МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$$

(1) $3y-2x=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

(2) $3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad | \cdot 3$

$9x^2-18x+9-9+9y^2-12y+4-4=12$

$(3x-3)^2+(3y-2)^2=12+9+4=25=5^2$

Пусть $x-1=a$, $3y-2=b$. $\Rightarrow b-2a=3y-2-2(x-1)=$
$=3y-2x$ $\Rightarrow \begin{cases} (b-2a)=\sqrt{ab} & (1) \\ (3a)^2+b^2=5^2 \end{cases}$

$\underline{b-2a\geq 0}$ (1) $b^2-4ab+4a^2=ab$

$b^2-5ab+4a^2=0$ решим

как квадр. уравн. относительно b.

$D=25a^2-16a^2=(3a)^2 \Rightarrow b_{1,2}=\frac{5a\pm(3a)}{2}$

$b_1=4a$; $b_2=a$

1) $b = a$ или 2) $b = 4a$

1) если $b = a$:

$(3a)^2 + b^2 = 5^2$

$(3a)^2 + a^2 = 5^2$

$10a^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 2{,}5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = \sqrt{2{,}5}\; b_1 = \sqrt{2{,}5} \\ a_2 = -\sqrt{2{,}5};\; b_2 = -\sqrt{2{,}5} \end{array}\right.$

2) если $b = 4a$:

$(3a)^2 + b^2 = 5^2$

$(3a)^2 + (4a)^2 = 5^2 \Rightarrow 25a^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_3 = 1;\; b_3 = 4 \\ a_4 = -1;\; b_4 = -4 \end{array}\right.$

$b - 2a \geq 0$ при $a = \sqrt{2{,}5}$; $b = \sqrt{2{,}5}$:

$b - 2a = \sqrt{2{,}5} - 2 \cdot \sqrt{2{,}5} = -\sqrt{2{,}5} < 0, \Rightarrow \begin{cases} a \neq \sqrt{2{,}5} \\ b \neq \sqrt{2{,}5} \end{cases}$

при $a = -\sqrt{2{,}5}$; $b = -\sqrt{2{,}5}$:

$b - 2a = -\sqrt{2{,}5} + 2 \cdot \sqrt{2{,}5} = \sqrt{2{,}5} > 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\sqrt{2{,}5} \\ b = -\sqrt{2{,}5} \end{cases}$

при $a = 1$; $b = 4$: $b - 2a = 4 - 2 = 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$

при $a = -1$; $b = -4$: $b - 2a = -4 + 2 = -2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ b \neq -4 \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\sqrt{2{,}5} \\ b = -\sqrt{2{,}5} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 = 1 \\ 3y - 2 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 = -\sqrt{2{,}5} \\ 3y - 2 = -\sqrt{2{,}5} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2{,}5} \\ y = \frac{2 - \sqrt{2{,}5}}{3} \end{cases} \end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $(2;2) \cup \left(1-\sqrt{2{,}5};\ \frac{2-\sqrt{2{,}5}}{3}\right)$

N 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} & (2) \end{cases}$$

(1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{8}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow 2\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta = -\frac{8}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-(\cos 2\beta)^2} =$

$= \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

при $\sin 2\beta = +\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$:

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Big| \cdot\sqrt{17}$

$4\sin 2\alpha = -1-\cos 2\alpha = -(1+\cos 2\alpha) = -(1+2\cos^2\alpha-1) =$

$= -2\cos^2\alpha$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$ $\qquad \cos\alpha = 0$ I

$2\cos\alpha(4\sin\alpha+\cos\alpha) = 0 \Rightarrow$ $\cos\alpha = -4\sin\alpha$ II

Ⓘ при $\cos\alpha = 0$ $tg\alpha$ не существует, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\cos\alpha \neq 0$

Ⓘ при $\cos\alpha = -4\sin\alpha$ $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{-4\sin\alpha} = -0,25$

при $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$:

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta =$

$= \frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Big| \cdot \sqrt{17}$

$4\sin 2\alpha = -1 + \cos 2\alpha = -1 + 1 - 2\sin^2\alpha = -2\sin^2\alpha$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha(4\cos\alpha + \sin\alpha) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ \sin\alpha = -4\cos\alpha \end{array}\right.$

