МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$(x;y)$ - ?

$1\le x\le 24$

$1\le y\le 24$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

1) Заметим, что мы рассм. функцию $f(t)$ при $\frac{1}{24}\le t\le 24$,

~~$k: \left\{\frac{1}{24}; \frac{1}{23} \dots \right.$~~,

вместо t может стоят любое число из:

$\frac{1}{24}; \frac{1}{23} \dots\dots \frac{1}{1}$

$\frac{2}{24}; \frac{2}{23} \dots\dots \frac{2}{1}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$\frac{23}{24} \quad \frac{23}{23} \dots\dots \frac{23}{1}$

$\frac{24}{24} \quad \frac{24}{23} \dots\dots \frac{24}{1}$

2) Рассм. все простые числа от 1 до 24:

p:	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$	0	0	1	1	2	3	4	4	5

3) для 1: $f(1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

для (N) чисел от 1 до 24 по формуле $f(ab)=f(a)+f(b)$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5

24
0

4) Рассм. все числа вида $\frac{1}{k}; \frac{2}{k}; \frac{3}{k} \dots \frac{24}{k}$

$k\in[1;24]$

• $\underset{0}{f(1)}=f\left(\frac{1}{k}\right)+f(k)$

$f\left(\frac{1}{k}\right)<0$ при $f(k)>0 \Rightarrow$ подойдут такие k: 5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23

13 пар $(1;k)$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

• $f(2) = f\left(\frac{2}{k}\right) + f(k)$

$\overset{\shortparallel}{0}$

$f(k) > 0$, ~~но $k \not\vdots 2$, иначе $\frac{2}{k}$ совпадет с числом из предыдущего набора~~

Аналогично подойдут 13 пар чисел из прошлого пункта $(2; k)$

~~подойдут такие k: 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 15, 21~~

~~9 пар (2, k)~~

• 3

$f(3) = f\left(\frac{3}{k}\right) + f(k) > 0$

$\overset{\shortparallel}{0}$

Аналогично 13 пар вида $(3; k)$

• Аналогично для $f(t)$, где $t: \{4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24\}$ будет 13 пар вида $(t; k)$

$\Downarrow$

всего будет $13 \cdot 11 = 143$ пары для t, при которых $f(t) = 0$

5) для t, при которых $f(t) = 1$ ($t: \{5, 7, 10, 14, 15, 20, 21\}$)

$f(t) = f\left(\frac{t}{k}\right) + f(k)$

$\overset{\shortparallel}{1}$

чтобы $f\left(\frac{t}{k}\right) < 0$; $f(k) > 1 \Rightarrow$ подойдут такие $k: \{11, 13, 17, 19, 22, 23\}$

$\Downarrow$

всего будет $6 \cdot 7 = 42$ пары для t, при которых $f(t) = 1$

6) для t, при которых $f(t) = 2$ ($t: \{11, 22\}$

$f(t) = f\left(\frac{t}{k}\right) + f(k)$

$\overset{\shortparallel}{2}$

$f\left(\frac{t}{k}\right) < 0$ при $f(k) > 2 \Rightarrow k: \{13, 17, 19, 23\}$

$\Downarrow$

всего будет $2 \cdot 4 = 8$ пар для t, при которых $f(t) = 2$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) Рассмотрим оставшиеся $t = 13$ $f(t) = 3 = f(\frac{t}{k}) + f(k)$ $k:\{17,19,23\}$

$t = 17$ $f(t) = 4$, $k: \{23\}$

$t = 19$ $f(t) = 4$, $k: \{23\}$

$t = 23$ $f(t) = 5$, $k - \varnothing$

из этих t получится еще 5 пар

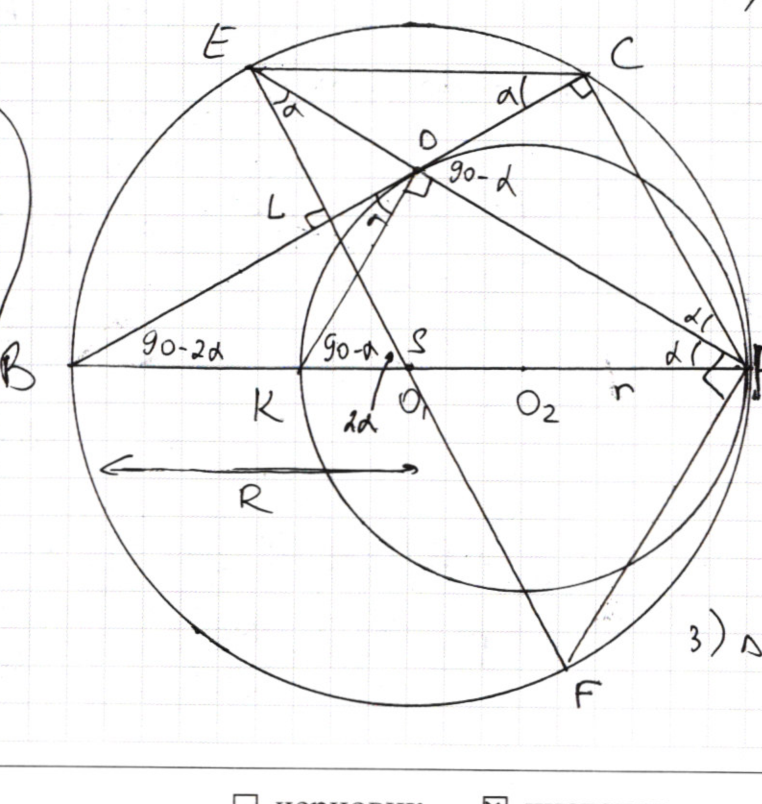
8) ~~Я рассмотрел все t пары $(z;1)$,~~ ~~после пары $(t;k)$~~

9) Тогда общее кол-во пар: $[1,24]$ $[1,24]$

$$\overbrace{143 + \overbrace{42 + \overbrace{8+5}^{13}}^{55}} = 198 \leftarrow \text{Ответ}$$

N4

BD=17
CD=8
R, r, ∠AFE-?
S_{AFE}-?



