МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

т.к. $tg\alpha$ определен, то $\cos\alpha \neq 0$

1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = \frac{-2}{\sqrt{17}}\sin 2\beta = \frac{-2}{17}$

отсюда $\boxed{\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}}$, тогда $\boxed{\cos 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}}$ по основному тригонометр. тождеству

2) подставим найденные значения в 1ое равенство

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\frac{\pm 4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\pm 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \rightarrow \left[\begin{array}{l} 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ -4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \end{array}\right.$

подставляя $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ и $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\left[\begin{array}{l} 8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \quad /\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} \\ -8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \quad /\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 8tg\alpha + 2 = 0 \\ -8tg\alpha + 2 = 0 \end{array}\right.$ $\boxed{\left[\begin{array}{l} tg\alpha = \frac{-1}{4} \\ tg\alpha = \frac{1}{4} \end{array}\right.}$

3) подставим найденные значения во 2ое равенство

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta + \sin 2\alpha = \frac{-2}{17}$

где $\cos 4\beta = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta = \frac{16}{17} - \frac{1}{17} = \frac{15}{17}$

$\sin 4\beta = 2\sin 2\beta\cos 2\beta = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\left(\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = \frac{\pm 8}{17}$

$\frac{15}{17}\sin 2\alpha \pm \frac{8}{17}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \frac{-2}{17}$

$16\sin 2\alpha \pm 8\cos 2\alpha = -2$

$8\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1 \rightarrow \left[\begin{array}{l} 8\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \\ 8\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}8(2\sin\alpha\cos\alpha)+4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\\8(2\sin\alpha\cos\alpha)-4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}16\sin\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha=0\quad/\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\\16\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha+5\sin^2\alpha=0\quad/\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}16\,tg\alpha+5-3tg^2\alpha=0\\16\,tg\alpha-3+5tg^2\alpha=0\end{array}\right.\qquad\left[\begin{array}{l}3tg^2\alpha-16tg\alpha-5=0\\5tg^2\alpha+16tg\alpha-3=0\end{array}\right.$$

$$D_1=(-16)^2-4\cdot3(-5)=16^2+4\cdot3\cdot5=4(4\cdot16+15)=4\cdot79$$

$$D_2=16^2-4\cdot5(-3)=16^2+4\cdot3\cdot5=D_1$$

$$tg\alpha=\frac{16\pm\sqrt{D_1}}{2\cdot3}=\frac{16\pm2\sqrt{79}}{2\cdot3}=\frac{8\pm\sqrt{79}}{3}$$

$$tg\alpha=\frac{-16\pm\sqrt{D_2}}{2\cdot5}=\frac{-16\pm2\sqrt{79}}{2\cdot5}=\frac{-8\pm\sqrt{79}}{5}$$

Ответ: $tg\alpha=\frac{-1}{4}$, $tg\alpha=\frac{1}{4}$, $tg\alpha=\frac{8\pm\sqrt{79}}{3}$, $tg\alpha=\frac{-8\pm\sqrt{79}}{5}$

$\boxed{2}$

$$\begin{cases}y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}=\sqrt{(x-1)(y-6)}\\9x^2+y^2-18x-12y=45\end{cases}$$

1) $xy-6x-y+6=x(y-6)-1(y-6)=(x-1)(y-6)$

2) $9x^2+y^2-18x-12y=45$

$(3x)^2-2\cdot3x\cdot3+3^2+y^2-2\cdot y\cdot6+36=45+45$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

3) $y-6x=(y-6)-6(x-1)$

4) новая система:

$$\begin{cases}(y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)}\\9(x-1)^2+(y-6)^2=90\end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $x-1=A$, $y-6=B$, тогда

$$\begin{cases} B-6A=\sqrt{AB} \\ 9A^2+B^2=90 \end{cases}$$

5) рассмотрим первое равенство; ограничение на корень $AB \geq 0 \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A\geq 0 \\ B\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases} \end{array}\right.$

Если A и $B \geq 0$, то $B-\sqrt{AB}-6A=0$

$$D=A-4(-6A)=25A \to \sqrt{B}=\frac{\sqrt{A}\pm 5\sqrt{A}}{2}$$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{B}=3\sqrt{A} \text{ — удовлетворяет ус. } A,B\geq 0\text{, откуда } \boxed{B=9A} \\ \sqrt{B}=-2\sqrt{A} \text{ — не подходит под данный случай } B,A\geq 0 \end{array}\right.$

Если A и $B<0$, то $B-6A=-\sqrt{AB} \to B+\sqrt{AB}-6A=0$

домножим левую часть на (-1) чтобы сделать ее положительной

$$D=25A \to B=\frac{-\sqrt{A}\pm 5\sqrt{A}}{2}$$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{B}=2\sqrt{A} \to \boxed{B=4A} \\ \sqrt{B}=-3\sqrt{A} \text{ — не подходит, т.к. корень не может быть меньше нуля} \end{array}\right.$

Получим, что $B-6A=\sqrt{AB} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A,B\geq 0 \\ B=9A \end{cases} \\ \begin{cases} A,B<0 \\ B=4A \end{cases} \end{array}\right.$