при $\sin\alpha = 0$ $tg\alpha = 0$

при $\sin\alpha = -4\cos\alpha$ $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-4\cos\alpha}{\cos\alpha} = -4$

Т.к. значений тангенсов не меньше трех,

$\Rightarrow$ ① $tg\alpha = -0,25$

② $tg\alpha = 0$

③ $tg\alpha = -4$

Ответ: $tg\alpha = -4$; $tg\alpha = -0,25$; $tg\alpha = 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$$x^2+6x>0, \Rightarrow |x^2+6x|=x^2+6x$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geqslant (x^2+6x)^{\log_4 5}$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+(x^2+6x)^{\log_4 4} \geqslant \cancel{\log}\ 5^{\log_4(x^2+6x)}$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)} \geqslant 5^{\log_4(x^2+6x)}$$

ЗАМЕНА: $\log_4(x^2+6x)=t$

$$3^t+4^t \geqslant 5^t$$

Пусть $f(t)=3^t+4^t$, $g(t)=5^t$

$f'(t)=3^t\cdot\ln(3)+4^t\cdot\ln(4)$ $\quad g'(t)=5^t\cdot\ln(5)$

при $5^t \geqslant 3^t+4^t$, $g'(t)=5^t\cdot\ln(5)\geqslant 3^t\cdot\ln(5)+4^t\ln(5)\geqslant$ $> 3^t\ln(3)+4^t\cdot\ln(4)=f'(t) \Rightarrow$ если $g(t)\geqslant f(t)$, то $g'(t)\geqslant f'(t) \Rightarrow$ ~~g(t~~ графики функций $f(t)$ и $g(t)$ пересекаются максимум 1 раз. при $t=2$: $3^2+4^2=5^2$

при $t > 2$, например при $t = 3$:

$3^3 + 4^3 = 27 + 64 < 5^3 = 125 \Rightarrow$

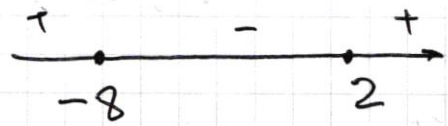
$\Rightarrow$ при $t \geq 2$ $\quad 5^t > 3^t + 4^t$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $t \leq 2$ $\quad 3^t + 4^t \geq 5^t \Rightarrow$

$\Rightarrow t \in (-\infty ; 2] \Rightarrow \log_4 (x^2 + 6x) \leq 2 = \log_4 16$

$x^2 + 6x \leq 16$

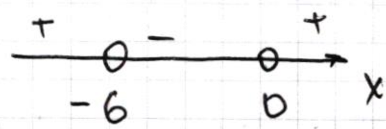
$(x+8)(x-2) \leq 0$



$\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x \in [-8 : 2]$

$x^2 + 6x > 0 \Rightarrow x(x+6) > 0$



$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty ; -6) \cup (0 ; +\infty) \\ x \in [-8 : 2] \end{cases} \Rightarrow x \in [-8 : -6) \cup (0 : 2]$$

Ответ: $x \in [-8 : -6) \cup (0 : 2]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6.

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

$f(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$, $x \neq 1$, $f(x) \neq 2$, т.к. при

$f(x)=2$ $\quad \frac{4x-3}{2x-2} = 2 \Rightarrow -3=-4$

$g(x) = 8x^2-34x+30 = 2(4x-5)(x-3)$

построим графики функций $f(x)$, $g(x)$ при $x \in (1;3]$:

