

$5^{\log_{12}(t)} + 5^{\log_5 t} \geq 5^{\log_5 t \cdot \log_{12} 13}$

~~$5^{\log_{12} t} + 5^{\log_5 t}\left(1 - 5^{\log_{12} 13}\right)$~~ $\quad f(a) + f(b) = f(ab)$ $\quad 2R = \frac{\frac{750}{2\sqrt{206}}}{\frac{5}{\sqrt{206}}} =$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$ $\quad x = p$ $\quad f(x) = f(p_1^{\alpha}) + f(p_2^{\beta}) =$

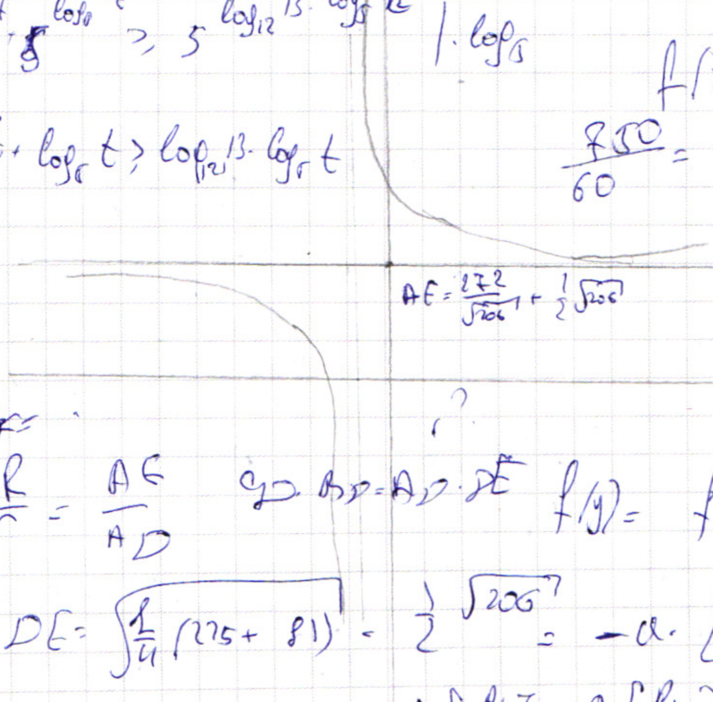
$f(p_1^{\alpha}) + f(p_2^{\beta}) = \alpha\left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha\left[\frac{p_2}{4}\right]$ $\quad \frac{2601}{340} = 15$

$5^{\log_{12} t} + 5^{\log_5 t} \geq 5^{\log_{12} 13 \cdot \log_5 t}$ $\quad | \cdot \log_5$ $\quad t = 5^{\log_5 t}$

$f(x) > 0$ $\quad 8 \cdot 17 = 17$

$\log_{12} t + \log_5 t > \log_{12} 13 \cdot \log_5 t$ $\quad \frac{750}{60} = \frac{75}{6} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \left[\frac{3}{8}\right]$

$\frac{15}{2}$; $\frac{y}{2}$



$AE = \frac{272}{\sqrt{206}} + \frac{1}{2}\sqrt{206}$ $\quad f\left(\frac{1}{mn}\right) = f(m^{-1} n^{-1}) =$

$AD = \frac{2CD \cdot BD}{\sqrt{206}}$ $\quad \frac{R}{R} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{\sqrt{206}}{2}}$ $\quad \frac{15}{\sqrt{206}}$

$\sin =$

$\frac{R}{r} = \frac{AE}{AD}$ $\quad CD \cdot BD = AD \cdot DE$ $\quad f(y) = f\left(\frac{1}{p_1}a\right) + f\left(\frac{1}{q_2}b\right) =$ $\quad \sin^2 + \cos^2 = 1 \mid : \sin$

$DE = \sqrt{\frac{1}{4}(225 + 81)} = \frac{1}{2}\sqrt{206}$ $\quad = -a \cdot \left[\frac{q_1}{4}\right] - b \cdot \left[\frac{q_2}{4}\right]$ $\quad tg^2 + c\varphi$

$\alpha\left[\frac{p_1}{4}\right] + \beta\left[\frac{p_1}{4}\right] - a\left[\frac{q_1}{4}\right] - b\left[\frac{q_2}{4}\right] < 0$

$P_3 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ $\quad \sin B = tg B = \frac{ET}{TB}$ $\quad DT = TC - CD =$

α $\quad 2^3 + 2^2 \geq 2^1$ $\quad \frac{AE}{AD} = \frac{272 + \frac{206}{2}}{\sqrt{206} \cdot 272}$ $\quad tg B = \frac{DT}{ET}$ $\quad \frac{25}{2} - 8 = \frac{9}{2}$