0) проведем AE. ω ∩ Ω = AK, проведем DK

1) по св-ву треуг., впис. в окруж. и касат., проведенной к его вершине:

$\angle CDA = \angle DKA = \beta$

$\angle DAK = \angle BDK = \alpha$

2) $\angle KDA$ и $\angle BCA$ - опир на диам.

$\angle KDA = \angle BCA = 90^0 \Rightarrow \beta = 90 - \alpha$

3) $\triangle CDA$: $\angle CDA = \beta = 90 - \alpha$

$\angle DCA = 90$

$\angle CAD = \alpha$

~~4) $\triangle DEL$~~ 4) $\triangle DEL$: $\angle EDL = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$; $\angle ELD = 90^\circ$

$L = EF \cap BC$

$\Downarrow$ $\angle LED = \alpha$

~~$\angle AED = \alpha$~~

5) по св-ву внеш. угла: $\angle DKA = \angle KDB + \cancel{\angle BKD} + \angle KBD$

$90 - \alpha = \alpha + \angle KBD$, $\angle KBD = 90 - 2\alpha$

~~6) $\angle KBD = \angle AEC$ (опир. на $\cup AC$)~~ ~~$= 90 - 2\alpha$~~

$\Downarrow$

~~$\angle O_1B =$~~

$\angle ESB = 2\alpha$

$(EF \cap AB = S)$

~~6) $\angle EDC = 180 - \angle EDL = 90 + \alpha$~~

~~$\Downarrow$ $\angle ECD = 180 - (90 + \alpha) - (90 - 2\alpha) = \alpha$~~

~~7)~~

6) $\cup EB = 2 \cdot \angle EAB = 2\alpha = \angle EO_1B$

7) $\angle EO_1B = \angle ESB \Rightarrow S \to$ это $O_1 \Rightarrow EF \cap AB = O_1$

8) $\angle EAF = 90^\circ$, т.к. опир на EF-диаметр

9) по св-ву секущ. и касат.: $BK \cdot AB = BD^2 = 17^2$

$2(R - r) \cdot 2R = 17^2$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = R^2 - Rr \quad (1)$

10) ~~$\sin 2$~~ $\sin \angle CAB = \sin 2\alpha = \frac{BC}{AB} = 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha$

$\cos \angle DAK = \cos\alpha = \frac{AD}{AK}$

$\sin \angle CAD = \sin\alpha = \frac{DC}{AD}$

$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = 2 \cdot \frac{\cancel{AD} \cdot DC}{AK \cdot \cancel{AD}}$

$\frac{25}{2R} = 2 \cdot \frac{8}{8r}$

$16R = 25r$

$r = \frac{16R}{25}$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = R^2\left(1 - \frac{16}{25}\right) = \frac{9R^2}{25} \Leftarrow (1)$

$R = \frac{5 \cdot 17}{6} = \frac{85}{6} \Rightarrow r = \frac{17 \cdot \cancel{16}^{8}}{\cancel{6}_{3} \cdot 5} = \frac{128}{15}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

11) $\angle AFE = 90 - \angle AEF = 90 - \alpha$

12) $AC = \sqrt{4R^2 - BC^2} = \sqrt{4\frac{17^2 5^2}{3^2} - 25^2} = \sqrt{\frac{25}{9}(17^2 - 15^2)} =$

$= \sqrt{\frac{25}{9} \cdot 2 \cdot 32} = \frac{5 \cdot 8}{3} =$

$= \frac{40}{3}$

$tg(90-\alpha) = \frac{AC}{DC} = \frac{40}{3 \cdot 8} =$

$= \frac{5}{3}$

$\angle AEF = arctg\left(\frac{5}{3}\right)$

13) $S_{AFE} = \frac{1}{2} AE \cdot AF$

$EF = 2R \Rightarrow AF = 2R\sin\alpha$, $AE = 2R\cos\alpha$ $\Rightarrow S = \frac{4R^2 \sin\alpha\cos\alpha}{2} =$

$= R^2 \sin 2\alpha =$

$= R^2 \sin\angle CAB = R^2 \cdot \frac{BC}{2R} =$

$= \frac{25R}{2} =$

$= \frac{25 \cdot 17 \cdot 5}{12} = \frac{2125}{12} =$

$= 177\frac{1}{12}$

Ответ. $R = \frac{85}{6}$

$r = \frac{128}{15}$

$\angle AEF = arctg\left(\frac{5}{3}\right)$

$S = \frac{2125}{12}$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 85 \\ \hline 125 \\ 200 \\ \hline 2125 \end{array}$$

N 1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

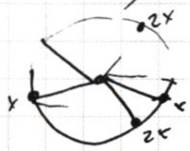
$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5}$

1) пусть $2\alpha+2\beta = x$, тогда

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2x-2\alpha)+\sin2\alpha = -\frac45 \end{cases}$$