$g(1) = 4$

$g_{min}(x) = g\left(\frac{17}{8}\right) = -\frac{49}{8}$

$g(2) = -6$

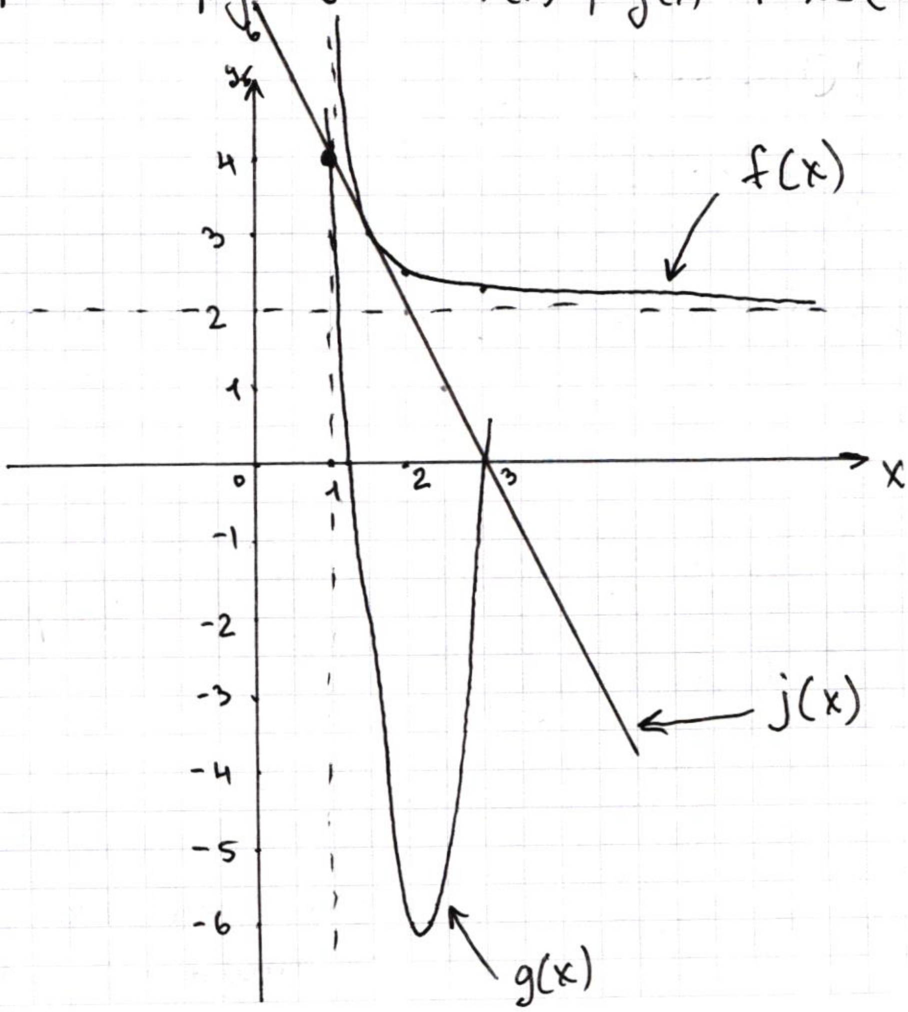
$g(1) = 4$

$g(3) = 0$

$f(2) = \frac{5}{2}$

$f(3) = \frac{9}{4}$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3$



$j(x) = ax + b$ $\quad f(x) \geq j(x) \geq g(x)$ при $x \in (1;3] \Rightarrow$

$\Rightarrow j(1) = a + b \geq 4 = g(4)$ $\quad j\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}a + b \leq 3 = f\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow b \leq 3 - \frac{3}{2}a$

$j(3) = 3a + b \geq 0 = g(3)$

$a \geq 4 - b \Rightarrow \frac{3}{2}a + b \geq \frac{3}{2}(4-b) + b = 6 - \frac{b}{2} \leq 3$ ①

$3a + b \leq 3a + \left(3 - \frac{3}{2}a\right) \geq 0$ ②

① $\frac{b}{2} \geq 3 \Rightarrow b \geq 6$

② $3a + 3 - \frac{3}{2}a \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{2}a \geq -3 \Rightarrow a \geq -2$

$\frac{3}{2}a + b \leq 3 \Rightarrow a \leq \frac{6-2b}{3} \leq \frac{6-2\cdot 6}{3} = -2$

$\Rightarrow \begin{cases} a \leq -2 \\ a \geq -2 \end{cases} \Rightarrow a = -2$

$b \leq 3 - \frac{3}{2}a = 3 - \frac{3}{2}(-2) = 3 + 3 = 6 \Rightarrow \begin{cases} b \leq 6 \\ b \geq 6 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 6$