6) $\begin{cases} 9A^2+B^2=90 \\ A,B\geq 0 \\ B=9A \end{cases}$ $9A^2+81A^2=90 \to A^2=1$

$\begin{cases} A=\pm 1 \\ B=\pm 9 \\ A,B\geq 0 \end{cases}$ $\boxed{\begin{array}{l} A=1 \\ B=9 \end{array}}$

7) $\begin{cases} 9A^2+B^2=90 \\ A,B<0 \\ B=4A \end{cases}$ $9A^2+16A^2=90$, $25A^2=90 \rightarrow A^2=\frac{18}{5}$

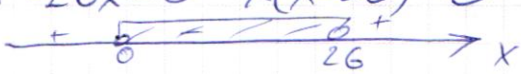
$\begin{cases} A=\pm 3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ B=\pm 12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ A,B<0 \end{cases}$ $\boxed{\begin{cases} A=-\frac{3\sqrt{2}}{5} \\ B=-12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}}$

8) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1=1 \\ y-6=9 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=\frac{-3\sqrt{2}}{5} \\ y-6=-\frac{12\sqrt{2}}{5} \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{5-3\sqrt{2}}{5} \\ y=\frac{30-12\sqrt{2}}{5} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(2;15)$, $\left(\frac{5-3\sqrt{2}}{5}; \frac{30-12\sqrt{2}}{5}\right)$

$\boxed{3}$ $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

1) ОДЗ: $26x-x^2>0$, $x^2-26x<0$ $x(x-26)<0$



$x \in (0;26)$

2) $|x^2-26x|=|26x-x^2|$, поэтому

$|26x-x^2|^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

пусть $26x-x^2=A$

$|A|^{\log_5 12}+A \geq 13^{\log_5(A)}$ / возьмем логарифм по основанию $13>1$

$\log_{13}(|A|^{\log_5 12}+A) \geq \log_{13}(13^{\log_5(A)})$

$\log_{13}(|A|^{\log_5 12}+A) \geq \log_5(A)$

$\frac{\ln(|A|^{\log_5 12}+A)}{\ln 13} \geq \frac{\ln(A)}{\ln 5}$ / т.к. $\ln 13$ и $\ln 5>0$, то они на знак неравенства не влияют

$\ln(|A|^{\log_5 12}+A) \geq \ln(A)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Функция $y=\ln t$ монотонно возрастающая, значит

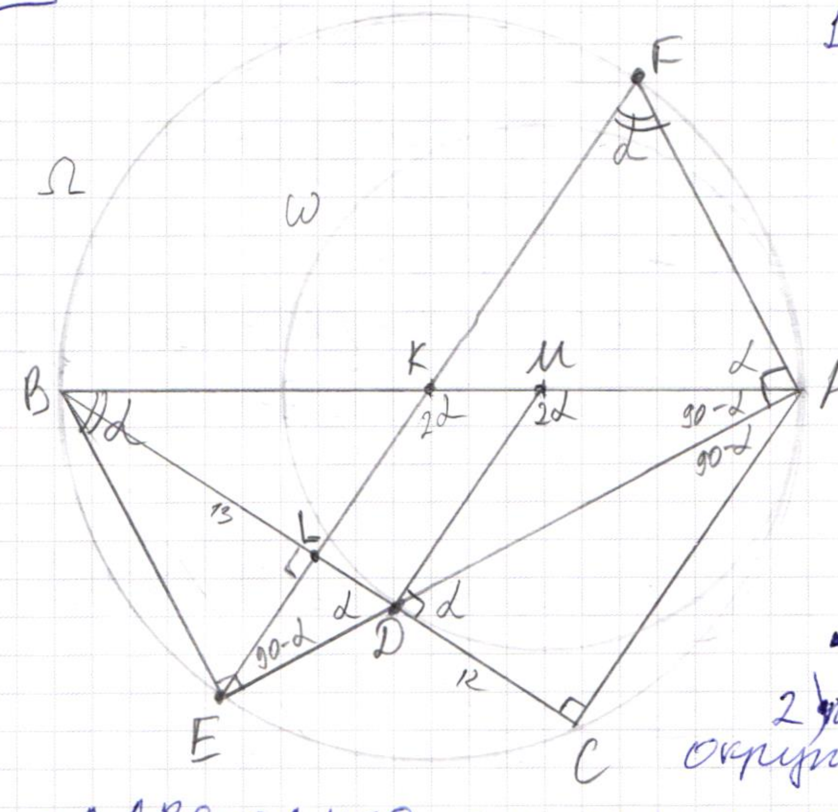
$|A|^{\log_5 12}+A\geq A$

$|A|^{\log_5 12}\geq 0$, где $|A|$ неотрицательное число, значит неравенство верно для любых A из области определения

т.е. $x\in(0;26)$

Ответ: $x\in(0;26)$

$\boxed{4}$



1) • пусть K и M центры окруж. Ω и ω

• тогда ~~A~~, M, K ~~B~~ лежат на одной прямой AB как центры касающихся окружностей