$\sin2x\cos2\alpha - \cos2x\sin2\alpha + \sin2\alpha = -\frac45$

2)



$\sin x = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos x = \frac{2}{\sqrt5}$ при $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ 2\pi k\right]$ $\to$ $\sin2x = -\frac45$ ($2x\in(-\pi+4\pi k;\ 4\pi k)$) $\to$ $\cos2x = \frac35$ (1); $\cos2x = -\frac35$ (2)

$\cos x = \frac{-2}{\sqrt5}$ при $x\in\left(-\pi+2\pi k;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ $\to$ $\sin2x = \frac45$ ($2x\in(-2\pi+4\pi k;\ -\pi+4\pi k)$) $\to$ $\cos2x = \frac35$ (3); $\cos2x = -\frac35$ (4)

3) Рассм. все 4 случая: ~~(1): x:~~

(1)

$-\frac45\cos2\alpha - \frac35\sin2\alpha + \sin2\alpha = -\frac45$

$-4\cos2\alpha + 2\sin2\alpha = -4 \quad |:2$

$-\cancel{2\cos^2\alpha} + 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = -\cancel{2\cos^2\alpha} - 2\sin^2\alpha$

$2\sin\alpha(\cos\alpha + 2\sin\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ 2\sin\alpha = -\cos\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \ \text{~~не сущ.~~} \\ tg\alpha = -\frac12 \end{array}\right.$

(2)

$-4\cos2\alpha + 8\sin2\alpha = -4 \quad |:4$

$-\cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha = -\cancel{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha$

$2\sin\alpha(\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ \cancel{\cos\alpha = 0} \\ \sin\alpha = -2\cos\alpha \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \ \text{~~не сущ~~} \\ tg\alpha = -2 \end{array}\right.$

(3)

$4\cos2\alpha + 2\sin2\alpha = -4 \quad |:2$

$2\cos^2\alpha - \cancel{2\sin^2\alpha} + 2\sin\alpha\cos\alpha = -2\cos^2\alpha - \cancel{2\sin^2\alpha}$

$2\cos\alpha(\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = -2\cos\alpha \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} tg\alpha - \text{не сущ.} \\ tg\alpha = -2 \end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4

$4\cos 2\alpha + \cancel{8}\sin 2\alpha = -4 \quad |:4$

$\cancel{2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = -2\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}$

$\cancel{2\cos\alpha(\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0}$

$\cancel{\cos\alpha = 0}$

$\cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} + 4\sin\alpha\cos\alpha = -\cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha}$

$2\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ 2\sin\alpha = -\cos\alpha \end{array}\right. \Rightarrow \cancel{\cos} \left[\begin{array}{l} tg\alpha \text{ - не сущ.} \\ tg\alpha = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

из 4 случаев ~~мы~~ я получил 3 различных tg:

$tg\alpha = 0;\ tg\alpha = -2;\ tg\alpha = -\frac{1}{2}$

(P.S. случаи 1 и 4 можно было не рассм., если бы я учел, что ~~$x \ge 30°$ и~~, ~~но~~ $\Rightarrow$ $x \in \left(-\frac{\pi}{6}; 0\right)$, $x \in \left(-\pi; -\frac{5\pi}{6}\right)$ (это было дало понять в каких четвертях круга находится $2x$), но эти случаи не дали новых $tg\alpha$, поэтому это не повлияло на решение)

N2

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} & (1) \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 & (2) \end{cases}$$

1) (2): $x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 = 25$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

пусть $x - 2 = t$; $y - 1 = k$,

тогда $t^2 + 9k^2 = 25$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

2) (1) : $x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$x-2-2y+2=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$t-2k=\sqrt{tk}$

ОДЗ: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\geq 0\\ k\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}t\leq 0\\ k\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$

$t^2+4k^2-5tk=0$

$t=\dfrac{5k\pm\sqrt{25k^2-16k^2}}{2}=$

$=\dfrac{5k\pm 3k}{2}$

$\left[\begin{array}{l}t=4k\\ t=k\end{array}\right.$

3) $t=4k$:

$9k^2+16k^2=25$

$\cancel{k=\pm 1}$ $\left[\begin{array}{l}k=1\\ k=-1\end{array}\right.$ $\overset{\text{из-за ОДЗ}}{\Rightarrow}$ $\left[\begin{array}{l}t=4\\ t=-4\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=1\\ t=4\end{cases}\\ \begin{cases}k=-1\\ t=-4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y-1=1\\ x-2=4\end{cases}\\ \begin{cases}y-1=-1\\ x-2=-4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2\\ x=6\end{cases}\\ \begin{cases}y=0\\ x=-2\end{cases}\end{array}\right.$

4) $t=k$

$k^2+9k^2=25$

$k^2=2,5$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=\sqrt{2,5}\\ t=\sqrt{2,5}\end{cases}\\ \begin{cases}k=-\sqrt{2,5}\\ t=-\sqrt{2,5}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=\sqrt{2,5}+1\\ x=2+\sqrt{2,5}\end{cases}\\ \begin{cases}y=1-\sqrt{2,5}\\ x=2-\sqrt{2,5}\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ. $(6;2)$; $(-2;0)$; $(2+\sqrt{2,5};\ 1+\sqrt{2,5})$; $(2-\sqrt{2,5};\ 1-\sqrt{2,5})$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

1) ОДЗ: $x^2+18x>0$ => раскроем модуль, как +

$$\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-18 \end{array}\right.$$

2) $t=x^2+18x>0$

$$\log_5\left(\middle| \; 5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}\right.$$

прологарифмируем по 5:

$$\cancel{\log_{12}t\cdot\log_5}\ \log_5\left(5^{\log_{12}t}\right)\cdot\cancel{t}+\log_5 t \geq$$
$$\geq \log_5\left(t^{\log_{12}13}\right)$$

$$\log_{12}t+\log_5 t \geq \log_{12}13\cdot\log_5 t$$

$$\log_5(t)\left(\log_{12}13-1\right) \leq \log_{12}t$$

$$\log_{12}12=1$$

$$\log_5 t\cdot\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right) \leq \log_{12}t$$

$$\log_{12}t=\log_{12}5\cdot\log_5 t \longrightarrow \log_5 t\left(\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)-\log_{12}5\right)\leq 0$$

$$\log_5 t\cdot\underset{<0}{\log_{12}\left(\frac{13}{60}\right)}\leq 0$$

$$\log_5 t \geq 0$$

$$t \geq 1$$

$$\cancel{t-1\geq 0\ 0<t\leq 1}$$

$$\underline{t\geq 1}$$

$$\cancel{\log_5 t \leq 0}$$

$$\log_5 t \leq \log_5 1$$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$x^2+18x-1>0$

$\frac{-18\pm\sqrt{324+4}}{2}=-18\pm\sqrt{82}$

$\left[\begin{array}{l} x<-18-\sqrt{82} \\ x>-18+\sqrt{82} \end{array}\right.$ ← Ответ.

№6 $(a;b)$ -?

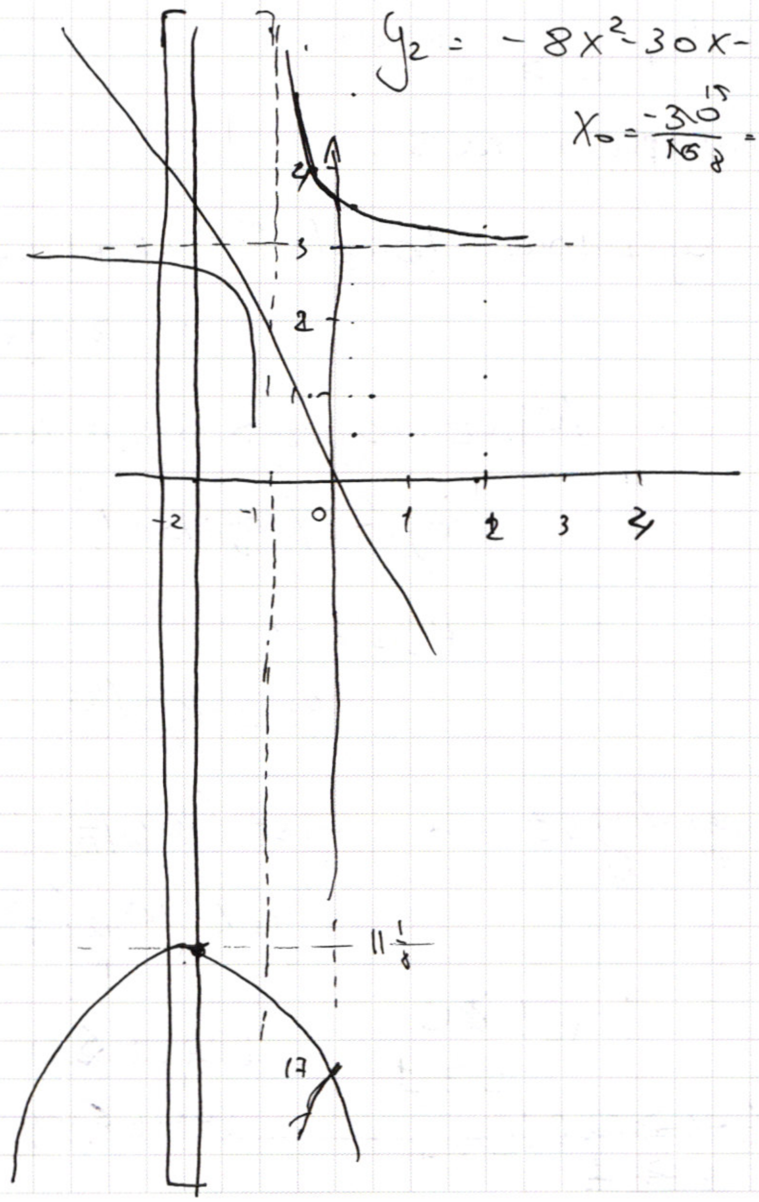
$\frac{12x+11}{4x+3}\leq ax+b\leq -8x^2-30x-17$

$x\in\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right]$

$y_1=\frac{12x+11}{4x+3}=\frac{2}{4x+3}+3=\frac{\cancel{8}0,5}{x+0,75}+3$

$y_2=-8x^2-30x-17$

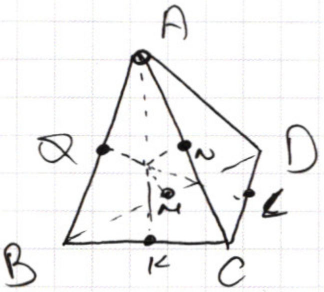
$x_0=\frac{-30^{15}}{16_8}=-\frac{15}{8}=$

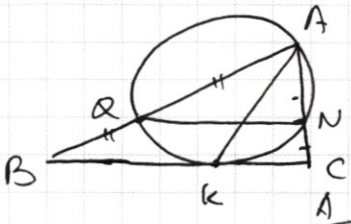


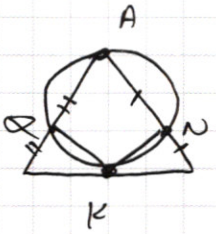
$ax+b$ – прямая

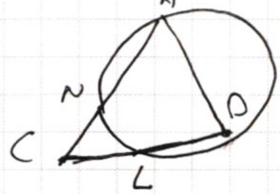
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7









т.к. K

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\qquad \sin(4\alpha+4\beta) = \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\left(\pm\frac{2}{\sqrt5}\right)2 = \pm\frac45$

$\sin(4\beta+4\alpha-2\alpha)$ $\qquad \cos(4\alpha+4\beta) = \pm\frac35$

~~$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac45$~~

$\sin(4\alpha+4\beta)\cos 2\alpha - \cos(4\alpha+4\beta)\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac45$

$\cos(2\alpha+2\beta) = +\frac{2}{\sqrt5}$ $\qquad \cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(4\alpha+4\beta) = -\frac45$ $\qquad \sin(4\alpha+4\beta) = \frac45$

$\cos(4\alpha+4\beta) = \frac35$ (1) $\qquad \cos(4\alpha+4\beta) = -\frac35$ (2) $\qquad \cos = \frac35$ (3) $\qquad \cos = -\frac35$ (4)

(1) $-\frac45\cos 2\alpha - \frac35\sin 2\alpha + \frac55\sin 2\alpha = -\frac45$

~~$4\cos 2\alpha + \cancel{3}\sin 2\alpha = 4$~~

~~$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = 1$~~

~~$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$~~

~~$2\cos\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha) = 0$~~

~~$\operatorname{tg}\alpha = 1$~~

~~$\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha$ — не сущ.~~

$2\sin 2\alpha - \cancel{4}\cos 2\alpha = -\cancel{4}$ (-2, -2)

$\cancel{4}\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{2\cos^2\alpha} + 2\sin^2\alpha = -2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha$

$\cancel{4}\sin\alpha(\cos\alpha + \cancel{2}\sin\alpha) = 0$

$\sin\alpha = 0 \to \operatorname{tg}\alpha = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac12$

$-\frac12; -2; 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\alpha$

(2) $-\frac45\cos 2\alpha + \frac35\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac45$

$-4\cos 2\alpha + 8\sin 2\alpha = -4$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha = -\cos^2 - \sin^2$

$2\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = -2$

$\operatorname{tg}\alpha = 0$

(3) $\cancel{4}2\cos + 2\sin = -\cancel{4}{-2}$

$4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$2\cos\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = -2$

(4): $4\cos + 8\sin = -4$

$8\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\cos\alpha + 2\sin\alpha = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac12$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$ $\qquad 4+9-8-18=12$

$x^2-4x+(9y^2-18y-12)=0$

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-36y^2+72y+48}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36y^2+72y+64}}{2}$

$-4(9y^2-18y+16)$

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25$ $\qquad \cancel{3y-4}$

$\cancel{xy+2-(x+2y)}$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

$k^2-5kt+t^2$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x-2y=\sqrt{y(x-2)-1(x-2)}=\sqrt{(y-1)(x-2)}$ $\qquad \frac{5\pm\sqrt{25-4}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

$x-2-2y+2=(x-2)-2(y-1)$

$y\geq 1,\ x\geq 2$ или $y\leq 1,\ x\leq 2$

$-4(x-2)(y-1)+(x-2)^2+(y-1)^2=(y-1)(x-2)$

$x^2-4y^2-4xy=xy-x-2y+2$

$(x-2)^2+(y-1)^2-5(x-2)(y-1)=0$

$x^2-5xy-4y^2+2y+x-2=0$

$\cancel{x+ky}+\left(\frac{x-2}{y-1}\right)^2-5\left(\frac{x-2}{y-1}\right)+1=0$

$x^2-x(5y-1)-(4y^2-2y+2)=0$

$(x+ay+b)(x+cy+d)=0$

$25y^2+1-10y+16y^2-8y+8=$

$=41y^2-18y+9$

$x^2+xy(a+c)+acy^2+y(ad+bc)+$

$+x(b+d)+bd=0$

$a+c=-5$

$ac=-4$

$ad+bc=2$

$b+d=1$

$bd=-2$

$\cancel{a+}$ $a-\frac{4}{a}=-5$

$\frac{a^2-4+5a}{a}=0$

$a^2+5a-4=0$

$\frac{-5\pm\sqrt{25+16}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

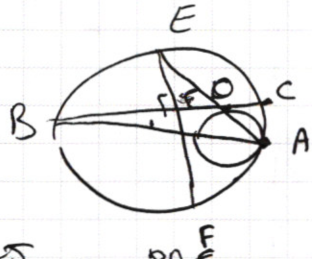
$$5^{\log_{12} t} + t \geq |t|^{\log_{12}13}$$ [redacted]

[redacted]