$\cancel{f'(x) = \frac{4x(2x-2) - 2x(4x-3)}{(2x-2)^2}}$ $\quad$ Ответ: $\left[\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 6 \end{array}\right.$; $(-2;6)$

$\cancel{f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}\cdot 4 - 2\cdot 3\cdot \frac{3}{2}}{1} = \frac{6-9}{1}} = -3$

$f'(x) = \frac{4(2x-2) - 2(4x-3)}{(2x-2)^2} = \frac{-2}{(2x-2)^2}$ $\quad f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-2}{1^2} = -2 = j'\left(\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow$ т.к. $f\left(\frac{3}{2}\right) = j\left(\frac{3}{2}\right)$, то ~~гр~~ графики функций $f(x)$ и $j(x)$ касаются при $x = \frac{3}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

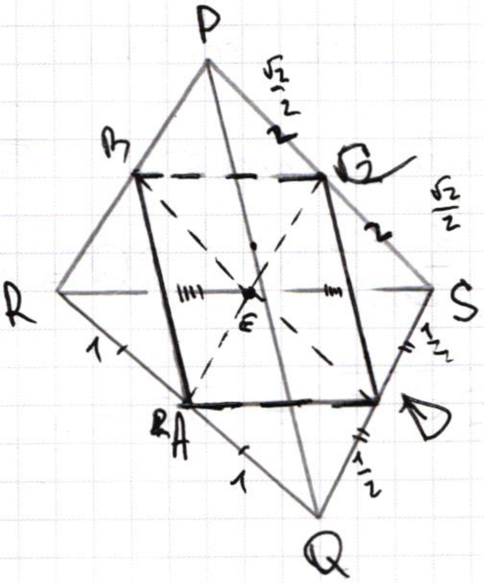
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.



Дано:
P, A, B, C, D, E лежат на одной сфере
$QR = 2$
$QS = 1$
$PS = \sqrt{2}$

Найти:
$RS - ?$
$R_{min} - ?$

Решение:

$AD \parallel RS$ и $BC \parallel RS$ т.к. AD – средн. линия $\triangle QRS$, BC – сред. линия $\triangle RPS$, $AB \parallel CD \parallel PQ$ т.к. AB – сред. линия $\triangle RPQ$, CD – сред. линия $\triangle PSQ$. $\Rightarrow ABCD$ – параллелограмм, а т.к. все его точки равноудалены от центра сферы, $\Rightarrow$ вокруг $ABCD$ можно описать окружность. $\Rightarrow \angle BAD + \angle BCD = 180° = \angle CBA + \angle ADC$, а т.к. $ABCD$ – параллелограмм, $\Rightarrow \angle BAD = \angle BCD$, $\angle ABC = \angle ADC$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90°$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow ABCD$ - прямоугольник.

Рассмотрим фигуру $ABCDE$. Это пирамида с основанием $ABCD$ - прямоугольником, вокруг нее можно описать сферу, т.к. по условию все точки $ABCDE$ лежат на одной сфере. ~~⇔~~

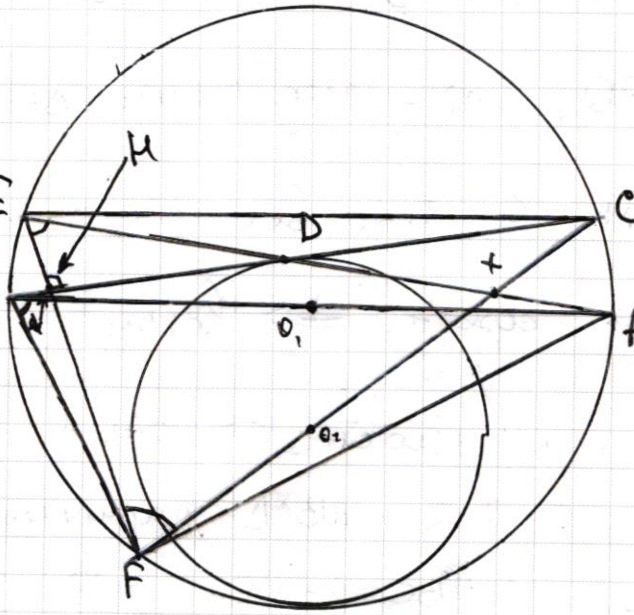
~~A ⇒ AE = EQ~~ $AE = \frac{1}{2}QS = \frac{1}{2}$; $ED = \frac{1}{2}RQ = 1$,

$$QE = \frac{1}{2}\sqrt{(RQ^2 + QS^2 - RS^2)} = PS = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{4 + 1 - RS^2}$$

~~$RS = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$~~ $RS = \sqrt{3}$

N4.



