МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение: $\underbrace{x^2-12x+36}_{(x-6)^2}+\underbrace{36y^2-36y+9}_{9(2y-1)^2}=45+36+9=$
$=90$

Сделаем замену: $x-6=a$, $2y-1=b$ $\Rightarrow$ $x-12y=a-6b$, $2xy-12y-x+6=ab$

Получим систему из переменных a и b: $\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$

Возведём первое уравнение в квадрат, не забывая, что $a-6b\geq 0$:

$$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \to a^2-13ab+36b^2=0 \to (a-9b)(a-4b)=0 \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

Решением первого уравнения являются $a=4b$ и $a=9b$.

Подставим эти решения в уравнение 2: $16b^2+9b^2=90 \to b=\pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$
$81b^2+9b^2=90 \to b=\pm 1$

$b=-3\sqrt{\frac{2}{5}}$, т.к. $-2b \overset{=4b-6b}{\geq} 0$

$b=1$, т.к. $3b \overset{=9b-6b}{\geq} 0$

$b=-3\sqrt{\frac{2}{5}} \to a=-12\sqrt{\frac{2}{5}} \to$ $x-6=-12\sqrt{\frac{2}{5}} \to x=6\left(1-2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

$2y-1=-3\sqrt{\frac{2}{5}} \to y=\frac{1-3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}$

$b=1 \to a=9 \to$

$x-6=9 \to x=15$

$2y-1=1 \to y=1$

Ответ: $x=15;\ y=1$

$x=6\left(1-2\sqrt{\frac{2}{5}}\right);\ y=\frac{1-3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}$

Задача 3

ОДЗ: $10x-x^2>0 \to x^2-10x<0 \to |x^2-10x|=10x-x^2$

$10x-x^2=a \to$ $a+a^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 a}=a^{\log_3 5}$

$1+a^{\log_3\frac{4}{3}}\geq a^{\log_3\frac{5}{3}}$

$1\geq \underbrace{a^{\log_3\frac{5}{3}}-a^{\log_3\frac{4}{3}}}_{f(a)} \to f'(a)=\log_3\frac{5}{3}\,a^{\log_3\frac{5}{3}}-\log_3\frac{4}{3}\,a^{\log_3\frac{4}{3}}$

$f'(a)>0$ при $a>0$, т.е.

$f(a)$ монотонно возрастает при $a>0$

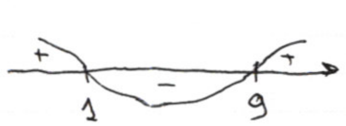
Найдём когда $f(a)=1 \to 1+a^{\log_3\frac{4}{3}}=a^{\log_3\frac{5}{3}}$

$1+\frac{4}{3}^{\wedge}\log_3 a=\frac{5}{3}^{\wedge}\log_3 a \to 3^{\log_3 a}+4^{\log_3 a}=5^{\log_3 a}$

$\log_3 a=2 \Rightarrow a=9$

$\Downarrow$

$10x-x^2\geq 9 \to x^2-10x+9\leq 0 \to (x-1)(x-9)\leq 0$



$\to x\in[1;9]$ Ответ: $x\in[1;9]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = \overbrace{2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta}^{-\frac{2}{\sqrt5}} =$$

$$= -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \to \begin{cases} \sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \\ \sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \underbrace{\cos 2\beta}_{\frac{1}{\sqrt5}} + \cos 2\alpha \underbrace{\sin 2\beta}_{\pm\frac{2}{\sqrt5}} = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\left[\begin{array}{ll} \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1 & (1) \\ \sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1 & (2) \end{array}\right.$$