• $BC\perp MD$ как касательная ~~к рад~~ и радиус окруж. ω

• $\angle BCA=\angle BEA=90^\circ$ как углы опирающиеся на диаметр Ω

• ~~KL EF, TK EF~~

2) пусть R и r радиусы окруж. Ω и ω

• $\triangle ABC\sim\triangle MBD$ как прямоугольные с общим углом $\angle ABC$, тогда $\frac{BD}{CD}=\frac{BM}{AM}=\frac{13}{12}$

$BM=BA-AM=2R-r$

$AM=r$

$\frac{2R-r}{r}=\frac{13}{12}\to 24R=25r$

• для прямоуг. ΔMBD запишем т. Пифагора

$BM^2 = BD^2 + MD^2 \quad (2R-r)^2 = 13^2 + r^2$

$$\begin{cases} 4R^2 - 4Rr - 13^2 = 0 \\ 24R = 25r \rightarrow r = \frac{24}{25}R \end{cases}$$

$25 \cdot 4R^2 - 4R \cdot 24R - 13^2 \cdot 25 = 0$

$R^2 = \frac{13^2 \cdot 5^2}{2^2}$ $\boxed{R = \frac{13 \cdot 5}{2} = \frac{65}{2} = 32,5}$ $\boxed{r = 31,2}$

3) • пусть $\angle ADC = \alpha$, тогда $\angle AMD = 2\alpha$, т.к. $\angle ADC$ - угол между касательной BC и хордой AD

• в р/б ΔAMD $\angle MAD = 90 - \alpha$

тогда в прямоуг. ΔABE $\angle ABE = \alpha$

• $\angle ABE = \angle AFE = \alpha$ как опирающ. на дугу AE

• по т. Пифагора в прямоуг. ΔABC

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60$

тогда $\boxed{tg\alpha = \frac{AC}{CD} = \frac{60}{12} = 5}$ т.е. $\boxed{tg\angle AFE = 5}$

4) • $\angle FEA = \angle EAC = 90 - \alpha$ при $EF \parallel AC$, т.к. они перпендикулярны BC

• в ΔAFE $\angle FAE = 180^\circ - \angle AFE - \angle FEA =$

$= 180^\circ - \alpha - 90^\circ + \alpha = 90^\circ \rightarrow \Delta AFE$ прямоуг. значит EF диаметр Ω

$EF = 65$

• $\sin\alpha = \frac{AE}{EF} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\cos\alpha = \frac{AF}{EF} = \frac{1}{\sqrt{26}}$

• $S_{AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot AE = \frac{1}{2} EF\cos\alpha \cdot EF\sin\alpha = \frac{EF^2\cos\alpha\sin\alpha}{2} =$

$= \frac{65^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{5^2 \cdot 13^2 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 13} = \frac{5^3 \cdot 13}{4}$

Ответ: 1) $R = 32,5$, $r = 31,2$ 2) $tg\angle AFE = 5$ 3) $S_{AEF} = \frac{5^3 \cdot 13}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{5}$

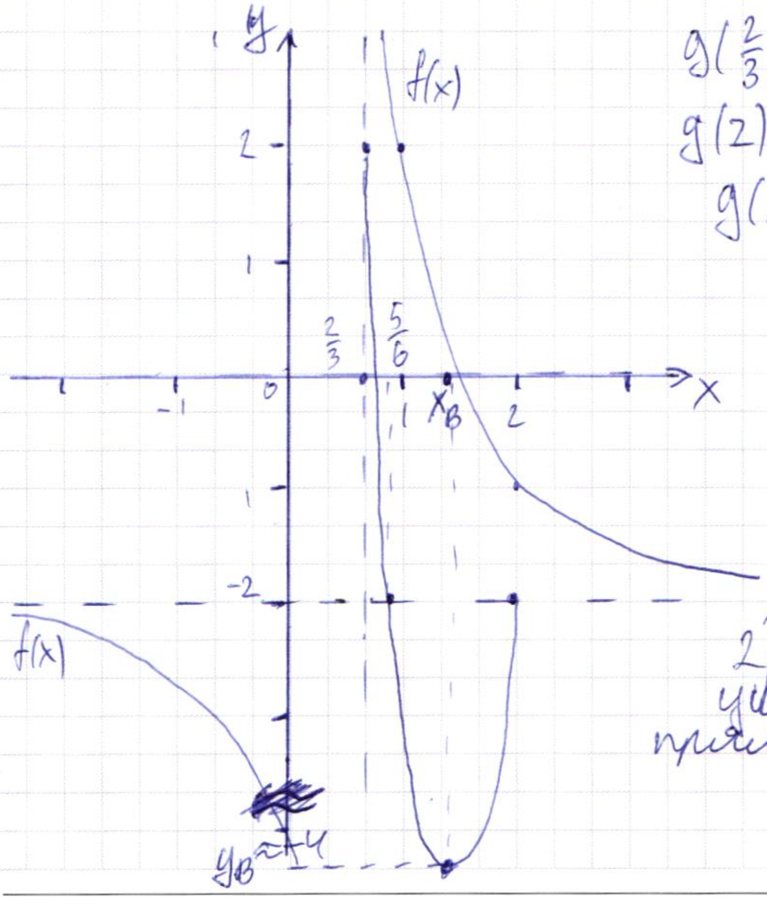
$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

1) пусть $f(x)=\frac{8-6x}{3x-2}$, $g(x)=18x^2-51x+28$

• $f(x)=\frac{8-6x}{3x-2}=\frac{-2(3x-2)+4}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}=-2+\frac{\frac{4}{3}}{x-\frac{2}{3}}$

график $f(x)$ – гипербола с асимптотами $x=\frac{2}{3}$ и $y=-2$

• $g(x)=18x^2-51x+28$ – графиком является парабола с „ветвями вверх" и абсциссой вершины $x_B=\frac{51}{2\cdot 18}=\frac{17}{2\cdot 6}=\frac{17}{12}<2$, но $>\frac{2}{3}$



$g\left(\frac{2}{3}\right)=18\cdot\frac{4}{9}-51\cdot\frac{2}{3}+28=2$

$g(2)=18\cdot 4-51\cdot 2+28=-2$

$g(x)=-2$

$18x^2-51x^2+28=-2$

$D=51^2-4\cdot 18\cdot 30=21^2$

$x=\frac{51\pm 21}{18\cdot 2}$ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{6} \\ x=2 \end{array}\right.$

$y_B=g\left(\frac{17}{12}\right)\approx -4$

2) $ax+b$ – линейная функция, графиком является прямая

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4R^2-4Rr-13^2=0$ $\qquad 24R=25r \quad r=\frac{24}{25}R$

$D=(-4r)^2-4\cdot4\cdot(-13^2)=16r^2+16\cdot13^2=16(r^2+13^2)$

$\cancel{4R^2}$ $4R^2-4R\cdot\frac{24}{25}R-13^2=0 \;/\cdot25$ $\qquad tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=5$

$100R^2-96R^2-13^2\cdot25=0$ $\qquad \cancel{\sin\alpha}$

$4R^2=13^2\cdot25$

$R^2=\frac{13^2\cdot5^2}{2^2} \Rightarrow R=\frac{13\cdot5}{2}=\frac{65}{2}=\boxed{32,5}$

$r=\frac{\cancel{24}^{12}}{\cancel{25}_5}\cdot\frac{13\cdot\cancel{5}}{\cancel{2}}=\frac{12\cdot13}{5}=\frac{156}{5}=\boxed{31,2}$

$AB=2R=65$

$2\cdot32,5-31,2=65-31,2=33,8$

$\frac{33,8}{31,2}=\frac{338}{312}=\frac{169}{156}=\frac{13}{12}$

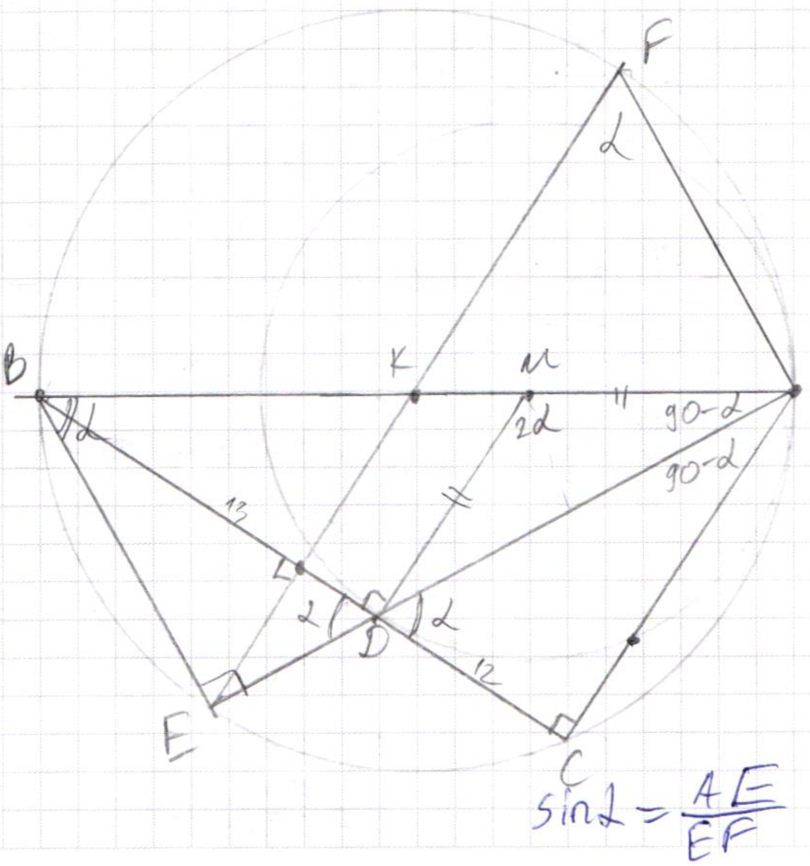
$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=$

