МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

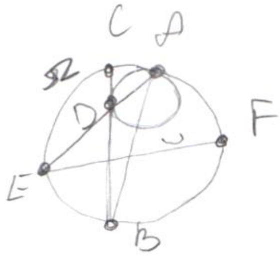
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$



4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=-\frac{2}{17}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos(2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\alpha)\cos(4\beta)+\sin(4\beta)\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)=-\frac{2}{17}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(2\beta)\cos(2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{17}}-\sin(2\alpha)\cos(2\beta)\\ \sin2\alpha(2\cos^2(2\beta)-1)+2\sin(2\beta)\cos(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\sin(2\alpha)=-\frac{2}{17}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \left[\cancel{-\sin(2\alpha)}+\cancel{2\cos^2(2\beta)\cdot\sin(2\alpha)}\right]-2\cos(2\beta)\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{17}}+\cancel{\sin(2\alpha)\cos(2\beta)}\right]+\cancel{\sin(2\alpha)}=-\frac{2}{17}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ -\frac{2}{\sqrt{17}}\cos(2\beta)=-\frac{2}{17}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos^2x+\sin^2x=1 \quad \left[\begin{aligned}\sin(2\beta)&=\frac{4}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\beta)&=-\frac{4}{\sqrt{17}}\end{aligned}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}}\end{cases}\\ &\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\beta)=-\frac{4}{\sqrt{17}}\end{cases}\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&\begin{cases}\sin(2\alpha)\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+\cos(2\alpha)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}}\end{cases}\\ &\begin{cases}\sin(2\alpha)\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}-\cos(2\alpha)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\beta)=-\frac{4}{\sqrt{17}}\end{cases}\end{aligned}\right.$$

Нас спрашивают о $\operatorname{tg}\alpha$ и ничего о β => можно ~~решать~~ продолжать решение без β (мы нашли все условия на α...) ~~и [illegible]~~

~~$\frac{1}{\sqrt{17}}(\sin(2\alpha)\pm4\cos(2\alpha))=-\frac{1}{\sqrt{17}}\Leftrightarrow\sin(2\alpha)\pm4\cos(2\alpha)=-1\Leftrightarrow$~~

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{aligned}2\alpha+2\beta&=2n\pi-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\\ 2\alpha+2\beta&=2n\pi+\pi+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\end{aligned}\right. \quad \Big| n\in\mathbb{Z}\\ \left[\begin{aligned}2\beta&=2m\pi+\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\\ 2\beta&=2m\pi-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\end{aligned}\right. \quad \Big| m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow$$

И α - такое и только такое...

$$\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{aligned}2\alpha&=2k\pi-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\\ 2\alpha&=2k\pi+\pi+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\end{aligned}\right.\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$\arcsin x+\arccos x=\pi/2$

$\Leftrightarrow$ ~~$2\alpha=2k\pi-\pi/2$~~ ~~$2\alpha=2k\pi+\pi+\pi/2$~~

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{aligned}2\alpha&=2k\pi-\pi/2\\ 2\alpha&=2k\pi+\pi+\pi/2\\ 2\alpha&=2k\pi-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+\left(\pi/2-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\\ 2\alpha&=2k\pi+\pi+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)-\left(\pi/2-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\end{aligned}\right.\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

одно и тоже.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{aligned}\alpha&=k\pi-\pi/4\\ 2\alpha&=2k\pi+\pi/2\pm2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\end{aligned}\right.\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}\alpha&=k\pi-\pi/4\\ \alpha&=k\pi+\pi/4\pm\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\end{aligned}\right. \Big| k\in\mathbb{Z}$$

Т.е. $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\pi/4) \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi/4 - \arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}})) \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi/4 + \arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}})). \end{array}\right.$

Всего 3 вар.

И по условию значений $\operatorname{tg}\alpha$ не меньше трёх. Значит это они.

$$\operatorname{tg}(-\pi/4) = -1$$

$$\operatorname{tg}(\pi/4 - \arcsin(\tfrac{1}{\sqrt{17}})) = \frac{\operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg}(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}})}{1 + \operatorname{tg}(\pi/4)\operatorname{tg}(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}})} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg}(\pi/4 + \arcsin(\tfrac{1}{\sqrt{17}})) = \frac{\operatorname{tg}(\pi/4) + \operatorname{tg}(\arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}}))}{1 - \operatorname{tg}(\pi/4)\operatorname{tg}(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}})} = \frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{3}$$

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{1}{4}$$

$\left(0 \leq \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \leq \pi/2 \Rightarrow \cos(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) \geq 0\right.$
$\left.\cos(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

Ответ: $-1;\ \frac{3}{5};\ \frac{5}{3}$

№2

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-6) - 2(3x-3) = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ (3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$6^2 + 3^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-6) - 6(x-1) = \sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{(y-6) - 6(x-1) = \sqrt{(y-6)(x-1)}} \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{(y-6)(x-1) \geq 0}\ (y-6) - 6(x-1) \geq 0 \\ (y-6)^2 + 36(x-1)^2 - 12(y-6)(x-1) = (y-6)(x-1) \\ 9(x-1)^2 = 90 - (y-6)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-6) - 6(x-1) \geq 0 \\ \cancel{(y-6)(x-1) \geq 0} \\ (y-6)^2 - 13(y-6)(x-1) + 36(x-1)^2 = 0 \\ (y-6)^2 + 9(x-1)^2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-6) - 6(x-1) \geq 0 \\ \cancel{(y-6)(x-1) \geq 0 \text{ выполняется}} \\ (y-6)^2 + 9(x-1)^2 = 90 \\ \left[\begin{array}{l} (y-6) = (x-1)\cdot 4 \\ (y-6) = (x-1)\cdot 9 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-6)^2 + 9(x-1)^2 = 90 \\ \left[\begin{array}{l} (y-6) = 4(x-1) \\ (y-6) = 9(x-1) \end{array}\right. \\ (y-6) - 6(x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-6) \geq 6(x-1) \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 25(x-1)^2 = 90 \\ (y-6) = 4(x-1) \end{cases} \\ \begin{cases} 90(x-1)^2 = 90 \\ (y-6) = 9(x-1) \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