(1): $2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \quad \Big| \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\cos\alpha \neq 0$

$$2\,tg\,\alpha + 2 - 2\,tg^2\alpha = -tg^2\alpha - 1$$

$$tg^2\alpha - 2\,tg\,\alpha - 3 = 0 \to (tg\,\alpha - 3)(tg\,\alpha + 1) = 0$$

$$tg\,\alpha = 3 \;;\; tg\,\alpha = -1$$

(2): $2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \quad \Big| \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\cos\alpha \neq 0$

$$2\,tg\,\alpha - 2 + 2\,tg^2\alpha = -tg^2\alpha - 1$$

$$3\,tg^2\alpha + 2\,tg\,\alpha - 1 = 0$$

$$3\left(tg^2\alpha + \frac{2}{3}tg\,\alpha - \frac{1}{3}\right) = 0 \to (tg\,\alpha + 1)\left(tg\,\alpha - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$tg\,\alpha = -1 \;;\; tg\,\alpha = \frac{1}{3}$$

Ответ: $tg\,\alpha = 3$; $tg\,\alpha = \frac{1}{3}$; $tg\,\alpha = -1$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 3

ОДЗ: $10x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 10x \leq 0 \Rightarrow |x^2 - 10x| = 10x - x^2$

$10x - x^2 = a \Rightarrow a + a^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 a}$

$\downarrow$

$a + a^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$

$a\left(1 + a^{\log_3 4 - 1}\right) \geq a^{\log_3 5}$

$1 + a^{\log_3 4 - 1} \geq a^{\log_3 5 - 1}$

$a > 0$
$a \neq 1$ $\rightarrow$ при $a = 1$

$1 + 1 > 1$

$\downarrow$

$a = 1$ – решение

$\log_a\left(1 + a^{\log_3 4 - 1}\right) - \log_a\left(a^{\log_3 5 - 1}\right) \geq 0$

$\log_a\left(\frac{1 + a^{\log_3 4 - 1}}{a^{\log_3 5 - 1}}\right) \geq 0$

$\downarrow$ метод рационализации

$$\begin{cases} (a-1)\left(\frac{1 + a^{\log_3 4 - 1}}{a^{\log_3 5 - 1}} - 1\right) \geq 0 \\ a > 0;\ a \neq 1 \longrightarrow \text{данные условия уже учтены} \end{cases}$$

$(a-1)\left(1 + a^{\log_3 \frac{4}{3}} - a^{\log_3 \frac{5}{3}}\right) \geq 0$

~~$\forall b$ из начального уравнения $\Rightarrow a-1 \geq 0$~~

~~$a \geq 1$~~

~~$10x - x^2 \geq 1 \rightarrow x^2 - 10x + 1 \leq 0$~~

$1 + a^{\log_3 \frac{4}{3}} - a^{\log_3 \frac{5}{3}} = 0 \rightarrow 1 + \frac{4}{3}^{\log_3 a} = \frac{5}{3}^{\log_3 a} \rightarrow 3^{\log_3 a} + 4^{\log_3 a} = 5^{\log_3 a}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Задача 5

$f(a \cdot 1) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(2) = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$ $\Rightarrow$ $f(2a) = f(a)$

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$ $\quad f(3a) = f(a)$

$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(1) = 0 = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

Получается, что $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, если $f(x) - f(y) < 0$, т.е.

если $f(x) < f(y)$

Пусть x – составное, причём $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, где $p_1, p_2 \ldots p_n$ – простые числа. Тогда $f(x) = \left[\frac{p_1}{4}\right] + \left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots \left[\frac{p_n}{4}\right]$

Составим таблицу для чисел и функций от этих чисел:

x:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$f(x)$:	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2

10 чисел

$f(x) = 0 \rightarrow$ есть 14 $f(y)$, для которых $f(y) > f(x)$

$f(x) = 1 \rightarrow$ 7 пар $f(y)$

7 чисел

$f(x) = 2 \rightarrow$ 4 пары $f(y)$

3 числа

$f(x) = 3 \rightarrow$ 3 пары $f(y)$

$\rightarrow$ 1 число

$f(x) = 4 \rightarrow$ 1 пара $f(y)$

$\rightarrow$ 2 числа

~~[illegible] = 210 пар~~

Ответ: $10 \cdot 14 + 7 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 140 + 49 + 12 + 3 + 8 = 212$ пар