$=\sqrt{65^2-25^2}=$

$=\sqrt{40\cdot90}=$

$=60$

$\boxed{tg\alpha=\frac{AC}{CD}=\frac{60}{12}=\cancel{\frac{1}{5}}\;5}$



$EF\perp BC \Rightarrow EF$ диаметр

$EF=65$

$tg\alpha=\frac{1}{5}=\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\frac{\sqrt{26}}{5}$

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}$

$\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{26}}$

$\sin\alpha=\frac{AE}{EF}$ $\qquad \cos\alpha=\frac{AF}{EF}$

$$S_{AEF}=\frac{1}{2}EF\cdot AF\sin\alpha=\frac{1}{2}EF^2\sin\alpha\cos\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}65^2\cdot\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\frac{\cancel{2}5}{\sqrt{26}}=\frac{65^2\cdot 25}{2\cdot 26}=\frac{(5\cdot 13)^2\cdot 5^2}{2\cdot 26}=$$

$$=\frac{5^2 5^2\cdot 13}{4}=\frac{5^4\cdot 13}{4}$$

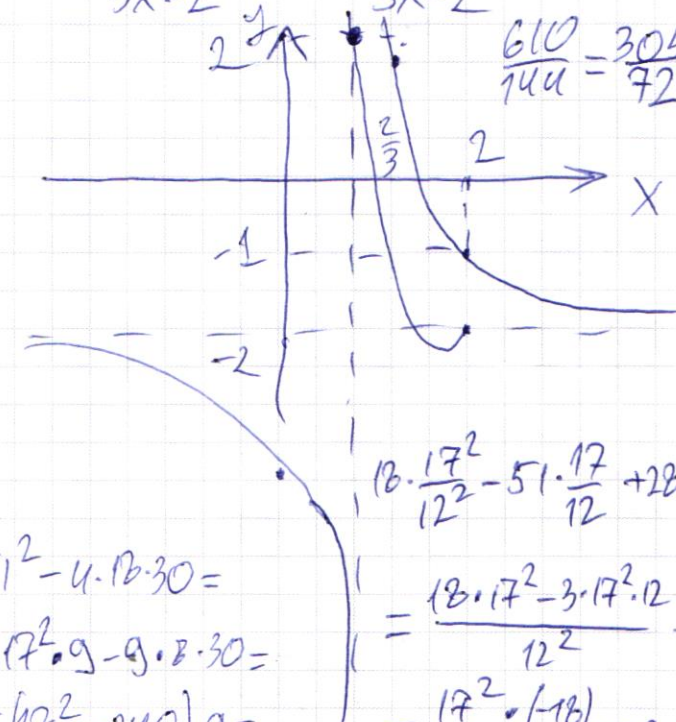
289 · 18, 2312, 289, 3202

3202 − 2592 = 610 | 144

144 · 18 = 1152, 144, 2592

6) $\frac{8-6x}{3x-2}=\frac{-(6x-4)+4}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}=-2+\frac{4}{3(x-\frac{2}{3})}=$

$$=-2+\frac{4/3}{x-2/3}$$



$\frac{610}{144}=\frac{305}{72}$

17 · 17 = 119, 17, 289

$18x^2-51x+28=0$

$D=51^2-4\cdot 18\cdot 28=$

$=17^2\cdot 9-4\cdot 3\cdot 9\cdot 28=$

$=9(189-336)$

$18\cdot\frac{17^2}{12^2}-51\cdot\frac{17}{12}+28=$

$=\frac{18\cdot 17^2-3\cdot 17^2\cdot 12}{12^2}+28=$

$=\frac{17^2\cdot(-18)}{12^2}+28=\frac{\cancel{189}^{21}(-\cancel{18}^{9})}{\cancel{9}\cdot 16_8}+28$

$x_B=\frac{51}{18}=\frac{17}{9}$

28 · 12 = 56, 28, 336

$51^2-4\cdot 18\cdot 30=$

$=17^2\cdot 9-9\cdot 8\cdot 30=$

$=(17^2-240)9=$

$=49\cdot 9=\sqrt{7\cdot 3}$

$\frac{8-6\cdot\frac{2}{3}}{3\cdot\frac{2}{3}-2}=\frac{8-4}{0}$ - асимптота

$18\cdot\frac{4}{9}-51\cdot\frac{2}{3}+28=$

$=8-34+28=2$

17 · 17 = 119, 17, 289

$-\frac{289}{8}+28=$

224 | 9, 18 | 22, 24, 18, 6,...

28 · 8

$\frac{8-6\cdot 2}{3\cdot 2-2}=\frac{-4}{4}=-1=\frac{-289+28\cdot 8}{8}$

$18\cdot 4-51\cdot 2+28=$

$-\frac{65}{8}=-8\frac{1}{8}$

$=72-102+28=\cancel{2}-2$

60

$18\cdot\frac{17^2}{9^2}-51\cdot\frac{17}{9}+28=$

189 | 9, 18 | 21, 9

28 · 8 = 224; 289 − 224 = 65

$\frac{\cancel{2}\cdot 17^2}{9}-\frac{3\cdot 17\cdot 17}{9}+28=\frac{-17^2}{9}+28$

$(18x^2-51x+28)'=$

$-21+28=7$

$=36x-51$

$\frac{289(-18)}{12^2}+28$

$x=\frac{51}{36}=\frac{17}{12}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 9A^2+B^2=90 \\ \left[\begin{array}{ll} B=9A & A,B\geq 0 \\ B=4A & A,B<0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$9A^2+81A^2=90$

$A^2=90$ $A=\pm 1$, но $A=1$, $B=9$

$9A^2+16A^2=90$

$25A^2=90$

$A^2=\frac{90}{25}=\frac{18}{5}$ $A=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}=\pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

но $A=-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$B=-\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$\frac{9\cdot 9\cdot 2}{25}+\frac{12^2\cdot 2}{25}=$

$=\frac{81\cdot 2+144\cdot 2}{\cancel{25}}=\frac{\overset{9\cdot 5}{\cancel{225}}\cdot 2}{\cancel{25}}=\cancel{18}\,90$

$25A^2=25\cdot\frac{9\cdot 2}{25}=18$

$-\frac{12\sqrt{2}}{5}-6\left(\frac{-3\sqrt{2}}{5}\right)=\sqrt{\left(\frac{-12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)}$

$\frac{6\sqrt{2}}{5}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$9-6\cdot 1=9\cdot 1=3$

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$|26x-x^2|^{\log_5 12}+26x-x^2\geq 13^{\log_5(26-x^2)}$

$26x-x^2=A$

$|A|^{\log_5 12}+A\geq 13^{\log_5 A}$

$\log_{13}\left(|A|^{\log_5 12}+A\right)\geq\log_5 A\underbrace{\log_{13}13}_{1}$

$|A|^{\log_5 12}+A\geq A$

$|A|^{\log_5 12}\geq 0$

$4<8$

$\log_2 4<\log_2 8$ $2<3$

$\log_{\frac{1}{2}}4>\log_{\frac{1}{2}}8$ $-2>-3$

$|A|^{\log_5 12} \geq 0$ $\quad \cancel{x^a} \quad x^a$ $\quad e^{\ln x} = x$

$\log_5 1 = 0$ $\quad a^{\log_a x} = x$

$|A|^0 = 1$

$|A|^{\frac{\log_{|A|} 12}{\log_{|A|} 5}} = 12^{\log_5 |A|} \geq 0$

$\log_a f(x) - \log_b g(x) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(f(x)-g(x)) \geq 0$

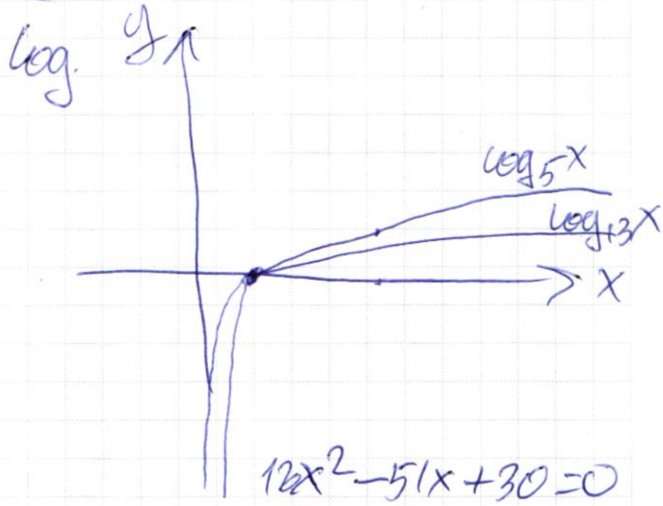
$\log_2 f(x) - \log_4 \cancel{4}g(x) \geq 0$

$-2(f(x)-g(x)) \geq 0$

$f(x) - g(x) \leq 0$

$f(x) \leq g(x)$

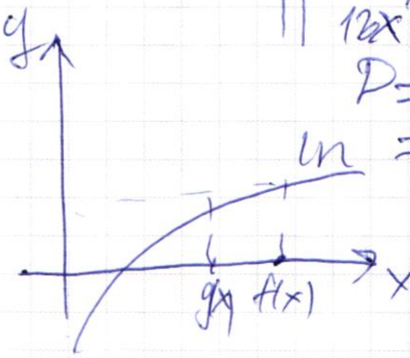
log.



$\log_{13} f(x) \geq \log_5 g(x)$

$\frac{\ln \cancel{13} f(x)}{\ln 13_{>1}} \geq \frac{\ln g(x)}{\ln 5_{>1}}$

$\ln f(x) \geq \ln \cancel{5} g(x)$



$12x^2 - 51x + 30 = 0$

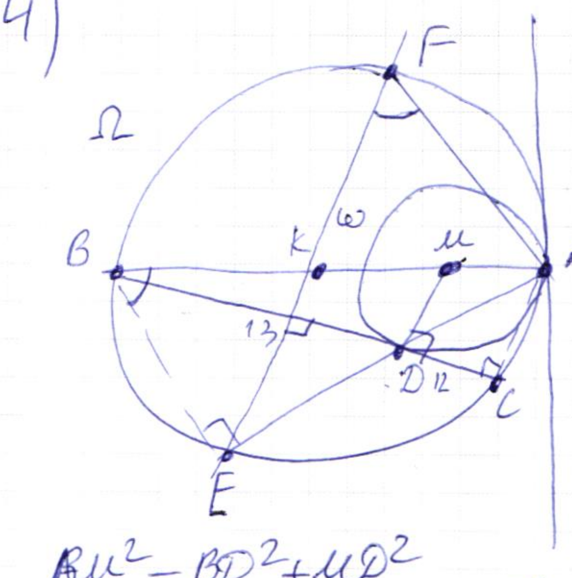
$D = 51^2 - 4 \cdot 12 \cdot 30 =$

$= 17^2 \cdot 9 - 9 \cdot 60 =$

$= 9 \cdot 129$

$\frac{51 \pm 21}{2 \cdot 12} = \left[\begin{array}{l} \frac{30}{36} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6} \\ \frac{72}{36} = 2 \end{array}\right.$

4)



$R, r = ?$

$\angle AFE = ?$

$S_{AEF} = ?$

$CD = 12$

$BD = 13$

$\frac{BD}{CD} = \frac{BM}{AM} = \frac{13}{12}$

$BM = 2R - r$

$AM = r$

$\frac{2R - r}{r} = \frac{13}{12}$

$24R - 12r = 13r$

$24R = 25r$

$BM^2 = BD^2 + MD^2$

$(2R - r)^2 = 13^2 + r^2 \quad 4R^2 - 4Rr + r^2 = 13^2 + r^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}=\sqrt{x(y-6)-1(y-6)}=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=45+9+36$

$\cancel{(3x-3)^2+(y-6)^2=0}$ $\cancel{9x}$

$\cancel{\begin{cases} 3x-3=0 \\ y-6=0 \end{cases}}$ $\cancel{\begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}}$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$ $x-1=A$, $y-6=B$

$B-6A=$
$=y-6-6(x-1)=$
$=y-6-6x+6=y-6x$

$\begin{cases} B-6A=\sqrt{AB} \\ 9A^2+B^2=90 \end{cases}$ $\cancel{B}\ AB=\alpha$, $A+B=\beta$

$2B-12A=$
$=2y-12-12x+12=$
$2y-12x=2(y-6x)$

$(3A)^2-2\cdot 3A\cdot B+B^2=90$

$(3A-B)^2=90\cancel{+B^2}-6AB$

$2B-12A$

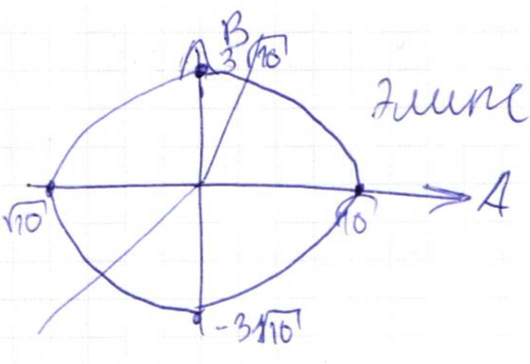
$\cancel{6}\ -5B+7B-5A-7A$

$\begin{cases} (B^{\cancel{2}}-6A)^2=AB \\ 9A^2+B^2=90 \end{cases}$ $\begin{cases} B^2-12AB+36A^2=AB \\ B^2+9A^2=90 \end{cases}$

$\begin{cases} B-6A=\sqrt{AB} \\ 9A^2+B^2=90 \end{cases}$ $\frac{A^2}{10}+\frac{B^2}{90}=1$

A	0	$\pm\sqrt{10}$
B	$\pm 3\sqrt{10}$	0

$\left(\frac{A}{\sqrt{10}}\right)^2+\left(\frac{B}{3\sqrt{10}}\right)^2=1$



$B-6A=\sqrt{AB}$

A	0	1	2	3
B	0	9	18	

$B-6=\sqrt{B}$

$B-\sqrt{AB}-6A=0$

$(\sqrt{B})^2-\sqrt{A}\sqrt{B}-6(\sqrt{A})^2=0$

$B-6A=\sqrt{AB}$

$B-\sqrt{AB}-6A=(\sqrt{B})^2-\sqrt{A}\sqrt{B}-6(\sqrt{A})^2=0$

относ. $\sqrt{B}$ $\quad D=(-\sqrt{A})^2-4\cdot 1(-6A)=A+24A=25A$

$$\sqrt{B}=\frac{\sqrt{A}\pm 5\sqrt{A}}{2}=\left[\begin{array}{l}3\sqrt{A}\to B=9A\\ -2\sqrt{A}\end{array}\right.$$

$A=2\to\sqrt{B}=3\sqrt{2}$

$B=9\cdot 2=18$

$18-6\cdot 2=3\sqrt{2}$

$B-6A=\sqrt{AB}$

$(\sqrt{B}-3\sqrt{A})(\sqrt{B}+2\sqrt{A})=0$

$A=2\quad B-12=\sqrt{2B}=\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=3\cdot 2$

$9\cdot 2-12=3\cdot 2$

$A=3\quad B-3=\sqrt{3B}=\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}=3\cdot 3=9$

$93+\cancel{B}=9$

$A=-1\quad B+6=\sqrt{-1\cdot B}=\sqrt{-1}\cdot(-2\sqrt{-1})=-2$

$\cancel{B\geq -8}\quad -4+6=\sqrt{-1(-4)}=2$

$AB\geq 0$ $\qquad$ если A и $B<0$

$A<0 \quad B-6A\geq 0$

$B<0 \quad B\geq 6A$

$-B+6A=\sqrt{AB}\quad A$ и $B>0$

$6A-\sqrt{AB}-B=0$

$B+\sqrt{AB}-6A=0$

$(\sqrt{B})^2+\sqrt{A}\sqrt{B}-6(\sqrt{A})^2=0$

$D=A-4\cdot 1(-6A)=25A$

$$\sqrt{B}=\frac{-\sqrt{A}\pm 5\sqrt{A}}{2}=\left[\begin{array}{l}2\sqrt{A}\quad B=4A\\ -3\sqrt{A}\end{array}\right.$$

$A=1,\ B=4$

$A=-1\ B=-4$

$-4-6(-1)=\sqrt{-1(-4)}$

$2=2$

$B=4A$

$A=-2\ B=-8$

$-8-6(-2)=\sqrt{(-2)(-8)}$

$4=4$

$$\left\{\begin{array}{l}9A^2+B^2=90\\ \left[\begin{array}{l}B=9A\\ B=4A\end{array}\right.\end{array}\right.$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \frac{-2}{17} \end{cases}$$

$$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\sin\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = \frac{-2}{17}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = \frac{-1}{17}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{17}}\sin 2\beta = \frac{-1}{17}$$

$$\boxed{\sin 2\beta = \frac{\sqrt{17}}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \quad \cos^2 2\beta + \frac{17}{17^2} = 1 \quad \cos^2 2\beta = \frac{16}{17}$$

$$\boxed{\cos 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}}$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{17}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + \cos 2\alpha\,\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{-1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha\left(\frac{-4}{\sqrt{17}}\right) + \cos 2\alpha\,\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{-1}{\sqrt{17}} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ -4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \end{array}\right.$$

~~$2\cos 2\alpha$~~ $4\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$2\cos\alpha(4\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \to tg\,\alpha \text{ не определен} \\ 4\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \quad 4tg\,\alpha + 1 = 0 \quad \boxed{tg\,\alpha = \frac{-1}{4}} \end{array}\right.$$

$4\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + 1 - 2\sin^2\alpha = -1$

$-4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$-4\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$-4\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$2\cos\alpha(-4\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\cos\alpha = 0$

$-4tg\,\alpha = -1 \quad tg\,\alpha = \frac{1}{4}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = \frac{-2}{17}$ $\quad \cos 4\beta = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta$

$\sin 4\beta = 2\sin 2\beta \cos 2\beta$

$\sin 2\alpha\left(\frac{16}{17} - \frac{1}{17}\right) + \cos 2\alpha \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\pm 4}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha = \frac{-2}{17}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{3}{17} \pm \frac{8}{17}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \frac{-2}{17}$

$4\sin 2\alpha \pm 8\cos 2\alpha = -2$

$2\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$

$\left[\begin{array}{l} 4\sin\alpha\cos\alpha + 4(2\cos^2\alpha - 1) = -1 \\ 4\sin\alpha\cos\alpha - 4(2\cos^2\alpha - 1) = -1 \end{array}\right.$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha - 4 + 1 = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha - 3 = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha - 3\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$10\sin\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha - 6\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$

$5\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) - 3\sin\alpha(2\cos\alpha - \sin\alpha) = 0$

$4\,tg\alpha + 5 - 3\,tg^2\alpha = 0$

$3\,tg^2\alpha - 4\,tg\alpha - 5 = 0$

$D = 16 - 4\cdot 3(-5) = 16 + 60 = 76 = (2\sqrt{19})^2$

$tg\alpha = \frac{4 \pm 2\sqrt{19}}{3\cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{19}}{3}$

$\left[\begin{array}{l} 8\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \\ 8\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 3\,tg^2\alpha - 16\,tg\alpha - 5 = 0 \\ 5\,tg^2\alpha + 16\,tg\alpha - 3 = 0 \end{array}\right.$

$D = 16^2 - 4\cdot 3(-5) = \cancel{16\cdot 16} =$

$= 16^2 + 4\cdot 15 = 4(4\cdot 16 + 15) =$

$= 4(64 + 15) = 4\cdot 79$

$tg\alpha = \frac{16 \pm 2\sqrt{79}}{3\cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{79}}{3}$

$D = 16^2 - 4\cdot 5(-3) = 4(4\cdot 16 + 15) =$

$= 4\cdot 79$

$tg\alpha = \frac{-16 \pm 2\sqrt{79}}{5\cdot 2} = \frac{-8 \pm \sqrt{79}}{5}$