из Т. Виета: $4+9=13$
$4\cdot 9 = 36$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 = \frac{3}{5}\sqrt{10} \\ (y-6) = 4(x-1) \end{cases} \\ \begin{cases} (x-1) = -\frac{3}{5}\sqrt{10} \\ (y-6) = 4(x-1) \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 = 1 \\ (y-6) = 9(x-1) \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 = -1 \\ y-6 = 9(x-1) \end{cases} \end{array}\right. \\ (y-6) \geq 6(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cancel{\begin{cases} x = 1 + \frac{3\sqrt{10}}{5} \\ y = 6 + \frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases}} \\ \begin{cases} x = 1 - \frac{3\sqrt{10}}{5} \\ y = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 15 \end{cases} \\ \cancel{\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}} \end{array}\right.$$

Не подходит: $x-1>0$ $y-6=4(x-1) < 6(x-1)$

подходит: $x-1<0$ $y-6=4(x-1) > 6(x-1)$

подходит: $x-1>0$ $y-6=9(x-1) > 6(x-1)$

не подходит: $x-1<0$, $y-6=9(x-1)<6(x-1)$

~~**Ответ:** $(x,y) \in \{(0;-3); (2;15); (1-\frac{3\sqrt{10}}{5}; 6-\frac{12\sqrt{10}}{5}); (1+\frac{3\sqrt{10}}{5}; 6+\frac{12\sqrt{10}}{5})\}$~~

Ответ: $(x,y) \in \{(2;15); (1-\frac{3\sqrt{10}}{5}; 6-\frac{12\sqrt{10}}{5})\}$

№3

$(x^2-26x)^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$\log_5(26x-x^2)$ определён $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 26x-x^2>0$

$\Leftrightarrow (26x-x^2)^{\log_5 12}+$

$+(26x-x^2) \geqslant 13^{\log_5 13\cdot\log_{13}(26x-x^2)}$ $\Leftrightarrow$ ~~$(26x-x^2)($~~

$\Leftrightarrow \begin{cases}(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)\geqslant(26x-x^2)^{\log_5 13}\\ 26x-x^2>0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$

~~$\Leftrightarrow \begin{cases}(26x-x^2)^{\log_5 12/5}+1\geqslant \log(26x-x^2)^{\log_5 13/5}\\ 26x-x^2>0\end{cases}$~~ $\Leftrightarrow$

~~$\Leftrightarrow \begin{cases}(26x-x^2)^{\log_5\frac{12}{5}}\left((26x-x^2)^{\log_5\frac{13}{5}-\log_5\frac{12}{5}}-1\right)\leqslant 1\\ 26x-x^2>0\end{cases}$~~ $\Leftrightarrow$

~~$\Leftrightarrow \begin{cases}(26x-x^2)^{\log_5\frac{12}{5}}\left((26x-x^2)^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right)\leqslant 1\\ 26x-x^2>0\end{cases}$~~

$\Leftrightarrow \begin{cases}t=26x-x^2\\ t>0\\ t^{\log_5 12}+t^1\geqslant t^{\log_5 13}\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}t=26x-x^2\\ t>0\\ t^1\geqslant t^{\log_5 12}\left(t^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right)\end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t=26x-x^2\\ t>0\\ 1\geqslant t^{\log_5\frac{12}{5}}\left(t^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right)\end{cases}$

$f(t)=t^{\log_5\frac{12}{5}}\left(t^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right)-1$ $\quad \frac{df}{dt}=t^{\log_5\frac{12}{5}}\cdot\ln t\cdot t^{\log_5\frac{13}{12}}+\ln t\cdot t^{\log_5\frac{12}{5}}\cdot$

$\cdot\left(t^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right)=\ln t\cdot t^{\log_5\frac{12}{5}}\cdot\left(2\cdot t^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right)$

1) $\underline{0<t\leqslant 1}$: $0<t^{\log_5\frac{12}{5}}\leqslant 1$ (т.к. $\log_5\frac{12}{5}>0$, зоде $\frac{12}{5}>1, 5>1$)

$0<t^{\log_5\frac{13}{12}}\leqslant 1$ (аналогично) $\Rightarrow \left(t^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right)\leqslant 0 \Rightarrow t^{\log_5\frac{12}{5}}\left(t^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right)\leqslant 0$

Т.е. $0<t\leqslant 1$ подходит.

2) $\underline{1<t}$:

$\ln t>0$, $t^{\log_5\frac{12}{5}}>0$, $t^{\log_5\frac{13}{12}}>1$ ← т.к. $t>1$, $\frac{13}{12}>1$, $5>1$ $\Rightarrow 2\cdot t^{\log_5\frac{13}{12}}-1>0$

Т.е. $\underline{\underline{f'(t)>0}} \Rightarrow f(t)$ возрастает

$f(25)=25^{\log_5\frac{12}{5}}\left(5^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right)-1=\left(\frac{12}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{13}{12}\right)^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2-1=\frac{13^2-12^2}{5^2}-1=\frac{25}{5^2}-1=0.$

Т.е. при $1 < t \leq 25$: $f(t) \leq 0$

($f(t)$ возрастает на этом промежутке и ~~на~~ $f(25)=0$).

Т.е. $t^{\log_5 \frac{12}{5}}\left(t^{\log_5 \frac{13}{12}}-1\right)-1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \geq t^{\log_5\left(\frac{12}{5}\right)} \cdot \left(t^{\log_5 \frac{13}{12}}-1\right)$

Т.е. все t ~~от~~ из $(1;25]$ тоже подходят.

Осталось понять, чему может быть равно t:

$$\begin{cases} t = 26x - x^2 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x(26-x) \\ t > 0 \end{cases}$$

Т.е. $\max t$: при $x = \frac{26}{2} = 13$. (т.к. график $y = x(26-x)$ — парабола ветвями вниз с вершиной $x = \frac{26}{2}$).

Т.е. $\forall t \mid \begin{cases} t=26x-x^2 \\ t>0 \end{cases}$: $0 < t \leq 13$.

Для $\forall$ ~~Все~~ t из $(0;1]$ и из $(1;25]$ выполняется

$1 \geq t^{\log_5 \frac{12}{5}}\left(t^{\log_5 \frac{13}{12}}-1\right)$.