☐ черновик ☑ чистовик Страница №9

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

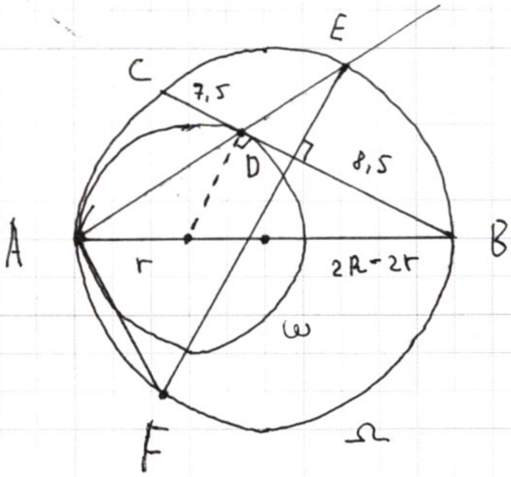
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4



R - ?

r - ?

$\angle AFE$ - ?

$S_{\triangle AFE}$ - ?

По теореме о касательной и секущей: $BD^2 = (2R-2r)(2R)$

$8,5^2 = 4(R^2 - Rr)$

Также $AD \cdot DE = 7,5 \cdot 8,5$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

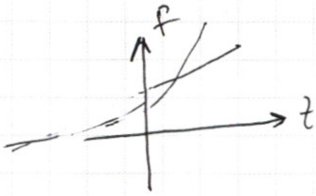
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x^y

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$ $\quad (-x)^y = -1^y x^y$



$a = \frac{13b \pm \sqrt{169b^2 - 144b^2}}{2} = \frac{13b \pm 5b}{2} = 9b ; 4b$

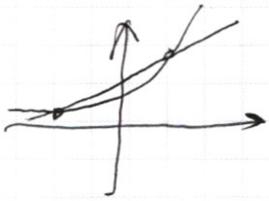
$a^x = x \ln a$

$(a-9b)(a-4b) = a^2 - 4ab - 13ab + 36b^2$ $\quad t \ln 3 + \ln 4$

$a > 1$

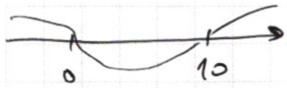
$90 \quad 25b^2 = 90$ $\quad \frac{90}{25} = \frac{18}{5} = 9 \cdot \frac{2}{5}$

$5b^2 = 18 = 9 \cdot 2$



$x(x-10) \geq 0$

$\cancel{9-6 = \sqrt{9 \cdot 6}}$



$-12\sqrt{\frac{2}{5}} + 18\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{12 \cdot 3} \cdot \frac{2}{5} = 6\sqrt{\frac{2}{5}}$

$x \in (-\infty; 0] \cup [10; +\infty)$

$15 - 12 = \sqrt{2 \cdot 15} - 12 - 15 + 6$

$6 \; 1-2$ $\quad 16 \cdot 9 \cdot \frac{2}{5} + 9 \cdot 9 \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot 9 (25) = 2 \cdot 9 \cdot 5 = 90$

$10x + |x(x-10)|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$ $\quad t \ln 12 \vee t \ln 5$

$\Downarrow$

$1 + a^{\log_3 4}$ $\quad (10x - x^2)^{\log_3 5}$

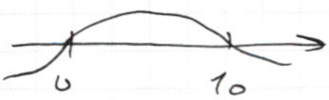
$\log_3 a = t$

10

$a^{\log_b c}$

$\cancel{x^{\log}}$ $\quad 1 + \frac{4}{3}^t - \frac{5}{3}^t = 0$

$x(10-x) > 0$



9

$1 + a^{\log_3 \frac{4}{3}} - a^{\log_3 \frac{5}{3}} = 0$ $\quad 3^t + 4^t = 5^t \quad t = 2$