$AC = 2R\cos 2\alpha$

$AD = 2r\cos\alpha$

$\sin 2\alpha = \frac{25}{2R} = 2\cdot \frac{8AC}{AD^2}$



$\frac{25}{16R} = \frac{AC}{64+AC^2}$

$r = \frac{4R^2-17^2}{4R} = \frac{(2R+17)(2R-17)}{4R}$

$AD^2 = AC\cdot 2r$

$\frac{(2R+17)(2R-17)}{2R}\sqrt{4R^2-625} = 4R^2-561$

$\frac{25}{2R} = 2\cdot\frac{8AC}{2r\cdot AC}$

$25r = 16R$

$R = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2+4\cdot4\cdot17^2}}{8} = \frac{r \pm \sqrt{r^2+34^2}}{4}$

$\frac{CD}{KD} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{2r}$

$AD^2 = 2r\cdot AC$

$17 \times 4 = 68$

$AC^2 + 625 = 4R^2$

$2r\sqrt{4R^2-625} = 4R^2-561$

$AD^2 = 64 + AC^2 = 4R^2 - 561$

$289 = 4R^2 - 4Rr$

$625 - 64 = 561$

$R = \frac{17\cdot 25}{2\cdot 9}$

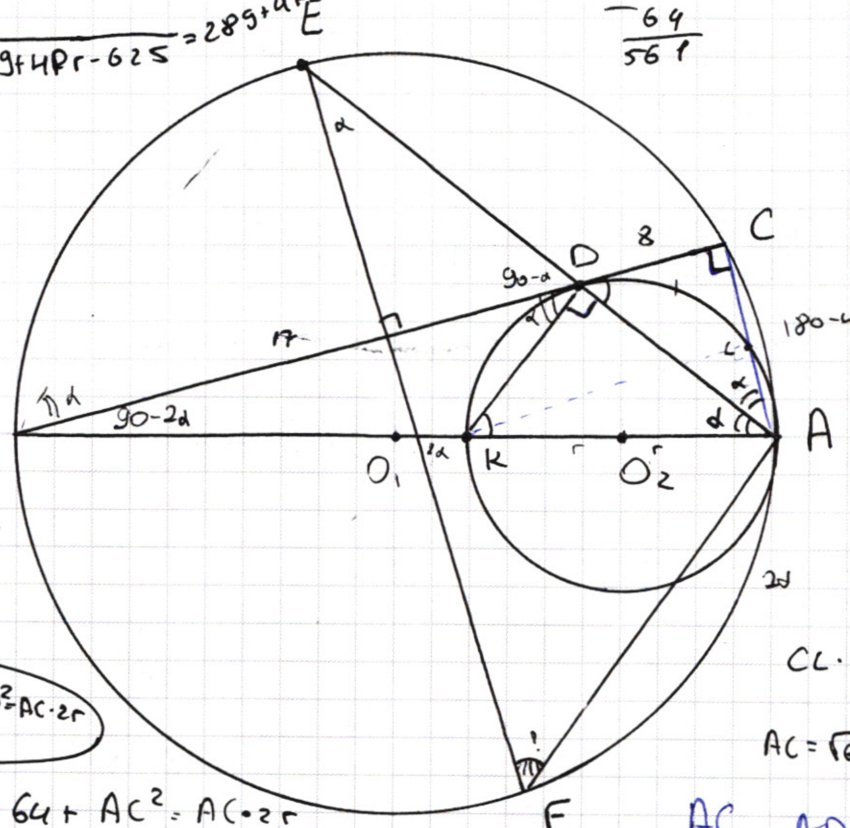
$2r\sqrt{289+4Rr-625} = 289+4Rr-561$

$R,\ r$

$17\cdot17 = 289$

$561 - 289 = 272$

$625 - 289 = 336$



$BO = 17$

$CD = 8$

$R = \frac{17\cdot5}{6} = \frac{85}{6}$

$r = \frac{16\cdot17\cdot5}{25\cdot6} = \frac{8\cdot17}{5\cdot3} = \frac{136}{15}$

$BK = 2R - 2r$

~~$AK =$~~

$4Rr + 272 = 2r\sqrt{336+4Rr}$

$16R^2r^2 + 272^2 + 8Rr\cdot272 =$

$= 4r^2\cdot 4Rr$

$2(R-r)\cdot 2R = 17^2$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = R^2 - Rr$

$\cos\alpha = \frac{AD}{2r} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AD^2 = AC\cdot 2r$

$\sin 2\alpha = \frac{25}{2R} = 2\cdot\frac{AD}{2r}\cdot\frac{8}{AD}$

$CL\cdot AC = 64$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = R^2 - R\cdot\frac{16R}{25}$

$AC = \sqrt{625-4R^2}$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = R^2\cdot\frac{9}{25}$

$AD^2 = 64 + AC^2 = AC\cdot 2r$

$689 - 4R^2 = \sqrt{625-4R^2}\cdot 2r$

$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{2r}$ $\quad AD^2 = 2r\sqrt{625-4R^2}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x^2+30x+17$ $\cancel{x-2}$

$5^{\log_{12} t}+t \geq |t|^{\log_{12} 13}$

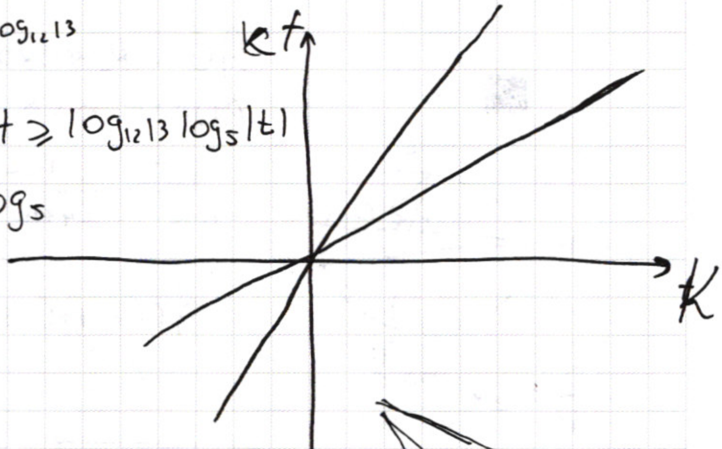
$\frac{-30 \pm \sqrt{900-32\cdot 17}}{16}$

$x-2=t$

$\log_{12} t+\log_5 t \geq \log_{12} 13 \log_5 |t|$

$y-1=k$

$\log_{12} t \geq \log_5$



32 ×17 224 32 18 544 ×18 900 −544

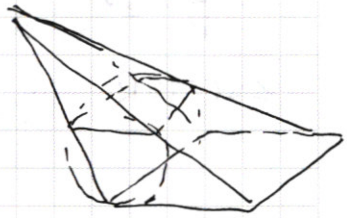
14 4 456|2 18 228|2 32 4 114|3 28|4 7|7

$$\begin{cases} t^2+9k^2=25 \\ t^2+k^2-5tk=0 \end{cases}$$

16·3·7

328|2 164|4 41

$25-8k^2-5k\sqrt{}$



$-\frac{8\cdot 225}{64\cdot 8}+\frac{30\cdot 15}{8\cdot 4}-17$

$\frac{225}{8}-17$

$\frac{-225+225\cdot 2}{8}-17$

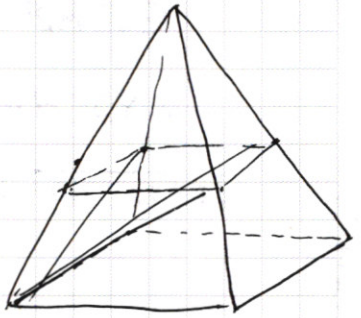
$\frac{-30 \pm 4\sqrt{21}}{8}$

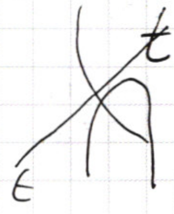
$(t-ak)^2(t-bk)$

$\frac{k}{x+c}+b=\frac{bx+k+bc}{x+c}$

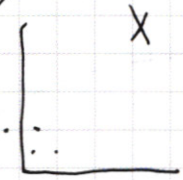
$\left(t-\frac{5+\sqrt{21}}{2}k\right)\left(t-\frac{5-\sqrt{21}}{2}k\right)$

$x^2+y^2-5xy=0$





$t=\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}k$



225|8 16 |28 65

$28,\frac{1}{8}-17$

$11\frac{1}{8}$

$12^x=t$

$5^y=t$

$\left(\left(\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right)^2+9\right)k^2=25$

$12^x=5^y$

$x=\log_{12} 5\cdot y$

$\frac{x}{y}=\frac{\log_{12} t}{\log_5 t}$

$k=\pm\sqrt{\frac{25}{9+\left(\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right)^2}}=\pm\sqrt{\frac{25}{32 \pm 5\sqrt{21}}}$

$12^x=t$ $\log_{12} 5$

$5^y=t$

$9+\frac{25+21 \pm 10\sqrt{21}}{2}=32 \pm 5\sqrt{21}$

$t=\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\left(\sqrt{\frac{25}{32 \pm 5\sqrt{21}}}\right)$

$y=1 \pm \frac{5}{\sqrt{32 \pm 5\sqrt{21}}}$

$12^x=5^y$

$x\log_5 12=y$

$\frac{k}{ax+b}+c=\frac{k+acx+bc}{ax+b}$

$\frac{12x+11}{4x+3}-cx-b \leq 0$

8 k=2

9+k=11

a=4; bc=3 ; b=3 ;

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$1 \leq x, y \leq 24$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$\cancel{\frac{1}{24} \leq f}$

$f(f)$

$\frac{1}{24} \leq f \leq 24$

$f(4)$

$7+2$

$f(5) = f\left(\frac{5}{k}\right) + f(k)$

$\overset{\shortparallel}{1}$ $\quad \overset{\wedge}{0}$ $\quad > 1$

11, 13, 17, 19, 23

23

6

$f(6) = f\left(\frac{6}{k}\right.$

$7+$

p:	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$f(p)$:	0	0	1	1	2	3	4	4	5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	0	3	1	1	0	4	0	4	1

21	22	23	24
1	2	5	0

~~$f(8) =$~~

$f(6) = 0$

$f(4) = 0$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(12) = 0$ $\quad$ 1, 5 $\quad$ 1, 7

$f(14) = 1$ $\quad$ 2, 14

$f(15) = 1$ $\quad$ 3, 9

$f(16) = 0$ $\quad$ 7 $\quad$ 13

$f(18) = 0$ $\quad$ 21 $\quad$ 11

~~23~~ 19 23

$f(20) = 1$

24

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(24) = 0$

$f(1) = 0$

5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24

$\frac{1}{24}; \frac{1}{23} \cdots \frac{1}{1}$

$\frac{2}{24}; \frac{2}{23} \cdots 2$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$\frac{23}{24} \quad \frac{23}{23} \quad 23$

$\frac{24}{24} \quad \frac{24}{23} \quad 24$

$f(2) = f\left(\frac{1}{5}\right) + f(10)$

$f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$

~~$f(1) = f\left(\frac{1}{5}\right) + f(5)$~~

$\frac{x}{y} \leq 1$

$f(1) = \overset{=0}{f\left(\frac{1}{2}\right)} + f(2)$

$f(1) = 2f(1)$

$f(1) = 0$

[redacted]

10, 14, 15, 20, 21, 22

$f(1) = \overset{=0}{f\left(\frac{1}{k}\right)} + f(k)$

$\frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \frac{1}{11}; \frac{1}{13}; \frac{1}{17}; \frac{1}{19}; \frac{1}{23}$

$\frac{1}{10}; \frac{1}{14}; \frac{1}{15}; \frac{1}{20}; \frac{1}{21}; \frac{1}{22}$ $\Big\}$ 13

6

$f(2) = f\left(\frac{2}{k}\right) + f(k)$

$\frac{2}{5}; \frac{2}{7}; \frac{2}{11}; \frac{2}{13}; \frac{2}{17}; \frac{2}{19}; \frac{2}{23}; \frac{2}{15}; \frac{2}{21}$ $\Big\}$ 9

$f(2) = \overset{=0}{f\left(\frac{2}{k}\right)} + \underbrace{f(k)}_{15,\ 21}$

$\underbrace{f(3) = f\left(\frac{3}{k}\right) + f(k)}_{7}$ $\quad +4 \ \Big\}\ 11$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$R = \frac{85}{6} = \frac{17\cdot5}{6} = 14\frac{1}{6}$

$r = \frac{128}{15} = \frac{17\cdot8}{3\cdot5}$

$177 \times 12 = 2124$

$\sin 2\alpha = \frac{25}{2R}$

$\cancel{AC = \sqrt{625 - \frac{825\cdot17^2}{9}}}$

$25 \times 85 = 2125$

$25\left(25 - \frac{17^2}{9}\right) = 25\left(\frac{5^2\cdot3^2-17^2}{9}\right) = \frac{25}{9}$

$2125 : 12 = 177{,}0$

$\sin 2\alpha = \frac{25}{2R} = 2\cdot\frac{AD}{8r}\cdot\frac{8}{AD}$

$AC\sqrt{\frac{25\cdot17^2}{9} - 625} =$

$16R = 25r$

$= \sqrt{\frac{25}{9}(17^2-15^2)} =$

$r = \frac{16}{25}R$

$= \sqrt{\frac{25}{9}\cdot2\cdot32} = \sqrt{\frac{25\cdot64}{9}} =$

$tg\alpha = \frac{8}{40/3} = \frac{3\cdot8}{5\cdot8} = \frac{3}{5}$

$2r = \frac{32}{25}R$

$\frac{5\cdot8}{3} = \frac{40}{3}$

$\cancel{\cos\alpha = 3}$

$AD\sqrt{8^2 + \frac{8^2\cdot5^2}{9}} =$

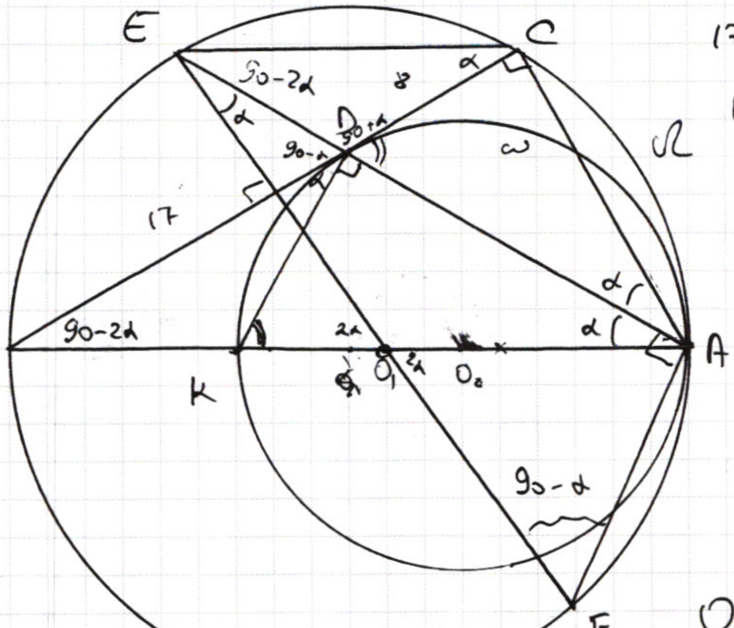
$17^2 = (2R-2r)\,2R$

$17^2 = \left(2R - \frac{32}{25}R\right)\cdot 2R =$

$= 8^2\left(\frac{9+5^2}{9}\right) =$

$= \frac{18}{25}R^2\cdot 2$

$= \frac{8}{3}\sqrt{34}$



$\frac{36}{25}R^2 = 17^2$

$\angle AEF = arctg\frac{5}{3}$

$tg(90-\alpha) = \frac{5}{3}$

$R^2 = \left(\frac{17\cdot5}{6}\right)^2$

$R = \frac{85}{6}$

$EF = 2R$

$O_1 \in EF$

$\left(177\frac{1}{12}\right)$

$\frac{5\cdot3\cdot17}{12}$

$AF = 2R\sin\alpha$

$AE = 2R\cos\alpha \Rightarrow S = \frac{4R^2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = R^2\sin2\alpha = \left(\frac{85}{6}\right)^2 = R^2\cdot\frac{25}{2R} = \frac{25\cdot85}{6\cdot2}$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)