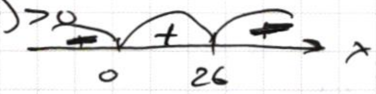
Т.е. наше неравенство (из условия)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 26x - x^2 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$26x - x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow$$

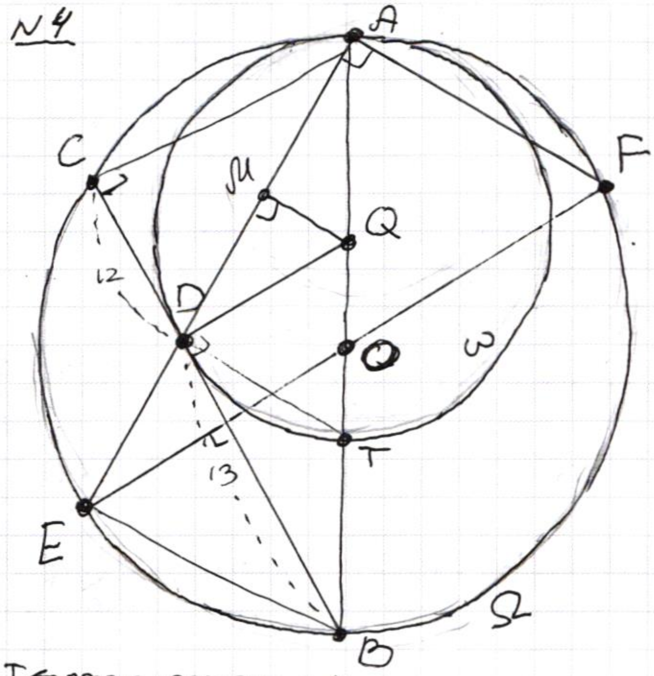
$$x(26-x) > 0$$



$$\Leftrightarrow \underline{0 < x < 26}$$

Ответ: $x \in (0;26)$

№4



$\angle$ A, F, E и B - на Ω

$\angle AFE = \angle ABE$

$\angle AEB = 90^\circ$ (AB - диаметр Ω)

Т.е. $\angle AFE = \angle ABE = 90^\circ - \angle BAE$

Q - центр ω. BD - касательная к ω ⇒

⇒ $QD \perp BD \Leftrightarrow QD \perp CB$.

И $EF \perp BC$. т.е. $\underline{EF \parallel DQ}$

(Q - на AB) AQ = DQ - радиусы ω

$\angle BAE = \angle QAD = \angle QDA$

$\angle QDA = \angle FEA$ ($EF \parallel DQ$).

Итого: $\angle AFE = 90^\circ - \angle BAE = 90^\circ - \angle QDA =$

$= 90^\circ - \angle FEA$.

T ∈ второе пересечение AB и ω.

$CD = 12$
$BD = 13$

Т.е. $\angle AFE + \angle FEA = 90^\circ \Rightarrow \underline{\angle EAF = 90^\circ}$.

Т.е. EF - диаметр Ω
И AB - диаметр Ω ⇒ $O = AB \cap EF$ - центр Ω.

Т.к. A - точка внутреннего кас. окр. ω и Ω и AB - диаметр Ω, то AT - диаметр ω ⇒ Q - на AB

R - радиус Ω, r - радиус ω.

Счёт:

$\underset{12}{CD} \cdot \underset{13}{BD} = AD \cdot ED$ - степень D отн. Ω. ; $\underset{13^2}{BD^2} = \underset{2R-2r}{BT} \cdot \underset{2R}{AB}$ ← степень B отн. ω.

$\underline{AD \cdot ED = 12 \cdot 13}$ $\qquad$ $\underline{13^2 = 4 \cdot R(R-r)}$ $\left(Rr = R^2 - \frac{13^2}{4}\right)$

$DQ \parallel EO$: $\frac{AD}{ED} = \frac{\overset{=r}{AQ}}{\underset{R-r}{OQ}}$ $\left[\frac{AD}{ED} = \frac{r}{R-r}\right]$

~~$AD = \sqrt{(AD \cdot ED) \cdot \frac{AD}{ED}} = \sqrt{(12 \cdot 13) \cdot \frac{r}{R-r}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 13}{13^2} \cdot \frac{r(4R(R-r))}{R-r}} =$~~

~~$= \sqrt{\frac{12}{13} \cdot 4Rr}$~~

~~$ED = \frac{AD \cdot ED}{AD} = \frac{12 \cdot 13}{\sqrt{12/13 \cdot 4Rr}} = \sqrt{\frac{12^2 \cdot 13^2}{12 \cdot 4Rr : 13}} = \sqrt{\frac{12}{4} \cdot \frac{13^3}{Rr}} = \sqrt{3 \cdot \frac{13^2}{Rr}}$~~

~~Т.е. $AD = \sqrt{\frac{12}{13}(4R^2 - 13^2)}$, $ED = \sqrt{3 \cdot \frac{4 \cdot 13^2}{4R^2 - 13^2}}$~~

~~AD AT и AB - диаметры ω и Ω, D и E на ω и Ω, D и E на AE.~~

~~т.е. $DT \perp AE$ и $EB \perp AE \Rightarrow \underline{DT \parallel EB}$: $\frac{AD}{ED} = \frac{AT}{BT} = \frac{2r}{2R-2r}$~~

AB - диаметр Ω ⇒ $AC \perp BC$. И $QD \perp BC \Rightarrow \underline{QD \parallel AC}$: $\left[\frac{CD}{BD} = \frac{AQ}{BQ}\right]$

Т.е. $\frac{12}{13} = \frac{r}{2R-r} \Leftrightarrow 24R - 12r = 13r \Leftrightarrow \underline{24R = 25r}$

$t^{\log_5 12} + t - t^{\log_5 13}$ $\frac{df}{dt} = \ln t \cdot \left(t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13}\right) + 1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

$\left(\frac{12}{5}\right)^2\left(\left(\frac{13}{12}\right)^2-1\right) = \left(\frac{13}{5}\right)^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \underline{25}$

ШИФР

(заполняется секретарём)

$(x^2-26x)^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)} \Leftrightarrow (26x-x^2)^{\log_5 12} + (26x-x^2)^1 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$13^{\log_5(26x-x^2)} = \log_5 13 \cdot \log_{13}(26x-x^2) = (26x-x^2)^{\log_5 13}$

$26x-x^2 > 0$

$4\cdot\frac{5\cdot 13}{2}\left(\frac{5\cdot13\cdot5-2\cdot13\cdot12}{2\cdot5}\right)$

$t^{\log_5 12} + t - t^{\log_5 13}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(26-x)x$

$x=13$

13^2

$$\begin{cases}(y-6)^2+9(x-1)^2=90\\(y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)}\end{cases}$$

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

~~$\sin(2\alpha)\sin(2\beta)$~~

$\sin(2\alpha)\cos(4\beta)+\sin(4\beta)\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha)\cos(4\beta)+2\sin(2\beta)\cos(2\alpha)\cos(2\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{17}$

$t' \geq t^{\log_5 12}\cdot\left(t^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right)$

$\sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}} - \sin(2\alpha)\cos(2\beta)$

$t' \geq$

$\sin(2\alpha)\cos(4\beta) + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}-\sin(2\alpha)\cos(2\beta)\right)\cos(2\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha)(2\cos^2(2\beta)-1) - \frac{2}{\sqrt{17}}\cos(2\beta) + \sin 2\alpha - 2\cos^2(2\beta)\cdot\sin(2\alpha) = -\frac{2}{17}$

$\frac{2}{\sqrt{17}}\cos(2\beta) = \frac{2}{17} \Rightarrow \cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha)+\sqrt{17}\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha) = -1$

1) $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ 2) $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha) \pm 4\cos(2\alpha) = -1$

$13^2-4\cdot36 =$

$= 169-120-\cancel{26} =$

$= 49-\cancel{26} = 25$

~~$-19-6=$~~

~~$=213$~~

$y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}$

$9x^2+y^2-18x-12y=45 = (3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$9x^2-18x$

$y-6-2(3x-3) =$

$= y-6x$

$(3x)^2-2\cdot3x\cdot3+\underset{=9}{3^2}$

$\frac{13\pm\sqrt{13}}{2}$

y^2-12y

$y^2-2y\cdot6+\underset{=36}{6^2}$

$36+9=45$

$$\begin{cases}a-6b=\sqrt{ab}\\9b^2+a^2=90\end{cases}$$

$\frac{13^2-13}{4},$

$= \frac{13\cdot12}{4} = 13\cdot3$

$\frac{3\pm5}{2} = \frac{9}{4}$

$13 \geq$ $13^{\log_5 3}$ $13^2\cdot\log_5\left(\frac{13^2}{60}\right)$ $\log$

~~$2^{4\log_5 13}$ $\log_5\frac{13}{12} \geq 13$~~ $\log_5\frac{13}{12}$

$2\sqrt{(26x-x^2)^{(\log_5 12)+1}} \geq (26x-x^2)^{\log_5 13}$

$1+\log_5 12 \geq \log_5 13$ $\log_5 60$

$4\cdot(26x-x^2) \geq (26x-x^2)^{\log_5\frac{13^2}{60}}$

$4 \geq (26x-x^2)^{\log_5\frac{13^2}{60}}$

max: 13^2

$(26x-x^2)^{\log_5 12} + (26x-x^2) \geq (26x-x^2)^{\log_5 13}$

$(26x-x^2) > 0$

$\geq 2\sqrt{(26x-x^2)^{(\log_5 12)+1}}$

$t^{\log_5\frac{12}{5}}\cdot\ln t\cdot t^{\log_5\frac{13}{12}} + \ln t\, t^{\log_5\frac{12}{5}}\cdot\left(t^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right) = \ln t\, t^{\log_5\frac{12}{5}}\left(2t^{\log_5\frac{13}{12}}-1\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

Итого: $AD \cdot ED = 12 \cdot 13$ (1) $\quad 13^2 = 4R(R-r)$ (3)

$AD/ED = r/(R-r)$ (2) $\quad 24R = 25r$ (4)

из (3) и (4): $13^2 = 4 \cdot r \cdot \frac{25}{24}\left(r \cdot \frac{25}{24} - r\right) \Leftrightarrow 13^2 = 4 \cdot r^2 \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{1}{24} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 13 = 2 \cdot r \cdot \frac{5}{24} \Leftrightarrow \left[r = \frac{13 \cdot 12}{5}\right]$

$\left(R - r = \frac{13}{10}\right)$ Т.е. $R = \frac{25r}{24} = \frac{25 \cdot 13 \cdot 12}{24 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 13}{2}$: $\left[R = \frac{5 \cdot 13}{2}\right]$

из (1) и (2): $AD^2 = (AD \cdot ED) \cdot (AD : ED) = 12 \cdot 13 \cdot \frac{r}{R-r} =$

$= 12 \cdot 13 \cdot \frac{\frac{13 \cdot 12}{5}}{\frac{5 \cdot 13}{2} - \frac{13 \cdot 12}{5}} = 12 \cdot 13 \cdot \frac{2 \cdot \cancel{13} \cdot 12}{\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \cancel{13}}_{25} - \underbrace{2 \cdot \cancel{13} \cdot 12}_{24}} = 12 \cdot 13 \cdot 24$

$ED^2 = (AD \cdot ED) : (AD : ED) = 12 \cdot 13 \cdot \frac{R-r}{r} = \frac{12 \cdot 13}{24} = \frac{13}{2}$

$\left[AD = 12\sqrt{26}\right] \quad \left[ED = \frac{\sqrt{26}}{2}\right]$

$\angle AFE = 90° - \angle ADQ$. Пусть M – середина AD. Т.к. Q – центр ω, AD – хорда ω (не диаметр, т.к. $AD \neq 2 \cdot r$): $QM \perp AD$. Т.е. $\triangle DMQ$ – пр-уг.

$\angle AFE = 90° - \angle ADQ = 90° - \angle MDQ = \underline{\angle MQD}$ – острый (как угол пр-уг тр-ка)

~~sin∠~~ $\sin \angle MQD = \frac{DM}{DQ} = \frac{AD:2}{DQ} = \frac{AD:2}{r} = \frac{12\sqrt{26} : 2}{13 \cdot 12 : 5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{26}}{13}$

Т.е. $\left[\angle AFE = \arcsin \frac{5\sqrt{26}}{26}\right]$ (т.к. $\angle AFE$ – острый...)

$\triangle AEF$ – пр-уг ($\angle EAF = 90°$). Т. Пифагора: $AF = \sqrt{EF^2 - AE^2}$

$(AF^2 + AE^2 = EF^2)$

$AF = \sqrt{(2R)^2 - (AD+ED)^2} = \sqrt{(5 \cdot 13)^2 - \left(\frac{25\sqrt{26}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 13^2 - 26 \cdot 5^4} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{25 \cdot 26(26 - 25)} = \frac{5\sqrt{26}}{2} \qquad AE = AD + ED = \frac{25\sqrt{26}}{2}$

$S(AEF) = \frac{1}{2} AE \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{25\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{26}}{2} = \frac{1}{8} \cdot 125 \cdot 26 = \frac{125 \cdot 13}{4} =$

$= \frac{1625}{4}$

$$\begin{array}{r} \times\, 125 \\ 13 \\ \hline 375 \\ 125 \\ \hline 1625 \end{array}$$

Ответ: $\angle AFE = \arcsin \frac{5\sqrt{26}}{26}$; $S(AEF) = \frac{1625}{4}$ $\left(= \frac{5^3 \cdot 13}{4}\right)$

№5

$x, ~~y~~ \in \mathbb{N}$. $(\forall \alpha_i \in \mathbb{N})$

$x = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ ← разложение x на простые множители.

$f(x) = f(p_n^{\alpha_n}) + f(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{\alpha_{n-1}}) = \ldots = f(p_1^{\alpha_1}) + \ldots + f(p_n^{\alpha_n})$.

$f(p_i^{\alpha_i}) = f(p_i^{\alpha_i - 1}) + f(p_i) = \ldots = \alpha_i \cdot f(p_i)$.

Итого: $f(x) = f(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}) = \alpha_1 \cdot f(p_1) + \ldots + \alpha_n \cdot f(p_n)$

$x, y \in \mathbb{N}$: $f(x/y) + f(y) = f(x) \Rightarrow f(x/y) = f(x) - f(y)$.

$f(x/y) < 0 \Leftrightarrow \underline{f(x) < f(y)}$

$\underline{4 \leq x \leq 28 \ , \ x \in \mathbb{N}}$

Посмотрим, какие простые числа могут встретиться в разложении x на пр. множители.: ~~Все они меньше [illegible]~~

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 (они должны быть ~~меньше~~ не больше, чем 28 ...)

p_i	2	3	5	7	11	13	19	23	17
max степень вхождения p_i в $\mathbb{N}$ число от 4 до 28	4	3	2	1	1	1	1	1	1
$f(p_i)$	0	0	1	1	2	3	4	5	4

$x \in \mathbb{N}$ $x \in [4; 28]$	Разложение x на пр. мн.	$f(x)$
4	2^2	0
5	5^1	1
6	$2^1 \cdot 3^1$	0
7	7^1	1
8	2^3	0
9	3^2	0
10	$2^1 \cdot 5^1$	1
11	11^1	2
12	$2^2 \cdot 3^1$	0
13	13^1	3
14	$2^1 \cdot 7^1$	1
15	$3^1 \cdot 5^1$	1
16	2^4	0
17	17^1	4
18	$2^1 \cdot 3^2$	0
19	19^1	4
20	$2^2 \cdot 5^1$	1
21	$3^1 \cdot 7^1$	1
22	$2^1 \cdot 11^1$	2
23	23^1	5
24	$2^3 \cdot 3^1$	0
25	5^2	2
26	$2^1 \cdot 13^1$	3
27	3^3	0
28	$2^2 \cdot 7^1$	1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

Значение $f(x)$	0	1	2	3	4	5
кол-во $x \in \mathbb{N}$ из $[4;28]$ с таким $f(x)$	9	8	3	2	2	1
кол-во $y \in \mathbb{N} \mid f(y) > f(x)$	16	8	5	3	1	0

← сумма ячеек в строке выше, столбце ~~левее~~ правее..

Т.е. всего пар $(x,y) \mid f(x) < f(y)$ $(x,y \in \mathbb{N},\ x,y \in [4;28])$.

$9\cdot16 + 8\cdot8 + 3\cdot5 + 2\cdot3 + 2\cdot1 + 1\cdot0 =$ ~~$(90+54)+64+15+6+2+1=$~~

↑ столько x с $f(x)=0$ ↑ столько y с $f(y) > f(x)$

~~$= 90+54+70+16+2=$~~

~~$= 90+70+70+2 = 90+140+2=$~~

~~Т.к. пар~~

$= 144+64+15+6+2 = 208+21+2 =$ ~~$=232$~~

$= 210+21 = 231$

~~Ответ: 232 пары.~~

Ответ: 231

№6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28 \Leftrightarrow \frac{4}{3x-2} \geqslant ax+(b+2) \geqslant 18x^2-51x+30$$

↑ прибавим 2 ~~ко~~ всем частям.

$$\frac{8-6x}{3x-2} = 2\cdot\left(\frac{4-3x}{3x-2}\right) = 2\left(\frac{2}{3x-2} - 1\right)$$

$$18x^2-51x+30 = 3\left(6x^2-17x+10\right) = 3\cdot6\left(x-2\right)\left(x-\frac{5}{6}\right)$$

Т. Виета: $2+\frac{5}{6} = \frac{17}{6}$ ✓

$2\cdot\frac{5}{6} = \frac{10}{6}$ ✓

1) $a=0$: $\frac{4}{3x-2} \geqslant b+2 \geqslant 18x^2-51x+30 \quad \forall x \in \left(\frac{2}{3};2\right]$.

~~max~~ * $\min\left(\frac{4}{3x-2}\right)$ на этом промежутке: в $x=2$: 1 $\Rightarrow$ $\underline{1 \geqslant b+2}$

(т.к. ф-я убывает...)

~~max $(18x^2-51x+30)$ на этом промежутке: в $x=2$ или $x=\frac{2}{3}$~~

При $x \to \frac{2}{3}+$: $18x^2-51x+30 \to 18\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-51\left(\frac{2}{3}\right)+30 = 18\cdot\left(\frac{2}{3}-2\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right) =$
$= (2-6)(4-5) = 4$. При $x=2$: $18x^2-51x+30=0$.

Т.е., если $b+2 \geqslant 18x^2-15x+30 \quad \forall x \in (\frac{2}{3};2]$:

$\underline{b+2 \geqslant 4}$ (т.к. на отрезке $[\frac{2}{3};2]$ max $18x^2-15x+30$: в $x=\frac{2}{3}$: 4 (из св-в параболы).