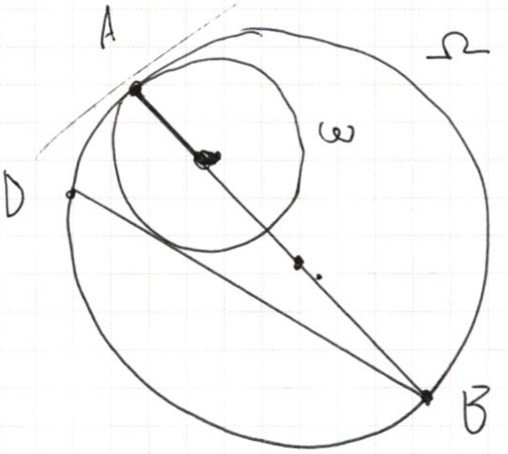
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

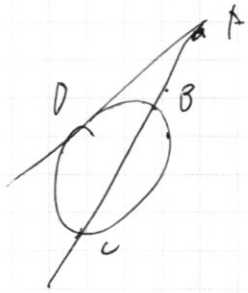
(Нумеровать только чистовики)

$-32x^2+36x-3=0$



$x = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2-12\cdot 32}}{-64}$

$AD^2 = AO\cdot AC$



$27-p=21$

3a

$12(9\cdot 12 - 32) = 12\cdot 4(9\cdot 3-8)$

$\frac{4(x-4)}{4x-5}$

$1+a^{\log \frac{4}{3}}$

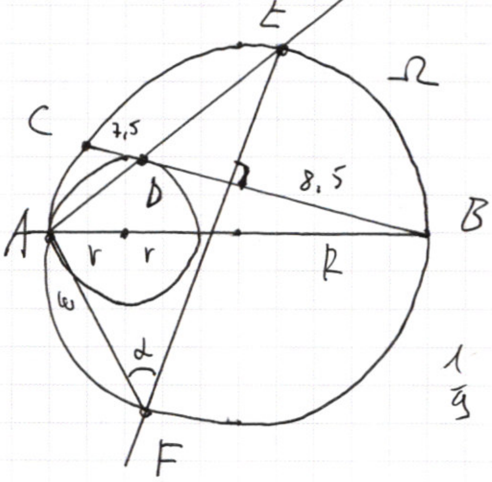
$AG = 4\cdot 24 = 4^2\cdot 6$

$AD\cdot DE = \frac{15\cdot 17}{4}$

$x^2-10x+1\le 0$

$BD^2 = (R+R-2r)\,2R$

$x=\frac{10\pm\sqrt{100-4}}{2}$

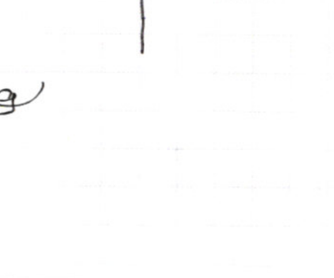


$\frac{1}{9} + \frac{1}{9}^{\log_3 4}$ $\quad \frac{1}{9}^{\log_3 5}$

$\frac{1}{9} + \frac{1}{10}$ $\quad \frac{1}{25}$

$\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}^{\log_3 4}$ $\quad \frac{1}{3}^{\log_3 5}$

$\frac{25}{9\cdot 16}$ $\quad \frac{1}{25}$



$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \geq \frac{1}{5}$

$\frac{7}{12}$ $\quad \frac{1}{5}$

$3^{\log_3 9} = 9$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}.$$ $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta +$

$\alpha+\beta = x$ $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\alpha-\beta = y$

$\cancel{\sin\frac{x+y}{2}}$ $\pi + \alpha$ $x-?$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $1+x^4 \geq x^6$

