МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

~~Представим $\sin(2\alpha+4\beta)$ как $\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)$ и раскроем как синус суммы~~:

$\cancel{\sin(2\alpha+4\beta)=}$

Раскроем $\sin(2\alpha+4\beta)$ как синус суммы:

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

При этом $\frac{1+\cos 4\beta}{2}=\cos^2 2\beta \Rightarrow \cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$ и $\sin 4\beta = 2\sin 2\beta\cos 2\beta$

Тогда:

$2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta - \cancel{\sin 2\alpha} + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha + \cancel{\sin 2\alpha} = -\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha) = -\frac{8}{17}$

Заметим, что выражение в скобках это $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$.

Подставим:

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos 4\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{15}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 4\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 4\beta} = \pm\frac{8}{17}$

Подставим эти значения в исходные выражения:

$\begin{cases}\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\alpha \pm \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{15}{17}\sin 2\alpha \pm \frac{8}{17}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}\end{cases} \Rightarrow \cancel{4\sin} \Rightarrow \begin{cases}4\sin 2\alpha = -(1\pm\cos 2\alpha) \\ 32\sin 2\alpha \pm 8\cos 2\alpha = -8\end{cases}$

Рассмотрим 4 случая: 1) $\begin{cases}4\sin 2\alpha = -(1+\cos 2\alpha) \\ 32\sin 2\alpha + 8\cos 2\alpha = -8\end{cases} \Rightarrow -8(1+\cos 2\alpha) + 8\cos 2\alpha = -8$

$\Downarrow$

$\cos 2\alpha \in [-1;1]$

– Не подходит (~~ctg~~ $tg\,\alpha$ должен быть определён)

Аналогичная ситуация при

$\begin{cases}4\sin 2\alpha = -(1-\cos 2\alpha) \\ 32\sin 2\alpha - 8\cos 2\alpha = -8\end{cases} \Rightarrow \cos 2\alpha \in [-1;1]$ – не подходит.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Для остальных случаев:

2) $\begin{cases} 4\sin 2\alpha = -1(1+\cos 2\alpha) \\ 32\sin 2\alpha - 8\cos 2\alpha = -8 \end{cases}$

$\Downarrow$

$2\cos 2\alpha = -1 \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{2}; \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\begin{cases} 4\sin\alpha = -(1-\cos 2\alpha) \\ 32\sin 2\alpha + 8\cos 2\alpha = -8 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\cos 2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2};$

$\sin\alpha = \pm\frac{1}{2}$

Из этих решений следует, что $tg\alpha = \pm\sqrt{3}; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Ответ: $tg\alpha = \pm\sqrt{3}; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

№3.

Область определения: $x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$

Введём переменную $t = \log_4(x^2+6x) \Rightarrow x^2+6x = 4^t$

Тогда:

$3^t \geq \cancel{5}\cdot 4^t + (4^{\log_4 5})^t \Rightarrow 3^t + 4^t \geq 5^t \quad |:5^t$

$\left(\frac{3}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t \geq 1$ равенство при $t=2$

Функция $f(t) = \left(\frac{3}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t$ монотонно-убывающая, значит неравенство будет верным при $t \in (-\infty; 2]$ Тогда:

$\log_4(x^2+6x) \leq 2$

$0 \leq x^2+6x \leq 16 \Rightarrow x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$ и $x^2+6x-16 \leq 0$

$(x-2)(x+8) \leq 0$

$x \in [-8; 2]$

Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (0; -2]$.

№5.

Запишем следующее выражение:

$f(x) = f(\frac{x}{y}) + f(y) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

По условию: $f(x) < f(y) \Leftrightarrow f(y) > f(x) \Rightarrow \left[\frac{y}{4}\right] > \left[\frac{x}{4}\right]$

При $x=3$: $y \in [4; 27]$ – это 23 пары

При $x \in [4; 7]$: $y \in [8; 27]$ – это 4·19 пар.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

При $x \in [8; 11]$: $y \in [12; 27]$ — это $4 \cdot 15$ пар.
При $x \in [12; 15]$: $y \in [16; 27]$ — это $4 \cdot 11$ пар.
При $x \in [16; \cancel{20}\ 19]$: $y \in [20; 27]$ — это $4 \cdot 7$ пар
При $x \in [20; 23]$: $y \in [24; 27]$ — это $4 \cdot 3$ пары.
При $x \geq 24$ нет такого y, чтобы выполнялось условие задачи. Тогда количество пар:
$N = 23 + 4(19 + 15 + 11 + 7 + 3) = \boxed{243}$
Ответ: 243 пары.

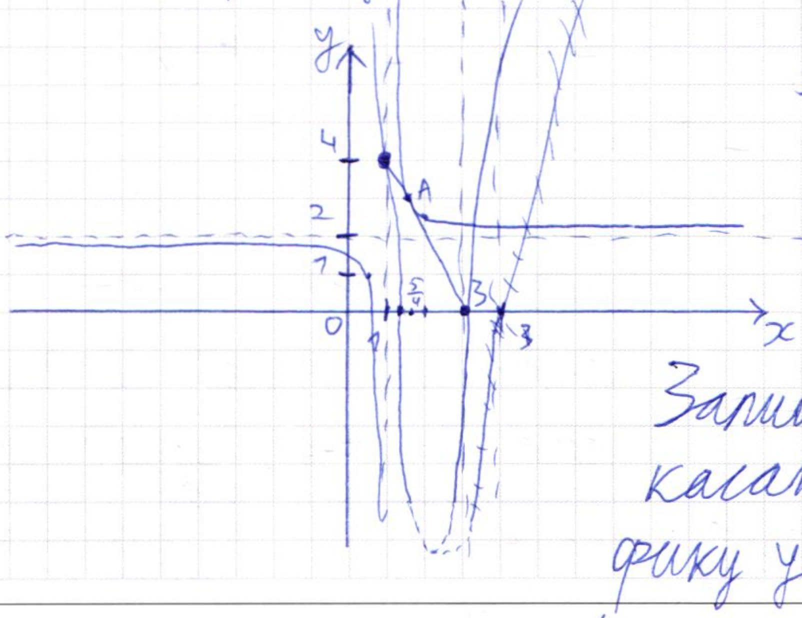
№6.

Рассмотрим задачу как систему неравенств:

$$\begin{cases} 8x^2 - 34x + 30 \leq ax + b \\ ax + b \leq 2 + \frac{1}{2x-2} = \frac{4x-3}{2x-2} \end{cases}$$

$y = 8x^2 - 34x + 30$
$x_{12} = \frac{5}{4}; 3$
$x_{min} = \frac{17}{8}$; $y_{min} = -4 2\frac{7}{4}$

Построим графики $y = 8x^2 - 34x + 30$ и $y = 2 + \frac{1}{2x-2}$



Подходят следующие значения a и b:
$a = -2$; $b = 4$

Запишем уравнение касательной к графику $y = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$y' = -\frac{7}{2(x-1)^2}$ Если $a=-2$, то $y=ax+b$ ~~есть~~ является касательной к $y=2+\frac{7}{2x-2}$ в точке $A(\frac{3}{2};3)$

$y = -\frac{1}{2(x_0-1)^2}(x-x_0)+2+\frac{1}{2x_0-2}$

x_0 – координата точки касания.

При этом прямая должна проходить через точки $(1;4)$ и $(3;0)$:

$4 = +\frac{1}{2(x_0-1)}+2+\frac{1}{2x_0-2} = 2+\frac{1}{x_0-1} \Rightarrow x_0=\frac{3}{2}$

$0 = \frac{x_0-3}{2(x_0-1)^2}+2+\frac{1}{2(x_0-1)} = \frac{x_0-3+x_0-1+4x_0^2-8x_0+4}{2(x_0-1)^2} \Rightarrow$ Это выполняется только в найденной точке

Если прямая будет лежать ниже касательной с таким же наклоном, то будет нарушаться условие $8x^2-34x+30 \leq ax+b$. Значит, пара a и b $(-2;6)$ единственная.

Ответ: $(-2;6)$

№2.

Введём переменные $u=3y-2x$ и $v=3y+2x$:

$x=\frac{v-u}{4}$; $y=\frac{u+v}{6}$

$$\begin{cases} u^2 = \frac{v^2-u^2}{24}-v+2 \quad (1) \\ \frac{3}{16}(v-u)^2+\frac{(v+u)^2}{72}-\frac{3}{2}(v-u)-\frac{2}{3}(u+v)=4 \quad (2) \end{cases}$$

$u^2 = \frac{1}{25}(v^2-24v+48)$

$\frac{3(9v^2-18uv+9u^2+4v^2+8uv+4u^2)}{168} - \frac{13}{6}v - \frac{5}{6}u = 24$

$39(v^2+u^2)-30uv-104v-40u=24.$

Отсюда можно заметить, что $u=2$ и $v=10$ есть решения уравнения. Тогда $x=y=2$

~~Ответ: $x=y=2$ $(2;2)$~~

Также решением является пара $x=y=-\frac{1}{3}$. Больше двух пар решений у этой системы быть не может.

но не подходит в уравнение (1)

Ответ: $(2;2)$; ~~$(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3})$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

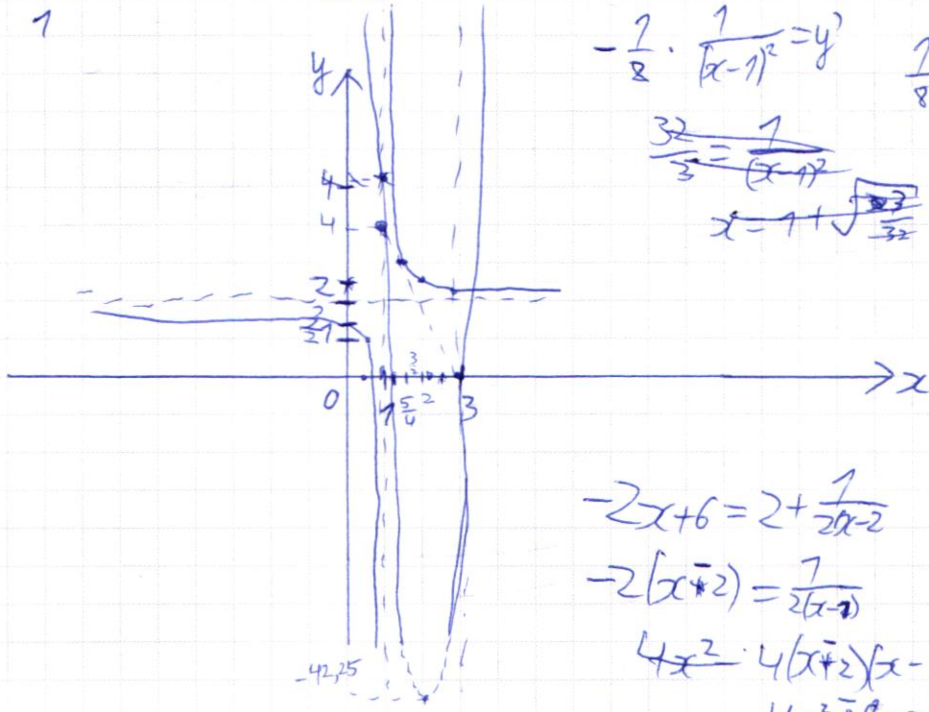
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\begin{cases} 8x^2-34x+30 \le ax+b \\ ax+b \le \frac{4x-3}{2x-2} \end{cases}$$

$4x-3 \,|\, 2x-2$, $4x-4 \,|\, 2$, 1

$2+\frac{1}{2x-2} \ge ax+b$



$-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}=y'$

$\cancel{\frac{32}{3}=\frac{1}{(x-1)^2}}$

$\cancel{x=1+\sqrt{\frac{3}{32}}}$

$289 \cdot 4$

$\cancel{1156-960=116}$

$1156-960=196$

$\frac{34\pm14}{16}=\frac{48}{16}=3;\ \frac{5}{4}$

$16x-34=0$

$x=\frac{17}{8}$

$\frac{1}{8}\cdot17^2-\frac{1}{4}\cdot17^2+30$

$30-\frac{289}{4}=-\frac{169}{4}=$

$=-42{,}25$

$y=ct$

$a=2$

$b=6$

$-2x+6=2+\frac{1}{2x-2}$

$-2(x-2)=\frac{1}{2(x-1)}$

$4x^2\ -4(x-2)(x-1)=-1$

$4x^2-8x-4x+8=-1$

$4x^2-12x+9=0$

$\cancel{144}$ $\quad \cancel{16+16\cdot9=160}$

$(2x-3)^2=0$ $\quad \cancel{x=\frac{-4\pm2\sqrt{10}}{8}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{10}}{4}}$

$x=\frac{3}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№2.

$t = 3y - 2x \qquad 3y = t + 2x$

$t = \sqrt{x(t+2x) - 2x - t - 2x + 2} \qquad t^2 = 2x^2 + \cancel{xt - t}\ t(x-1) - 4x + 2$

$(x+1)(x-1+t) = t^2$

$9x^2 - 18x + \frac{1}{3}(t^2+2x)^2 - \frac{4}{3}(t+2x) = 12$

$9x^2 - 18x + t^2 + 4xt + 4x^2 - 4t - 8x - 12 = 0 \qquad x^2 + 1 - 2x + (x-1)t = t^2$

$13x^2 + 4xt - 26x - 4t - 12 \overset{+t^2}{=} 0 \qquad x^2 - 2x + 1$

$13x(x-2) + 4t(x-1) - 12 \overset{+t^2}{=} 0 \qquad u = x + y \quad x = u - y$

$13x(x-2) + 4t(x-1) - 12 + (x-1)(x-1+t) = 0 \qquad v = xy \quad y = \frac{v}{u-y}$

$13x(x-2) + (x-1)(x-1+5t) - 12 = 0 \qquad x^2 + y^2 = u^2 - 2v$

$\frac{13x^2 - 26x - 12}{x-1} - (x-1) = 5t \qquad 3u^2 - 6v + 4u - 2x = 4$

$3v - 2u - y + 2 \quad \cancel{3v - 2u - y + 2}$

$(3y-2x)^2 - 6y^2 - x^2 + 12xy - 6x - 4y = 4$

$15xy - 8x - 7y - 6y^2 - x^2 = 2$

$8x(y-1) + 7y(x-1) = x^2 + 6y^2 + 2$

$-6y^2 - x^2 - 10x - 10y + 18xy = (3y-2x)^2$

$u = 3y - 2x \qquad u = \sqrt{\frac{v^2 - u^2}{24} - v + 2}$

$v = 3y + 2x \qquad \frac{3(v^2-u^2)^2}{16} + \frac{8(v+u)^2}{12}$

$y = \frac{u+v}{6}$

$x = \frac{v-u}{4}$

$\frac{2}{3} + 2 + \frac{4}{3} = 4$

$-1 + \frac{2}{3}$

$\cancel{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + 2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\begin{cases}\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha\pm\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \frac{15}{17}\sin 2\alpha\pm\frac{8}{17}\cos 2\alpha+\frac{17}{17}\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}\end{cases}$

$2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha)=-\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\cos 4\beta=\frac{15}{17}$

$\sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin 4\beta=\pm\frac{8}{17}$

$4\sin 2\alpha=-(1\pm\cos 2\alpha)$

$32\sin 2\alpha\pm 8\cos 2\alpha=-8$

~~Или~~ 1) $+8(1+\cos 2\alpha)\pm 8\cos 2\alpha=+8$ $\cos 2\alpha$ любое число

2) $-8(1+\cos 2\alpha)-8\cos 2\alpha=-8$

$\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$

3) $-8(1-\cos 2\alpha)+8\cos 2\alpha=-8$

$\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$

4) $\cos 2\alpha$ – любое число

$\cos\alpha=\pm\frac{1}{4};\ \pm\frac{3}{4}$

~~cos~~ $\sin\alpha=\pm\frac{1}{4};\ \pm\frac{3}{4}$ $\Rightarrow\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\pm 3;\ \pm\frac{1}{3};\ \cancel{\pm 1}}$

№2.

$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{x(3y-2)-(3y-2)}\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4\\ 9x^2+9y^2-18x-12y=12\end{cases}$

$\Rightarrow\sqrt{(3y-2)(x-1)}=(3y-2x)^2$

$3xy-2x-3y+2=9y^2-12xy+4x^2$

$9y^2-15xy+2x+3y-2=0$ $+4x^2$

$4x^2-15xy+2x+3y-2-9x^2+18x+12y=-12$

$-5x^2-15xy+20x+15y+12=0$

$-5x(x+3y)+5(4x+3y)+12=0$

$(x+y)^2-(x^2+y^2)=2xy$

$-xy+3(x^2+y^2)=4+6x+4y$

$(3y-2x)^2=\frac{3}{2}(x^2+y^2)-2-3x-2y-2x-3y+2$

$2(3y-2x)^2=3(x^2+y^2)-5x-5y$

$18y^2+8x^2-24xy=3x^2+3y^2-5x-5y$

$15y^2+5x^2-24xy+5x+5y=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(3y-2x)^2 = (3y-2)(x-1)$ $\qquad 324+240=564$

$\cancel{9x^2+}\ 9y^2+4x^2-12xy+5x^2+12xy-18x-12y=11$

$(3y-2)(x-1)+5x^2+12xy-18x-12y-12=0$

$(15y-2)(x-1)+5x^2-18x-12=0$

$3y^2-4y=6x+4-3x^2$

$9y^2+4x^2-12xy-3xy+2x+3y-2=0$

$3y(3y-5x+1)=$ $\qquad (3y-2)(x-1)$

$3(x+y)^2=6x+4y+4+6xy$ $\qquad (6x+4)(y+1)=2(3x+2)(y+1)$

$3(x-1)^2+3y^2-4y=7$

№3.

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$\log_4 3\cdot\log_3(x^2+6x) \Rightarrow 3^{\log_4(x^2+6x)}=(x^2+6x)^{\log_4 3}+6x\geq(x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$

$\cancel{5^{\log_{(x^2+6x)}4}}$

$x^2+6x\geq(x^2+6x)^{\log_4 3}\cdot\left((x^2+6x)^{\log_4\frac{5}{3}}-1\right)$

$3^t\geq-4^t+4^{t\cdot\log_4 5}\Rightarrow 3^t\geq-4^t+5^t$ $\qquad t=\log_4(x^2+6x)$

$3^t+4^t\geq5^t$ $\qquad x^2+6x=4^t$

Ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;4]$.

$\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t\geq1$ $\qquad t=2$

$t\in(-\infty;2]$

$\log_4(x^2+6x)\leq2$

$0\leq x^2+6x\leq16$

$x^2+6x-16\leq0$

$36+64=100$

$\frac{-6\pm10}{2}=2;-8$

$x\in[-8;4]$

№5.

$f\left(\frac{x}{y}\right)=\left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{41}{4y}\right]$

$\cancel{\left[\frac{x}{4y}\right]}$ $\qquad f(x)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)$

Ответ: $N=23+4\cdot19+4\cdot15+4\cdot11+4\cdot7+4\cdot3=23+4\cdot55=\boxed{243}$

$f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$

$x=3$:

$y\in[4;27]$ — 23 пары $\qquad f(y)>f(x)$

$x=4$: $\qquad x=5: y\in$ — 19 пар $\qquad \left[\frac{y}{4}\right]>\left[\frac{x}{4}\right]$

$y\in[8;27]$ — 19 пар $\quad x=6$: 19 пар $\quad x=7$: 19 пар $\quad x=8; y\in[12;27]$ — $15\cdot4$ пар

$x=12; y\in[16;27]$ — 11 пар $\cdot4$

$x=16; y\in[20;27]$ — $4\cdot7$ пар

$3\cdot4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)