Т.е. $1 \geqslant b+2 \geqslant 4$. Противоречие

Т.е. $\underline{\underline{a \neq 0}}$

$$\frac{4}{3x-2} \overset{(1)}{\geqslant} ax+(b+2) \overset{(2)}{\geqslant} 18x^2-15x+30 \quad \forall x \in (\tfrac{2}{3};2]$$

$\Updownarrow$ $3x-2>0$ т.к. $x \in (\frac{2}{3};2]$

$$4 \geqslant [ax+(b+2)]\cdot(3x-2)$$ ← Решение (1):

$\Updownarrow$

$$[ax+(b+2)](3x-2)-4 \leqslant 0$$

$\forall x \in (\frac{2}{3};2]$ $\Updownarrow$ В силу непрерывности ф-и $[ax+(b+2)](3x-2)-4$ на $[\frac{2}{3};2]$.

$$[ax+(b+2)](3x-2)-4 \leqslant 0 \quad \forall x \in [\tfrac{2}{3};2]$$

$\Updownarrow$

$$x^2(3a)+x(-2a+3b+6)-(2b+8) \leqslant 0 \quad \forall x \in [\tfrac{2}{3};2] \iff \begin{cases} (\frac{2}{3})^2 3a+\frac{2}{3}(-2a+3b+6)-(2b+8) \leqslant 0 \\ (2)^2 3a+2\cdot(-2a+3b+6)-(2b+8) \leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} a>0 \\ a<0 \text{ и} \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Updownarrow$ Из св-в графика многочлена 2й степени.

~~$a \geqslant 0$~~

~~$(\frac{2}{3})^2(3a)+(\frac{2}{3})(-2a+3b+6)-(2b+8) \leqslant 0$~~

~~$2^2(3a)+2\cdot(-2a+3b+6)-(2b+8) \leqslant 0$~~

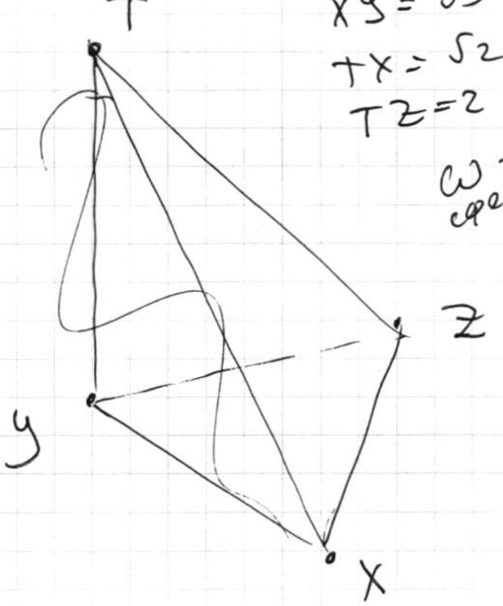
~~$\frac{-2a+3b+6}{2\cdot 3a} \in [\frac{2}{3};2]$~~

~~$a \leqslant 0$~~

~~$(\frac{2}{3})^2$~~

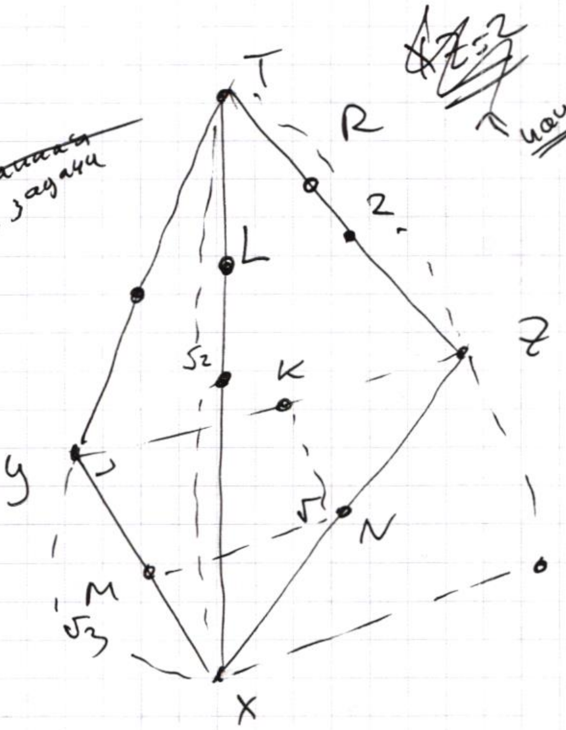
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7



$XY = \sqrt{3}$
$TX = \sqrt{2}$
$TZ = 2$

ω - ~~описанная~~ сфера из задачи



~~XZ=2~~ ← нашли

M, N и K – mid XY, XZ и YZ.

MN ∥ YK, MY ∥ KN. Y, M, K и N лежат на одной сфере и в одной плоскости ⇒ лежат на одной окр. И YKNM – параллелограмм. Т.е. YKNM – прямоугольник (вписанный параллелограм).

~~MN – ср. линия △YXZ~~; MN ∥ YZ и MN = YK

Т.е. $\angle KYM = \angle ZYX = 90^0$: Т. Пифагора. $XZ^2 = YZ^2 + XY^2$
$\underset{\text{не знаем.}}{\uparrow}$ $\uparrow$ знаем

Степень X отн ω:

$XM \cdot XY = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{TX}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}$. Т.е. ω пересекает

mid(TX) лежит на ω

TX в ~~точку, удалённую на~~ в точке L | $XL = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow TL = \frac{\sqrt{2}}{2}$

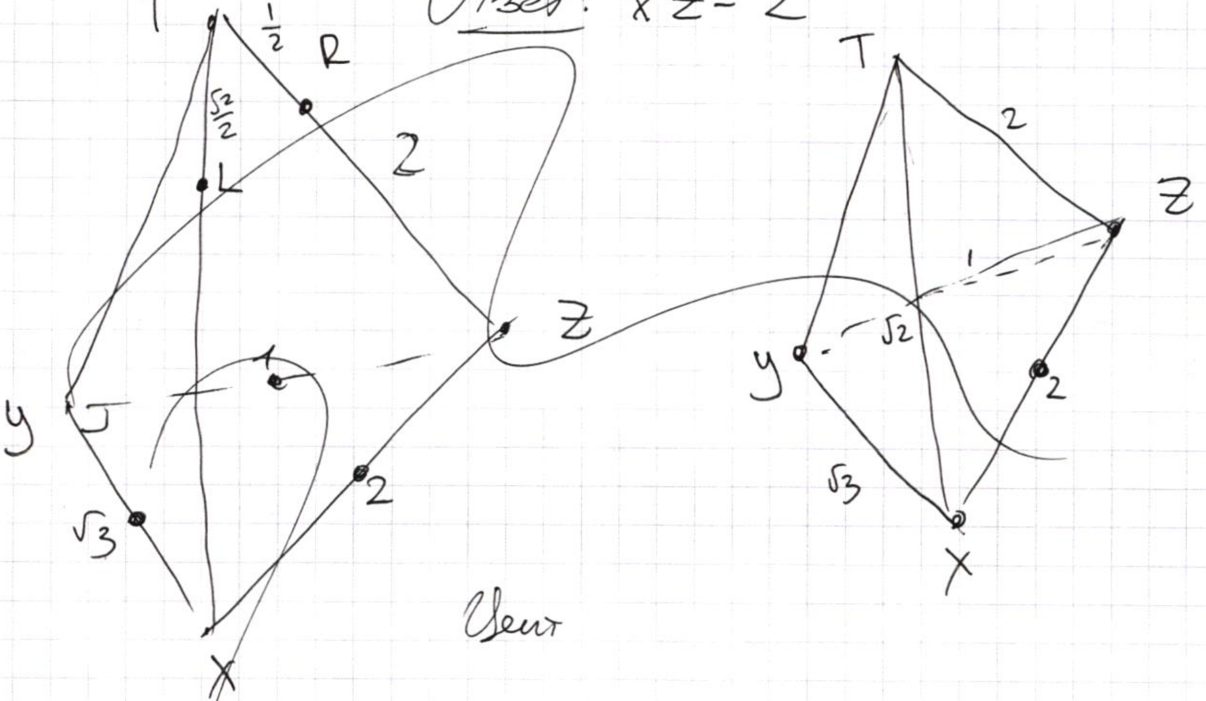
Аналогично ω пересекает TZ в R | $ZR \cdot \left(\frac{TZ}{2}\right) = ZY \cdot ZK =$ $1 =$ ↑ mid(TZ) лежит на ω

$= \frac{ZY^2}{2}$. Т.е. $ZR = \frac{ZY^2}{2}$.

Степень T отн. ω: ~~$TL \cdot \frac{TX}{2} = TR \cdot \frac{TZ}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{ZY^2}{2} \cdot \frac{TZ}{2} \Leftrightarrow$~~ $TL = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{TX}{2} = \sqrt{2}/2$, $TZ = 2$

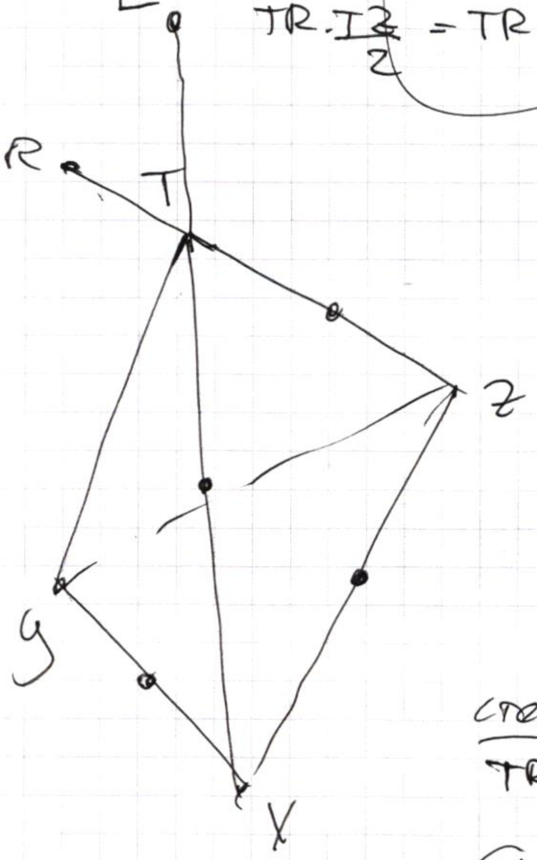
~~$\Leftrightarrow 2 = TZ \cdot ZY^2$~~ $TZ = 2$ ~~$\Leftrightarrow (ZY)^2 = 1 \Leftrightarrow$~~ $\Rightarrow TR = \frac{1}{2}$ $\underline{\underline{ZY = 1}}$. ~~Т.е. $XZ = \sqrt{ZY^2 + XY^2} = \sqrt{1^2 + 3} = 2$~~

Ответ: $XZ = 2$



$$\frac{Zy^2}{2} = ZR \qquad TR = 2 - \frac{Zy^2}{2}$$

$$TR \cdot \frac{TZ}{2} = TR \cdot \frac{2}{2} = \left(\frac{4 - Zy^2}{2}\right) = \underset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{TL} \cdot \underset{=\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{TX}{2}} =$$



$$XL \cdot \overset{=\sqrt{2}}{\frac{XT}{2}} = \underset{\sqrt{3}}{yX} \cdot \overset{=\sqrt{3}}{\frac{Xy}{2}}$$

$XL = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow T$-между L и X.

$ZR \cdot \frac{ZT}{2} = Zy \cdot \frac{Zy}{2}$ $\quad T$-внутри ω $\Downarrow$ T-между R и Z

$ZR = \frac{Zy^2}{2}$

степень T:

$TR \cdot \frac{TZ}{2} = TL \cdot \frac{TX}{2}$

$(ZR - TZ) \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

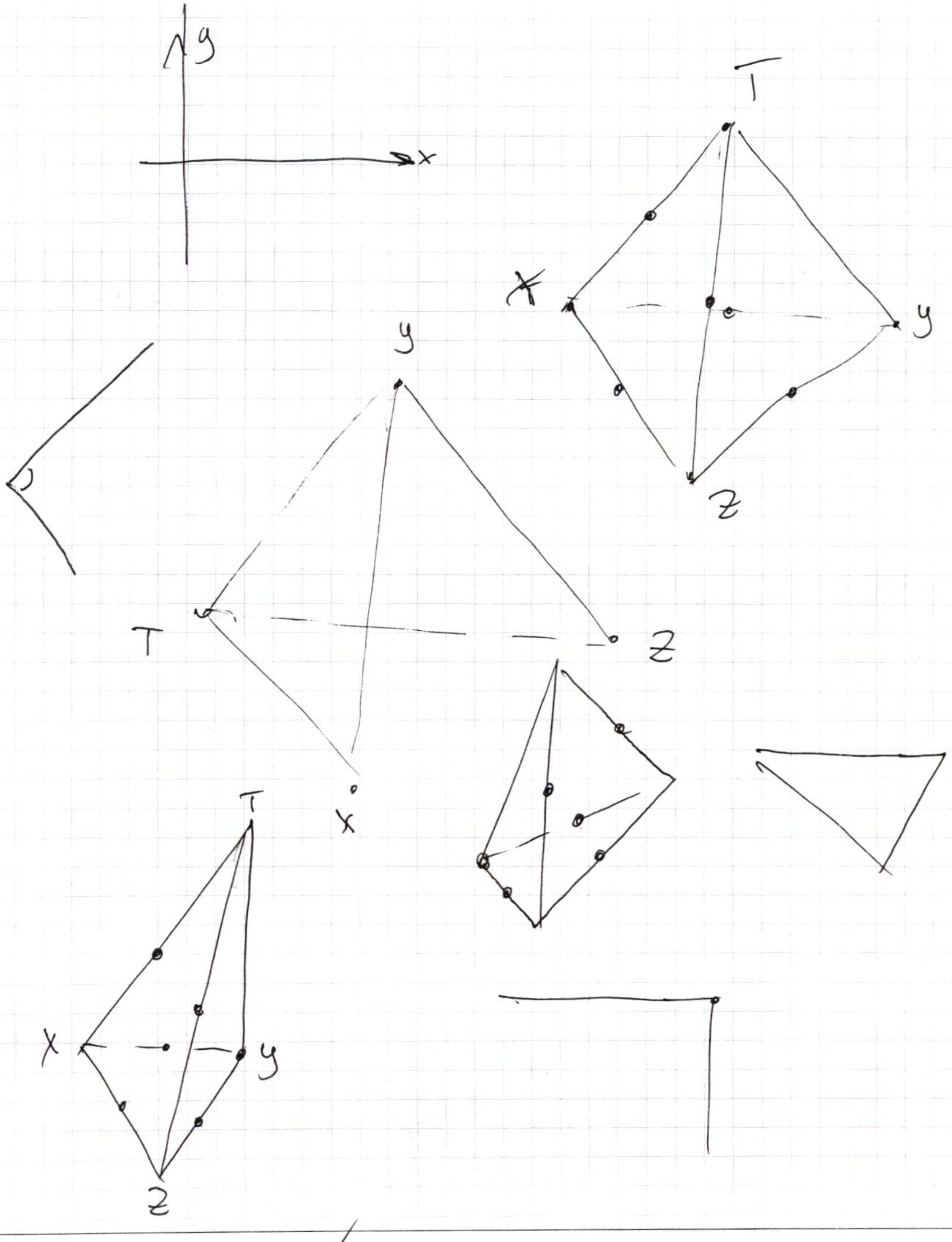
Страница № 11
(Нумеровать только чистовики)

$\frac{2}{3x-2} = ax+(b+2)$

$2a+(b+2)$

$\underline{2 = '}$

$3a \cdot x^2 + x(-2a+3b+6) - (2b+8) = 0 \leftarrow 1$ решение.



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4}{3x-2} = 18(x-2)$

$\frac{4}{3(x-\frac{2}{3})}$ $\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x-\frac{2}{3}}$

$\frac{4}{3x-2} = 18x^2 - 51x + 30$

2 $\frac{4}{4} = 1$

$18\cdot4 - 51\cdot2 + 30 =$

$= 40 + 32 - 100 - 2 + 30 =$

$= 40 + 30 + 30 - 100 = 0$

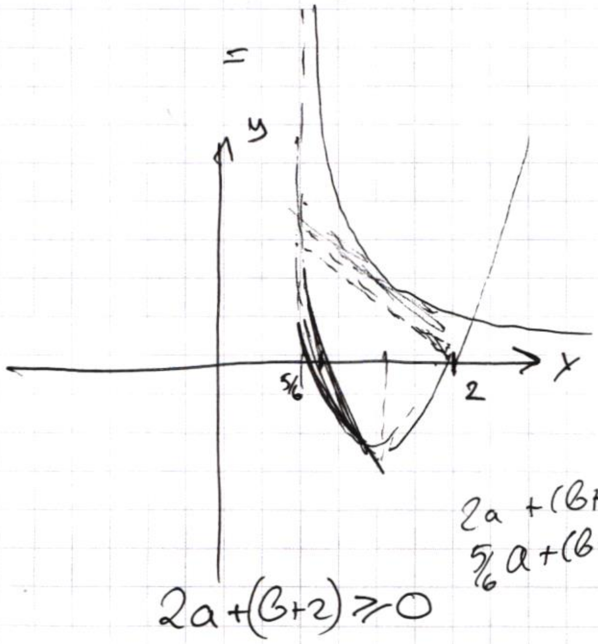
$4 \geq (3x-2)(18x^2-51x+30) =$

$=$

$b+2 \geq -2a$

$b+2 \geq -4\cdot\frac{5}{6}a$

$= -\frac{10}{3}a$



$\frac{4}{3x-2} \geq ax + (b+2)$

$4 \geq [ax + (b+2)](3x-2) =$

$= 3ax^2 + x(3b+6-2a) -$

$-2(b+2)$

$3ax^2 + x(3b+6-2a) -$

$-(2b+8) = 0$

$(3b+6-2a)^2 + 12a(2b+8) =$

$= 9b^2 + 4a^2 - 2\cdot12a -$

$-12ab + 2\cdot6\cdot3b +$

$+ 12\cdot2ab + 8\cdot12a =$

$= 9b^2 + 4a^2 + 6^2 + 12ab +$

$+ 12a\cdot6 + 6b\cdot6$

$2a + (b+2) \geq 0$

$\frac{5}{6}a + (b+2) \geq 4$

$2a + (b+2) \geq 0$

$a < 0 \Rightarrow$ ~~$b \geq 2$~~

$\begin{cases} 2a + (b+2) \leq 4 \\ 2a + (b+2) \geq 0 \end{cases}$

$2a + b \geq -2$

$2a + (b+6) \geq 4$

$2a$

$2a + (b+2) \geq 0$

$\frac{5}{6}a + (b+2) \geq 4$ $(3b+6-2a)^2 + 2a\cdot3b\cdot4 + 2a\cdot6\cdot4 +$

$+ 12a\cdot4 = (3b+6+2a)^2 + 12a\cdot4$

$\frac{5}{6}a + b \geq 2$