$\log_2 3$

$\log_x(1+x^4) \geq 6$

$\underbrace{2\sin(2\alpha+2\beta)}$ $\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{4x-4}{\cancel{x}-\frac{5}{4}}$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \frac{1}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow \cancel{2\sin\alpha\cos\alpha} + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = 1 \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} \end{cases}$$

$$\frac{4x-4}{x-\frac{5}{4}} - 4 = \frac{4x-4-4x+5}{x-\frac{5}{4}} = \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$$

$\cancel{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$

$y = 4 + \frac{4}{4x-5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)$

$x-6-6(2y-1)$

$(x-6)(2y-1) = 2xy - x - 12y + 6$

$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y = 45 \end{cases} \rightarrow x-12y = \sqrt{(x-12)y + x(y-1)+6}$

$x > 12y$

$\downarrow$

$\cancel{x(x-12) + 36y(y-1) = 45}$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$x^2 - 26xy + 12y + x + 144y^2 - 6 = 0$

$x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$

$36(y^2 - y + \frac{1}{4}) = 36(y-\frac{1}{2})^2$

$9(4y^2-4y+1) =$

$(2y-1)^2 = 4y^2-4y+1$

$= 9(2y-1)^2$

$x^2-12x+36+36(y^2-y+\frac{1}{4}) = 90$

$(6y-3)^2 = 36y^2-36y+9$

$(x-6)^2 + 36(y-\frac{1}{2})^2 = 90$

$a = x-6$

$b = \cancel{6y-3}\ 2y-1$

$x-6-6(2y-1) =$

$= x-6-12y+6$

$\underbrace{(x-6)^2}_{a^2} + \underbrace{(6y-3)^2}_{b^2} = 90$

$\begin{cases} \cancel{a-2b} \; a-6b = \sqrt{ab} \\ a^2+\cancel{9}b^2 = 90 \end{cases}$

$ab = (x-6)(2y-1) = \overset{2xy-12y}{\cancel{6xy-3x-36y+18}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Задача 3.

$5^{\log_3(10x-x^2)} = (10x-x^2)^{\log_3 5}$, $10x-x^2>0$

• $x^2-10x \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [10; +\infty)$

$10x + (x^2-10x)^{\log_3 4} \geq x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$(x^2-10x)^{\log_3 4} - (10x-x^2)^{\log_3 5} \geq x^2-10x$

$x^2-10x = a \rightarrow a^{\log_3 4} - (-a)^{\log_3 5} \geq a$

$1+a$ $a>б$

$1+б$

$a-б$

$8^{\log_2 4} = 8^2 = 64$

$4^{\log_2 8} = 4^3 = 64$

$a + a^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$

$a(1+a^{\log_3 4-1}) \geq a^{\log_3 5}$

$\log_2(2^5) = 5$

$2^{10}-2^4=$

$\log_2(2^{10}-2^4)$

$1+a^{\log_3 4-1} \geq a^{\log_3 5-1}$

$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

$x = a^{\log_3 5}$

$y = a^{\log_3 4}$

$\Rightarrow \frac{x}{y} = a^{\log_3 5 - \log_3 4}$

$80 + 16^{\log_3 4}$ $64+16^{\log_2 5}$

$\log_3 4 - 1 \geq \log_3 5 - 1$

$a^{\log_3 4}(1-a^{(\log_3 5-\log_3 4)})$

$\log_3 4 \geq \log_3 5$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a = \pm 12\sqrt{\frac{2}{5}} \to a - 6b = 12\sqrt{\frac{2}{5}} - 18\sqrt{\frac{2}{5}} < 0 \to$ не подходит

$\frac{1}{2}$ $\quad 3^{\frac{1}{2}} + 4^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{2}} > 0$ $\quad a - 6b = -12\sqrt{\frac{2}{5}} + 18\sqrt{\frac{2}{5}} > 0$

$f(a) = f(1) + f(a)$

$a = \pm 9 \to a - 6b = 9 - 6 = 3 > 0$

$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{4}$ $\quad a - 6b = -9 + 6 = -3 < 0 \to$ не подходит

$\sqrt{5}$

$3 + 4 + 2\sqrt{12}$ $\quad 5$ $\quad f(1) = 0$

Получили, что $\quad a = -12\sqrt{\frac{2}{5}}$; $b = -3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$7 + 2\sqrt{12}$ $\quad a = 9$; $b = 1$ $\quad$ ~~f(x+1)~~ $= f(x)$

$f(2) = 0$

$x - 6 = -12\sqrt{\frac{2}{5}}$; $2y - 1 = -3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

$x = 6\left(1 - 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ $\quad y = \frac{1 - 3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}$

$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{25}{9 \cdot 10}$ $\quad \frac{1}{25}$

$3^3 + 4^3$

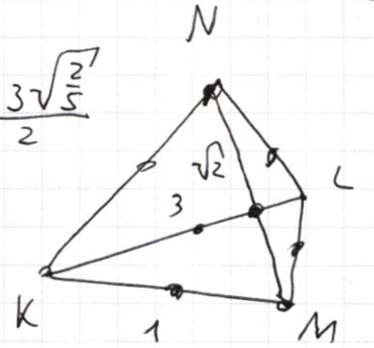
$x - 6 = 9 \to x = 15$ $\quad 2y - 1 = 1 \to y = 1$

$1 + \log_7 4a^{\log_3 4} \vee \log_7 5 \log_3 a^{\log_3 5}$

$27 + 64$ $\quad 5^3 = 125$

Ответ: $\quad x = 15$; $y = 1$

$x = 6\left(1 - 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$; $y = \frac{1 - 3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}$

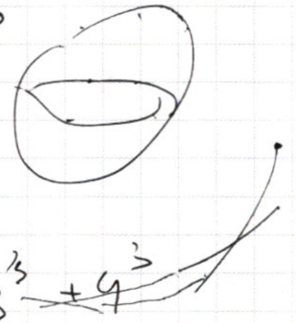


$3^t + 4^t = 5^t$

~~$t + t\log_3 4$~~ $= t\log_3 5$

$t < 0 \to 4$

$t \quad 3^t + 4^t = 5^t$

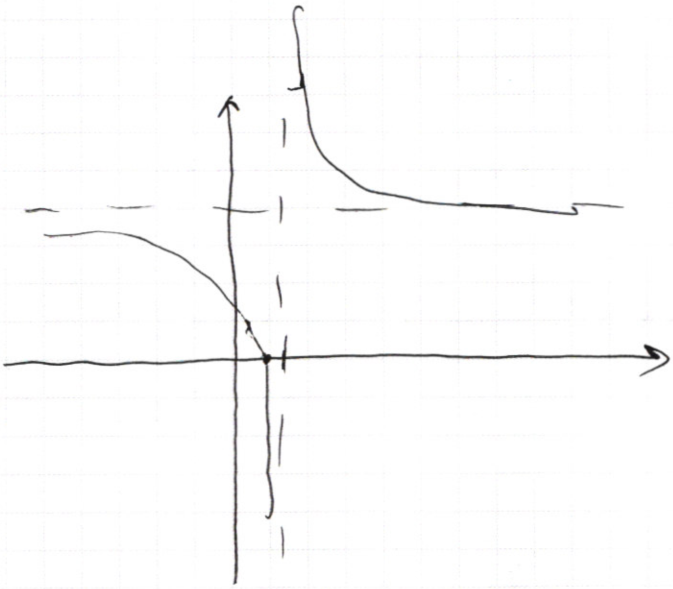


☑ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\frac{x-4}{x-\frac{5}{4}}$

$1 + \log$

$\frac{5}{4}-4 = \frac{5-16}{4} = -\frac{9}{4}$

$\frac{x-4}{x-\frac{5}{4}} = \frac{1}{x-\frac{5}{4}} +$

$\frac{x-4}{x-\frac{5}{4}} - 1 = \frac{x-4-x+\frac{5}{4}}{x-\frac{5}{4}} = -\frac{9}{4x-5}$

$\cancel{y = 1 - \frac{9}{4x-5} = \frac{4x-5-9}{4x-5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ → $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$-\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{5}}$

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$

$\cancel{\sin\alpha+\sin\beta}$?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3 $1+a^{\log_3 \frac{4}{3}} \log_3 4 \vee \log_3 5 \; a^{\log \frac{5}{3}}$

ОДЗ: $10x-x^2>0 \Rightarrow x^2-10x<0 \Rightarrow |x^2-10x| = 10x-x^2$

$5^{\log_3(10x-x^2)} = (10x-x^2)^{\log_3 5}$ $\quad 1+a^{\log \frac{4}{3}} \vee$

$10x + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 5}$ $\quad (0;10)$

$10x-x^2 \geq (10x-x^2)^{\log_3 5} - (10x-x^2)^{\log_3 4}$

$10x-x^2 = a \rightarrow a \geq a^{\log_3 5} - a^{\log_3 4}$

- $a=1 \rightarrow a^{\log_3 5} = 1$; $a^{\log_3 4} = 1 \rightarrow$ решение $a=1$ подходит

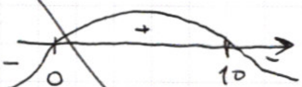
- $a \neq 1$ $\quad \log_a a \geq \log_a (a^{\log_3 5} - a^{\log_3 4})$

$1 \geq \log_3 5 - \log_3 4$ $\quad 1+8^{\log_3 \frac{4}{3}}$ $\quad 8^{\log_3 \frac{5}{3}}$

$\log_3 3 + \log_3 4 \geq \log_3 5$ $\quad 1+\frac{4}{3}^{1,9}$

$\log_3 12 \geq \log_3 5 \rightarrow$ истина $\Rightarrow a>0$

$10x-x^2>0 \rightarrow (10-x)x>0$



$1+3^{\log_3 \frac{4}{3}}$ $\quad 3^{\log_3 \frac{5}{3}}$

$x \in (0;10)$

Ответ: $x \in (0;10)$ $\quad 1+\frac{4}{3}$ $\quad \frac{5}{3}$

☑ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_3 a = t \to 3^t + 4^t = 5^t$

$(3^t+4^t)' = t(\ln 3 + \ln 4) = t \ln 12$

$(5^t)' = t \ln 5$

$\Downarrow$

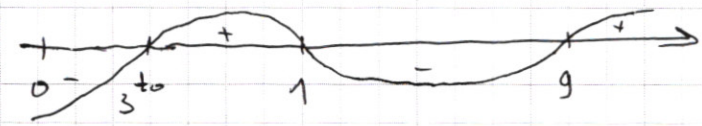
$3^t + 4^t \le 5^t$ при $t \ge 0$

$3^t + 4^t \ge 5^t$ при $t \le 0$ $\to$ есть два решения, одно из которых $t = 2$

$\downarrow$

$\log_3 a = 2 \to a = 9$

Также есть решение $a = 3^{t_0}$, где $3^{t_0} + 4^{t_0} = 5^{t_0}$, $t_0 < 0$



$\frac{1}{4} = 2^{-2}$

$\frac{1}{8} = 2^{-3}$

$\log_3 \frac{5}{3} a^{\log_3 \frac{5}{9}} \vee \log_3 \frac{4}{3} a^{\log_3 \frac{4}{9}}$

$1 \ge a^{\log \frac{5}{3}} - a^{\log \frac{4}{3}}$

$0 \quad \log_{\frac{5}{3}} a$

$1 + \frac{64}{27} \qquad \frac{125}{27}$

$11 + 49 = 60$