$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{12}$

$EH \perp BC$

$EH \perp BC$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим ΔBFA и ΔCHF:

$\angle CHF = 90^\circ$, а т.к. AB - диаметр, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BFA = 90^\circ$ $\angle HCF = \angle BAF$ т.к. они

оба опираются на ~~равн~~ дугу $\smile BF$.

$\Rightarrow \angle HFC = \angle EFC = \angle FBA = 180^\circ - 90^\circ - \angle BAF \Rightarrow$

$\Rightarrow$ дуга $\smile EC = \smile AF \Rightarrow EC = AF$

Пусть $EA \cap FC = X$ $\angle XEF = \angle XFE \Rightarrow$

$\Rightarrow EX = XF$. т.к. $AF = EC$, $\angle EXC =$

$= \angle AXF$, $EX = XF$, $\angle ECX = \angle XAF$ ~~и данные Δ~~

~~вписаны в одну окружн.~~ $\Rightarrow \Delta EXC =$

$= \Delta FXA$ $\Rightarrow FC = EA = \angle EFA = \angle FEC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CED = \angle AFX$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$$

$$9y^2-12xy+3y+4x^2-3xy-2x+4x-2$$

$$\cancel{3y(3y-4x+1)-2x(}$$

$16-12x=0$

$x=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$

$$\begin{cases}(3y-2x)^2=(x-1)(3y-2)\\ \end{cases}$$

$$3y-2=\frac{3y-2x}{x-1}$$

$$3x^2-6x+3+3y^2-4y+\frac{4}{3}-\frac{13}{3}=4$$

$$3x^2-6x+3+3y^2-4y+\frac{4}{3}=\frac{25}{3}\quad \Big|\cdot 3$$

$$9x^2-18x+9+9y^2-12y+4=25$$

$$(3x-3)^2+(3y-2)^2=5^2$$

$3y-2-2x+2=0$

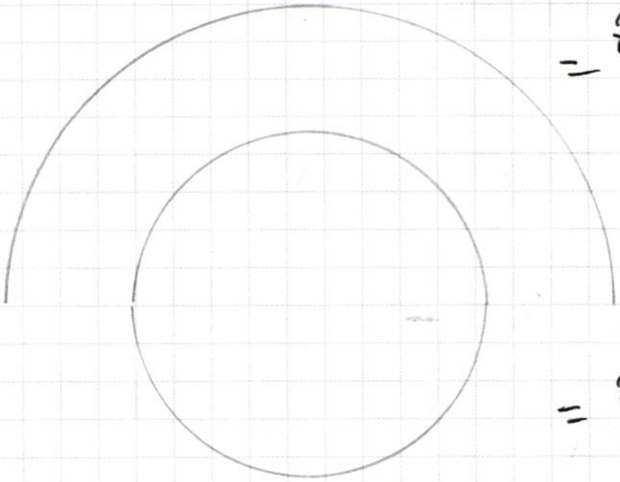
$$x-1=a \qquad 3y-2=b$$

$$3y-2x=b-2a$$

$$(b-2a)^2=ab$$

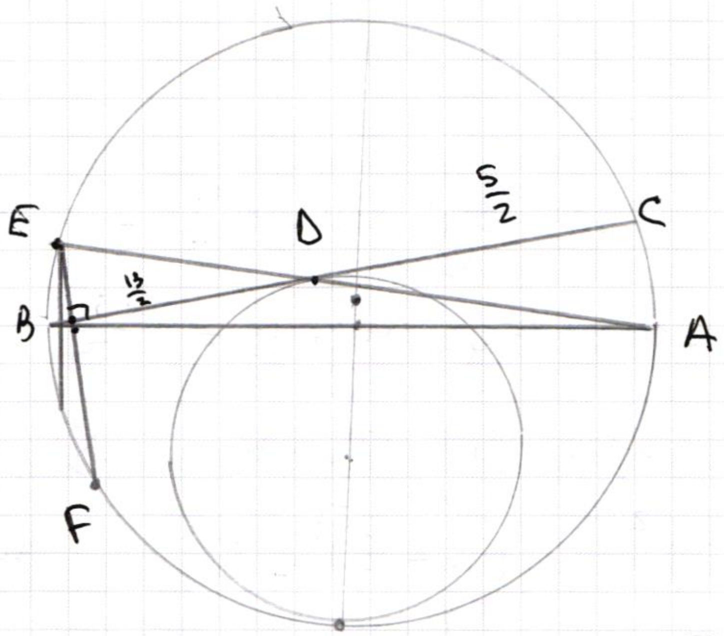
$$(3a)^2+b^2=5^2$$

$$\left(\frac{4x-3}{2x-2}\right)' = \cancel{\frac{4(2x-2)-2x(4x-3)}{(2x-2)^2}} = \cancel{\frac{8x-4x-8x+6x}{}}$$

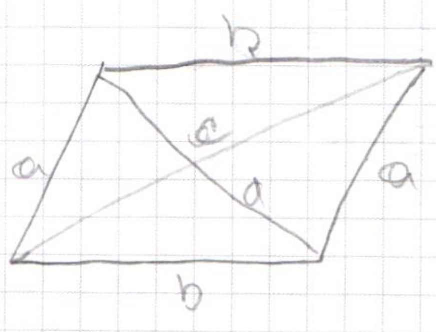


$$\frac{4(2x-2)-2(4x-3)}{(2x-2)^2} =$$

$$= \frac{8x-8-8x+6}{(2x-2)^2} = \frac{-2}{(2x-2)^2}$$



$$\frac{4,3}{3,0} = \frac{5}{3,5}$$



$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha$

$d^2 = a^2+b^2+2ab$

$c^2+d^2 = a^2+b^2$

$\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2-d^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(3x-1)^2+(3y-\frac{2}{3})^2=(\frac{7}{3})^2 \quad |:9$