$\log_2 2^3 + \log_2 2^2 \geq \log_2 2^1$ $\quad ET = \frac{9}{2}$ $\quad AD = \frac{272}{\sqrt{206}}$ $\quad 272 \cdot 2 = 544$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$;

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$; $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$tg\,\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$\sin 2\alpha = a$
$\cos 2\alpha = b$
$\sin 2\beta = c$
$\cos 2\beta = d$
$\cos 4\beta = 2d^2 - 1$

$$\begin{cases} ad + bc = -\frac{1}{\sqrt5} \\ a(2d^2-1) + 2cda + a = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$x(y-2) - 2(y-1)$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) = -\frac{4}{5} + \frac{1}{\sqrt5}$

$(y-1)(x-2)$

x

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ xy - x - 2y + 2 \geq 0 \end{cases}$

$b^4 + 9b^2 - 25$

$x - 2y =$ a, b

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2 \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 \end{cases}$$

$(x-2y)^2 - (x-2)(y-1)$

$(a-2b)^2 = ab$

$9(y^2-2y+1)$

(x^2-4x+4)

$+13$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25 \end{cases}$$

$\sqrt{x-2} = a$ $\begin{cases} a^2 - 5ab + b^2 = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases}$

$\sqrt{y-1} = b$

$b^2 = y - 1$

$2b^2 = 2y - 2$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2 = ab \quad |^2 \\ a^4 + 9b^4 = 25 \end{cases}$$

$x - 2y = a^2 - b^2 + 2$

$$\begin{cases} a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = a^2b^2 - 4ab + 4 \quad |\cdot 9 \\ a^4 + 9b^4 = 25 \end{cases}$$

$a^2 = x - 2$ $\quad x - 2y = a^2 - 2b^2$

$b^2 = y - 1$

$8a^4 - 18a^2b - 9a^2b^2 + 36ab - 36 + 25 = 0$

$8a^4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\begin{cases} a^2-b^2+2=ab, \\ a^4+9b^4=28 \end{cases}$ $\cancel{a^2-2ab}$

$\cancel{(x-2y)^2 = (x-2-4y)}$ $f(b)=[\frac{b}{4}]$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \\ x^2+y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$f(1)=9f(1)$ $f(1)=0$

$f(2)=[\frac{2}{4}]=0$

$\cancel{a^2-2b}$ $a^2-ab-2b^2=0$ $f(3)=0$

$D=b^2+8b^2=9b^2$;

$\begin{cases} a^2-2b^2=ab, \\ a^4+9b^4=25 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} a=\frac{b+3b}{2}=2b \\ a=\frac{b-3b}{2}=-b \text{ - не уд. т.к. } b>0 \end{array}\right.$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=1$

в таком случае $a<0$

2) $\begin{cases} a=2b \\ 16b^4+9b^4=25 \end{cases}$

$a^2-ab-2b^2=0$

$D=b^2+8b^2=9b^2$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$; $\underbrace{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha}=-\frac{4}{5}$ $\frac{b+3b}{2}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

$b(-b+a)$

$\cos 2\beta=-\frac{2}{5}\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{2\sqrt5}{5}=\frac{2}{\sqrt5}$

$(a-b)(a+b)+$

$(a-b)(a+b+b)=$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$(a-b)(a-b+a)$

1) $\cancel{\cos 2\beta}$

$\sin 2\beta=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{\sqrt5}{5}$ $(a-b)(a+b)=b^2+ab$

$\frac{2\sqrt5}{5}\sin 2\alpha+\frac{\sqrt5}{5}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$ $1\cdot\frac{\sqrt5}{5}$

$4\sin\alpha\cos\alpha+1-2\sin^2\alpha=-1$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\operatorname{tg}\alpha=$ $2\sin\alpha(2\cos\alpha-1)=-2$

$2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$

$4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-\cancel{1}=-\cancel{1}$

$2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha$

$\cos\alpha(4\sin\alpha+2)=0$

$\cos 2\alpha=-(\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha)^2$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha=0 \text{ - не уд.} \\ \sin\alpha=-\frac{1}{2} \text{ - уд} \end{array}\right.$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$ $\cos\alpha=0$

$4\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha=0$

$4\sin\alpha-2\cos\alpha=0$

$4\operatorname{tg}\alpha+2=0$

$\sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha)=0$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha=-1$

$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$ $2+\operatorname{tg}\alpha=0$

$2\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1$; $2\sin 2\alpha-1+2\sin^2\alpha=-1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)