$(x-\frac{1}{3})^2+(y-\frac{2}{3})^2=(\frac{7}{9})^2$

$289-240=49$

$x=\frac{17\pm7}{8}=3$

$\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$

$(3y-2x)^2=(3y-2)(x-1)$

$\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b\geq 8x^2-34x+30$

$\frac{4x-3}{2x-2}\geq 8x^2-34x+30=2(4x^2-17x+15)=$

$=2(4x-5)(x-3)$

$x_B=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}$

$\frac{4x-3}{2(x-1)}=g(x)$

$f(1)=8-34+30=4$

$f(3)=72+30-102=$

$=0$

$g(1)=+\infty$

$g(3)=\frac{9}{4}$

$f(\frac{17}{8})=8\cdot\frac{289}{64}-\frac{2\cdot17\cdot17}{8}+$

$+30=\frac{289}{8}-\frac{2\cdot289}{8}+30=$

$=-\frac{289}{8}+30=\frac{240-289}{8}=$

$=-\frac{49}{8}$

$g(2)=\frac{5}{2}$

$\frac{3}{1}=3$

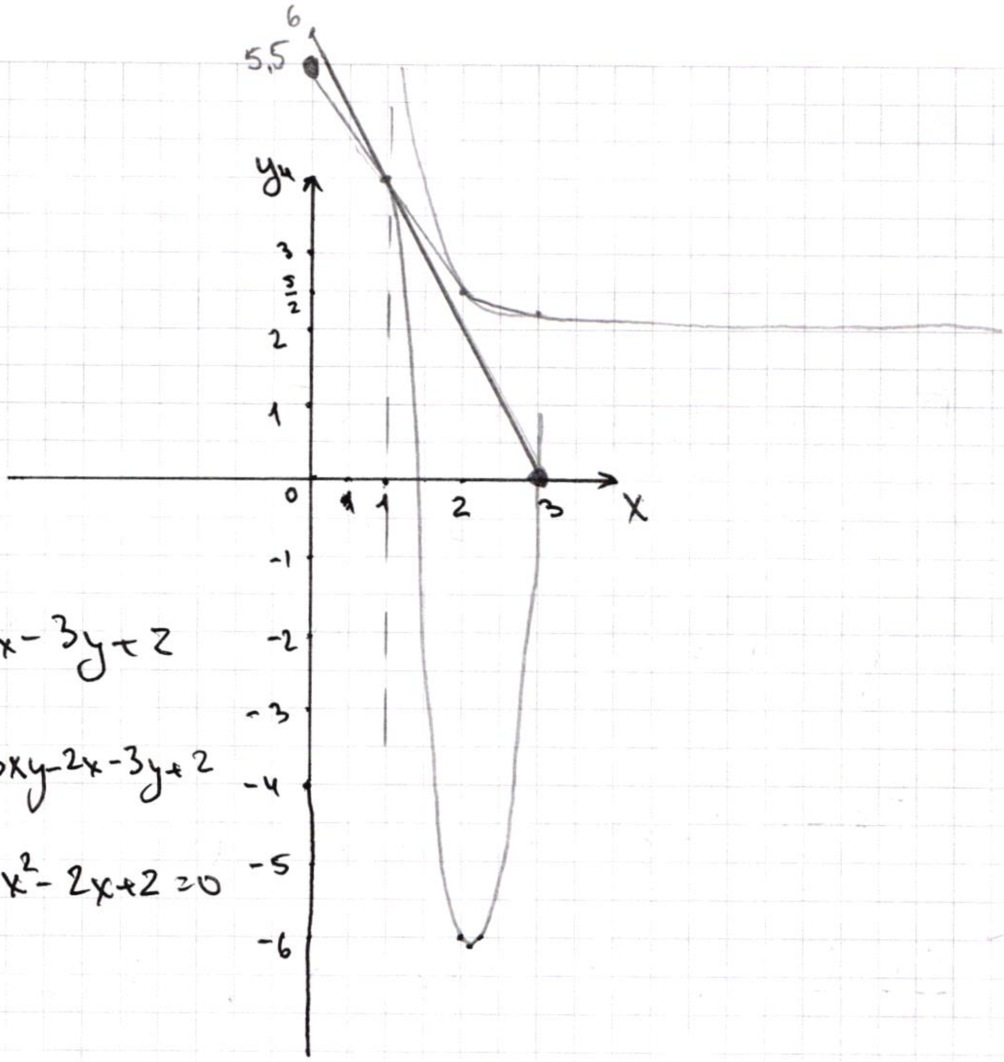
$f(2)=32+30-68=-6$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$(3y-2x)(3y-2x)$

$(3y-2x)^2 = 3xy-2x-3y+2$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2-15xy+3y+4x^2-2x+2=0$

$a = -\frac{3}{2}$

$f'(x) = \frac{4x(2x-2)-2x(4x-3)}{(2x-2)^2}$

$f'(2) = \frac{2\cdot 2 - 2\cdot 5}{2^2} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

$5{,}5 \le b \le 6$

$-2 \le a \le -\frac{3}{2}$

$\frac{8\cdot 2 - 4\cdot 5}{4} =$

$= -1$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 = 2\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\cdot\cos\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{8\sqrt{17}}{2\cdot 17} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$\cancel{\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 \Rightarrow 2\cos^2\beta = \frac{4\sqrt{17}+17}{17}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17} \qquad \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16\cdot 17}{17^2}} =$$

$$= \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & ① \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & ② \end{cases}$$

$2\cdot 3\cdot x=4$

$x=\frac{2}{3}$

② $3x^2-6x+1+3y^2-4y+\left(\frac{2}{3}\right)^2-$

$-1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=4$

$$(3x-1)^2+\left(3y-\frac{2}{3}\right)^2=5+\frac{4}{9}=\frac{49}{9}=\left(\frac{7}{3}\right)^2$$

① $3y-2x\geq 0$, $3xy-2x-3y+2\geq 0$

$$(3y-2x)^2=3xy-2x-3y+2$$

$$\cancel{9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2}$$

$$(3y-2x)^2=3y(x-1)-2(x-1)=(3y-2)(x-1)$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$x^2+6x=t$, $t>0\Rightarrow|t|=t$

$$3^{\log_4(t)}+t\geq t^{\log_4 5}$$

$$t^{\log_4 3}-t^{\log_4 5}+t^{\log_4 4}\geq 0$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad R = \frac{p}{n}$

$f(p) = [p/4]$ пусть $a = 2$, $b = 3$

$\Rightarrow$ ~~f(b~~ $f(a) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$

$f(b) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(6) = 0$ $\quad a = 5$; $b = 7$

$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$; $f(7) = 1$

$f(35) = 2$ $\quad \frac{1}{9} \le \frac{x}{y} \le 9$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

при $\sin 2\beta > 0 = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{4\sqrt{17}}{17} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{4\sqrt{17}}{17}\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}(1+\cos 2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}(1+2\cos^2\alpha - 1) =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{17}}\cos^2\alpha$$

$$\frac{8}{\sqrt{17}}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{2}{\sqrt{17}}\cos^2\alpha = 0 \;\Big|\, : \cos\alpha, \text{т.к.}$$

$\cos\alpha \neq 0$

$$\frac{8}{\sqrt{17}}\sin\alpha + \frac{2}{\sqrt{17}}\cos\alpha = 0 \quad \Big|\cdot \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$4\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -4\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{-4\sin\alpha} = -\frac{1}{4}$$

$1-\cos 2\alpha =$
$= 1-(1-2\sin^2\alpha) = 2\sin^2\alpha$

при $\sin 2\beta < 0 = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}(1 - \cos 2\alpha) = -\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\sin^2\alpha$$

$$\frac{8}{\sqrt{17}}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{2}{\sqrt{17}}\sin^2\alpha = 0 \Big|\cdot\frac{\sqrt{17}}{2}$$

1) $\sin\alpha = 0$

$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = 0}$

$$4\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = -4\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-4\cos\alpha}{\cos\alpha} = \boxed{-4}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t^{\log_4 4}(1+t^{\log_4(\frac{3}{4})}-t$

$\log_4 4+\log_4 z=\log_4 3$

$4z=3 \Rightarrow z=\frac{3}{4}$

$\log_4 3+\log_4 z=\log_4 5$

$3z=5 \Rightarrow z=\frac{5}{3}$

$3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t}-5^{\log_4 t}\geq 0$

$\log_4 t=d$

$f(d)=3^d+4^d \geq 5^d=g(x)$ $\quad 5^d\cdot\ln(d)$

$f'(d)=3^d\cdot\ln(d)+4^d\cdot\ln(d)$ $\quad g'(d)=5^d\cdot\ln(d)$

т.к. если $5^d\geq 3^d+4^d$, то и

$g'(d)\geq f'(d)$ $\Rightarrow$ и если $5^d\leq 3^d+4^d$,

то и $f'(d)\geq g'(d) \Rightarrow$ функции

$f(d)$ и $g(d)$ пересек. в 1 точке.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$3^2+4^2=5^2 \Rightarrow$ при $d<2$,

например при $d=1$

$3^1+4^1>5^1 \Rightarrow d\le 2$

при $d\ge 2$ $3^3+4^4<5^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{d\le 2}$ $\log_4 t \le 2=\log_4 16$

$\cancel{\log_4 t-\log_4 16\le 0}$

$\cancel{\log_4\left(\frac{t}{16}\right)\le 0 \Rightarrow \frac{t}{}}$

$t\le 16 \Rightarrow$ т.к. $t>0, \Rightarrow t\in(0:16]$

$x^2+6x\in(0:16]$

$0<x^2+6x\le 16$ $\quad {+}^{36}_{64}$

$x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$\overset{+}{}\;-6\;\overset{-}{}\;0\;\overset{+}{}\; x$

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$x^2+6x\le 16$

$x^2+6x-16\le 0$

$(x+8)(x-2)\le 0$

$\overset{+}{}\;-8\;\overset{-}{}\;2\;\overset{+}{}\; x$

$\boxed{x\in[-8;-6)\cup(0;2]} \Leftarrow \begin{cases} x\in[-8:2] \\ x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty) \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА