МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leqslant ax+b \leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

Решить н-во: $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 18x - |x^2+18x|^{\log_{12}13} + 5^{\log_{12}(x^2+18x)} \geqslant 0$

Пусть $t = x^2 + 18x$.
т.к. $\log_{12}(x^2+18x)$ существует, то $x^2 + 18x = t > 0$

$t - |t|^{\log_{12}13} + 5^{\log_{12}t} \geqslant 0 \overset{\text{т.к. } t>0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow t - t^{\log_{12}13} + 5^{\log_{12}t} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$5^{\log_{12}t} = \left(12^{\log_{12}5}\right)^{\log_{12}t} = t^{\log_{12}5}$

$\Leftrightarrow t + t^{\log_{12}5} \geqslant t^{\log_{12}13} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^{\log_{12}12} + t^{\log_{12}5} \geqslant t^{\log_{12}13}$

т.к. $t > 0$, то и $t^{\log_{12}13} > 0$. Тогда можем разделить на $t^{\log_{12}13}$, не теряя равносильности:

$t^{\log_{12}\frac{12}{13}} + t^{\log_{12}\frac{5}{13}} \geqslant 1$

$t^{\log_{12}\frac{12}{13}} = \left(12^{\log_{12}t}\right)^{\log_{12}\frac{12}{13}} = \left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}t}$. Аналогично $t^{\log_{12}\frac{5}{13}} = \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}t}$. Получим:

$\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}t} + \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}t} \geqslant 1$ ⊛

Заметим, что при $\log_{12}t = 2$ достигается равенство: $\frac{144}{169} + \frac{25}{169} = 1$.

Функции $f_1(x) = \left(\frac{12}{13}\right)^x$ и $f_2(x) = \left(\frac{5}{13}\right)^x$ монотонно убывают, т.к. $\frac{12}{13} < 1$ и $\frac{5}{13} < 1$. Тогда и $g(x) = \left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x = f_1(x) + f_2(x)$ монотонно убывает, как сумма монотонно убывающих. Тогда ⊛ верно при

$\log_{12} t \leq 2$
$t \leq 12^2$
$x^2 + 18x - 144 \leq 0$
$(x+24)(x-6) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-24; 6]$

Также должно выполнятся условие $t > 0$

$x^2 + 18x > 0$

$x(x+18) > 0 \iff x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

Получаем с-му:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-24; 6] \end{cases} \iff x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$$

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

№ 1

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (1); $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ (2)

Из (1): $\cos(2\alpha + 2\beta) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(2\alpha + 2\beta)} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

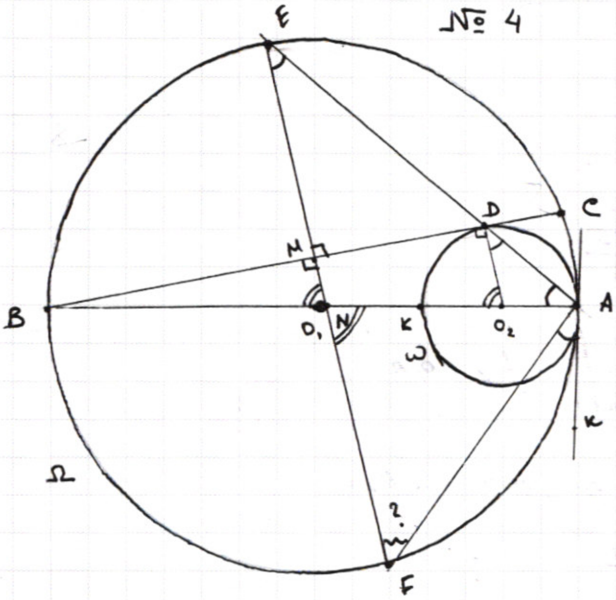
Преобразуем (2):

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \sin(4\alpha + 4\beta - 2\alpha) + \sin 2\alpha =$$
$$= \sin(4\alpha + 4\beta)\cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cos(4\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



Дано: окр. Ω
$\Omega \cap \omega = A$ - вн. кас.
AB - диаметр Ω
BC - хорда Ω, $BC \cap \omega = D$
$[AD) \cap \Omega = E$ - повт.
(EF) (BC), $(EF) \cap \Omega = F$ - повт., CD = 8, BD = 17

Найти: R - радиус Ω
r - радиус ω
$\angle AFE$ - ?
$S_{\triangle AFE}$

Решение:

1 Рассмотрим $\triangle DO_2A$ и $\triangle ENA$, где $N = (EF) \cap (AB)$.
Т.к. AB - диаметр Ω через точку касания, то если $K = (AB) \cap \omega$ повторно, то AK - диаметр ω, т.о. $O_2 \in (AB)$.
$(DO_2) \perp (BC)$ и $(EN) \perp (BC)$. Тогда $(DO_2) \parallel (EN)$. Тогда $\triangle DO_2A \sim \triangle ENA$ (угол пересекают две параллельные прямые).
$DO_2 = O_2A$ - радиусы ω. Тогда и $EN = NA$.
Тогда $\angle AEN = \angle EAN$.
Также $\angle AEN = \frac{1}{2} \smile AF$, как вписанный в Ω угол.
Проведём (AK) - касательная к Ω и ω в точке A.
$\angle BAK = 90°$ (радиус в точку касания).
$\angle FAK = \frac{1}{2} \smile AF$ - угол между хордой и касательной.

т.е. $\angle FAK = \angle AEN = \angle EAN = \frac{1}{2} \smile AF$
Тогда $\angle EAF = \angle EAN + \angle NAF = \angle NAF + \angle FAK = 90°$
$\angle EAF = 90°$ и он вписанный. т.о. EF - диаметр Ω, $N = O_1$.

2. Рассмотрим $\triangle BDO_2$. В нём: $BD = 17$, $DO_2 = r$, $BO_2 = 2R - r$ и $\angle BDO_2 = 90°$ (радиус в точку касания).
Тогда по теореме Пифагора: $17^2 + r^2 = (2R - r)^2$ (1)

$\angle DBO_2$ пересекают $(EF) \parallel (DO_2)$. Тогда $\triangle BMO_1 \sim \triangle BDO_2$ ($M = (BC) \cap (EF)$)
Тогда: $\frac{17}{2R-r} = \frac{|BM|}{R}$

$|BM| = \frac{17+8}{2} = 12,5$, т.к. диаметр - сер. перпендикуляр к хорде.

Получим: $\frac{17}{2R-r} = \frac{12,5}{R}$

$25R - 12,5r = 17R$

$12,5r = 8R \Rightarrow 25r = 16R \Rightarrow R = \frac{25}{16}r$

Подставим в (1): $17^2 + r^2 = \left(\frac{50}{16}r - r\right)^2$

$17^2 + r^2 = \left(\frac{34}{16}r\right)^2$

$17^2 = r^2 \cdot \frac{34^2 - 16^2}{16^2} = r^2 \cdot \frac{17^2 - 8^2}{8^2}$

$r^2 = \frac{17^2 \cdot 8^2}{17^2 - 8^2} = \frac{17^2 \cdot 8^2}{25 \cdot 9}$

$r = \frac{17 \cdot 8}{5 \cdot 3} = \frac{136}{15}$

$R = \frac{25}{16}r = \frac{25}{16} \cdot \frac{136}{15} = \frac{5 \cdot 17}{2 \cdot 3} = \frac{85}{6}$

3. $\angle AFE$.

$\triangle O_1FA$ - равнобедр. тогда $\angle AFE = 90° - \frac{1}{2}\angle FO_1A$

$\angle FO_1A = \angle BO_1E$ - вертикальные углы.

$\angle BO_1E = \angle BO_1M$.

~~$\triangle BO_1M \sim \triangle BO_2D$ (п. 2), тогда $\angle BO_1M = \angle BO_2D$.~~

~~т.е. $\angle AFE = 90° - \frac{1}{2}\angle BO_2D$~~

~~тогда $\sin\angle BO_2D = \frac{17}{2R-r}$ из $\triangle BO_2D$~~

Из $\triangle BO_1M$ $\sin\angle BO_1M$: $\frac{12,5}{R} = \frac{12,5 \cdot 6}{85} = \frac{75}{85} = \frac{15}{17}$

$\angle AFE = 90° - \frac{1}{2}\angle FO_1A = 90° - \frac{1}{2}\angle BO_1M$

тогда $\sin\angle AFE = \cos(\frac{1}{2}\angle BO_1M)$.

$\cos^2(\frac{1}{2}\angle BO_1M) = \frac{\cos\angle BO_1M + 1}{2}$.

$\cos\angle BO_1M = \pm\sqrt{1 - \sin^2\angle BO_1M} = \pm\frac{8}{17}$. В задаче $0 \le \angle BO_1M \le 90°$. Тогда $\cos\angle BO_1M > 0$ и $\cos\angle BO_1M = \frac{8}{17}$

Аналогично $\cos(\frac{1}{2}\angle BO_1M) > 0$. т.о.:

$\cos(\frac{1}{2}\angle BO_1M) = \sqrt{\frac{\frac{8}{17}+1}{2}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

т.е. $\sin\angle AFE = \frac{5}{\sqrt{34}}$. т.о. $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$

4. $S_{\triangle AFE}$.

$S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2}|AF| \cdot |EF| \cdot \sin\angle AFE$.

$|EF| = 2R = \frac{85}{3}$; ~~$|AF| =$~~

Из $\triangle AFO_1$: $|AF| = 2 \cdot R \cdot \cos\angle AFE$

$\cos\angle AFE > 0$ (как в п. 3). $\cos\angle AFE = \sqrt{1 - \sin^2\angle AFE} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$|AF| = 2 \cdot \frac{85}{6} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{85}{\sqrt{34}}$

т.о. $S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{85}{3} \cdot \frac{85}{\sqrt{34}} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{85^2 \cdot 5}{34 \cdot 6} = \frac{36155}{204}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $r = \frac{136}{15}$; $R = \frac{85}{6}$; $\angle AFE = \arcsin \frac{5}{\sqrt{34}}$;

$$S_{\triangle AFE} = \frac{85^2 \cdot 5}{34 \cdot 6} = \frac{36155}{204}$$

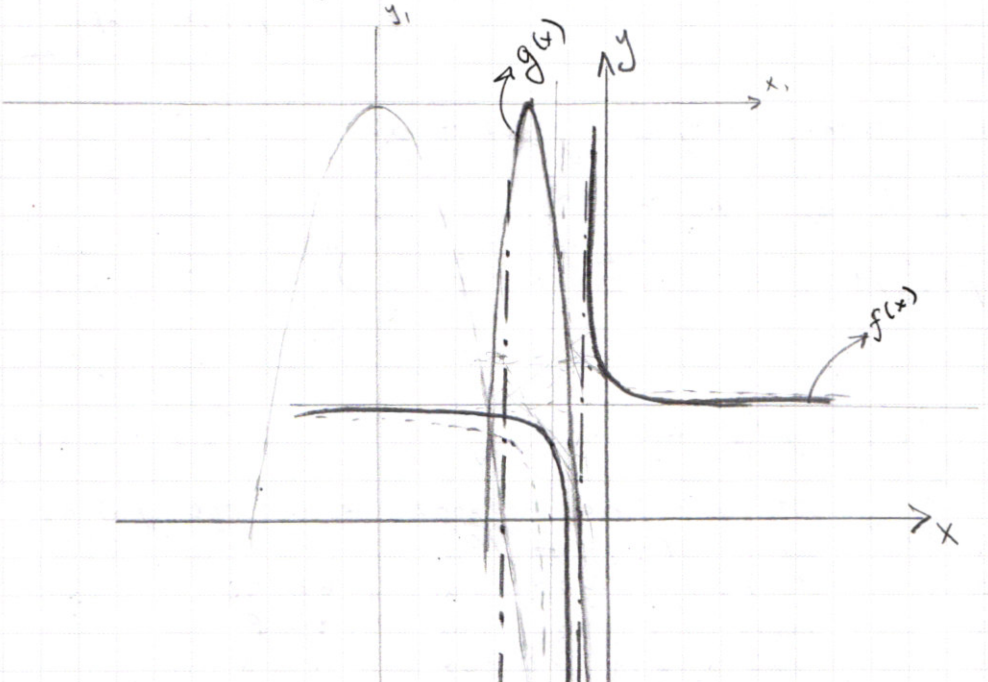
№ 6.

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax + b \le -8x^2 - 30x - 17 \quad ⊛$$

Пусть $f(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{1}{2x + 1{,}5}$

$$g(x) = -8x^2 - 30x - 17 = -(2\sqrt{2}\,X + \frac{17}{2\sqrt{2}}) + \frac{89}{8}$$

Сделаем набросок графиков $f(x)$ и $g(x)$, воспользовавшись правилами преобразования графиков:



Чтобы выполнялось ⊛, надо, чтобы функция $\varphi(x)$ проходила выше $f(x)$ и ниже $g(x)$

№ 5.

Известно, что $f(ab) = f(a) + f(b)$, $f(p) = \left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$ и $f(x)$ определена на множестве полож. рацион. чисел.

1. $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$.

~~2. Рассмотрим $f(x)$. $1 \le x \le 24$. Для любого из этих x можно узнать $f(x)$.~~

~~2. $f(p) = \left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil \Rightarrow f$~~

2. Пусть есть некоторое $f(k)$. $k = \frac{p \cdot k}{p}$ (p - простое)

$\cancel{f(k)} = f(p) + \cancel{f(k)} + f\left(\frac{1}{p}\right)$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = -f(p) = -\left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$

также $f(1) = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right) = 0$

3. Заметим, что $f(x) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots$ ($x = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots$)
p_1, p_2 - прост. числа.

$f(x) = \left\lceil \frac{p_1}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{p_2}{4} \right\rceil + \ldots$

$p_1, p_2 \ldots$ — пол. числа, тогда $f(x) \ge 0$

$y = k_1 \cdot k_2 \ldots$, где k_1, k_2 - пр. числа

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{k_1}\right) + f\left(\frac{1}{k_2}\right) + \ldots = -\left(\left\lceil \frac{k_1}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{k_2}{4} \right\rceil \ldots\right)$.

т.е. $f\left(\frac{1}{y}\right) \le 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \iff f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \iff f(x) < -f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y)$

$f(1) = 0$
$f(2) = 0$
$f(3) = 0$
$f(4) = 0$
$f(5) = 1$
$f(6) = 0$
$f(7) = 1$
$f(8) = 0$
$f(9) = 0$
$f(10) = 1$
$f(11) = 2$
$f(12) = 0$
$f(13) = 3$

$f(14) = 1$
$f(15) = 1$
$f(16) = 0$
$f(17) = 4$
$f(18) = 0$
$f(19) = 4$
$f(20) = 1$
$f(21) = 1$
$f(22) = 2$
$f(23) = 5$
$f(24) = 0$

← получим, применяя данные в условии св-ва и раскладывая аргумент на множители.

→ Тогда нам подходят пары, где $f(x) = 0$; и $f(y) > 0$
их : $11 \cdot 13 = 143$
$f(x) = 1$, $f(y) > 1$, их: $7 \cdot 6 = 42$
$f(x) = 2$, $f(y) > 2$, их: $2 \cdot 4 = 8$
$f(x) = 3$, $f(y) > 3$, их: $1 \cdot 3 = 3$
$f(x) = 4$, $f(y) > 4$, их $2 \cdot 1 = 2$

Тогда всего пар: $42 + 8 + 3 + 2 = 55$

$\boxed{\text{Ответ: } 55}$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

✓ $\sin(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$,

$\cos(\alpha+\beta) = \pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}$

$\cos(\alpha+\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(\alpha+2\beta) + \sin\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(\alpha+\beta)\cos\beta + \sin\beta\cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2(\alpha+\beta))\cos\alpha - \sin\alpha\cos(2(\alpha+\beta)) + \sin\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2(\alpha+\beta)) - \operatorname{tg}\alpha\cos(2\alpha+\beta) + \operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha(1-\cos(2\alpha+2\beta)) = -\frac{4}{5} - \sin(2\alpha+2\beta)$

$\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{\frac{4}{5}+\sin(2\alpha+2\beta)}{\cos(2\alpha+2\beta)-1}$

$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(4\alpha+4\beta)\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cos(4\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(4\alpha+4\beta) - \operatorname{tg}2\alpha\cos(4\alpha+4\beta) + \operatorname{tg}2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}60° = \sqrt{3}$

$\operatorname{tg}30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}$

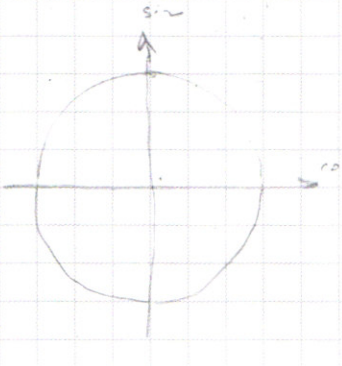
$\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{\frac{4}{5}+\sin(4\alpha+4\beta)}{1-\cos(4\alpha+4\beta)} = -\frac{\frac{4}{5}+2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha+2\beta)}{2\sin^2(2\alpha+2\beta))}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{\frac{4}{5}+2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{2\cdot\frac{1}{5}} = -\frac{\frac{4}{5}\pm\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}}$

$\operatorname{tg}2\alpha = 0$ или $\operatorname{tg}2\alpha = -4$

$\operatorname{tg}\alpha = 0$



$2\operatorname{tg}\alpha = -4(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$

$4\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 4 = 0$

$2\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2 = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+4} = \frac{1}{2} \pm$

$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4y^2-4xy = xy-x-2y+2 \\ (x-2)^2-4+(3y-3)^2-9 = 12 \\ x-2y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4y^2-5xy+x+2y-2 = 0 \\ (x-2)^2+9(y-1)^2 = 25 \\ x-2y \geq 0 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x - |x^2+18x|^{\log_{12}13} + 5^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq 0$

Пусть $t = x^2 + 18^x$

$t > 0$

$t - |t|^{\log_{12}13} + 5^{\log_{12}t} \geq 0$

$5^{\log_{12}t} \geq |t|^{\log_{12}13} - t$

$\left(12^{\log_{12}5}\right)^{\log_{12}t} \geq |t|^{\log_{12}13} - t$

$t^{\log_{12}5} - |t|^{\log_{12}13} + t \geq 0$

$t^{\log_{12}5} + t^{\log_{12}12} \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}\frac{5}{13}} + t^{\log_{12}\frac{12}{13}} \geq 1$

$12^{\log_{12}t \ldots} + 12^{\log_{12}t \ldots} \geq 1$

$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}t} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}t} \geq 1$

При $\log_{12}t = 2$ $\boxed{=}$.

$\log_{12}t \cancel{\geq} 2$

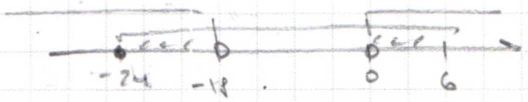
$\log_{12}(x^2+18x) \cancel{\geq} 2$

$x^2+18x \cancel{\geq} 144$

$x^2 + 18x - 144 \leq 0$

$D/4 = 81 + 144 = 225 = 15^2$

$(x+24)(x-6) = 0$



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$

$\operatorname{tg}^2\alpha(1-\sin^2\alpha) = \sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$17 \times 15 = 3^2$

$\times \begin{array}{r}33\\33\end{array}$

$\begin{array}{r}6\\ \times 18\\ 8\\ \hline 144\end{array}$

$\times \begin{array}{r}18\\6\end{array}$

$\begin{array}{r}5\\ \times 17\\ 8\\ \hline 136\end{array}$

$144 \mid 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

24×6

$24 - C$

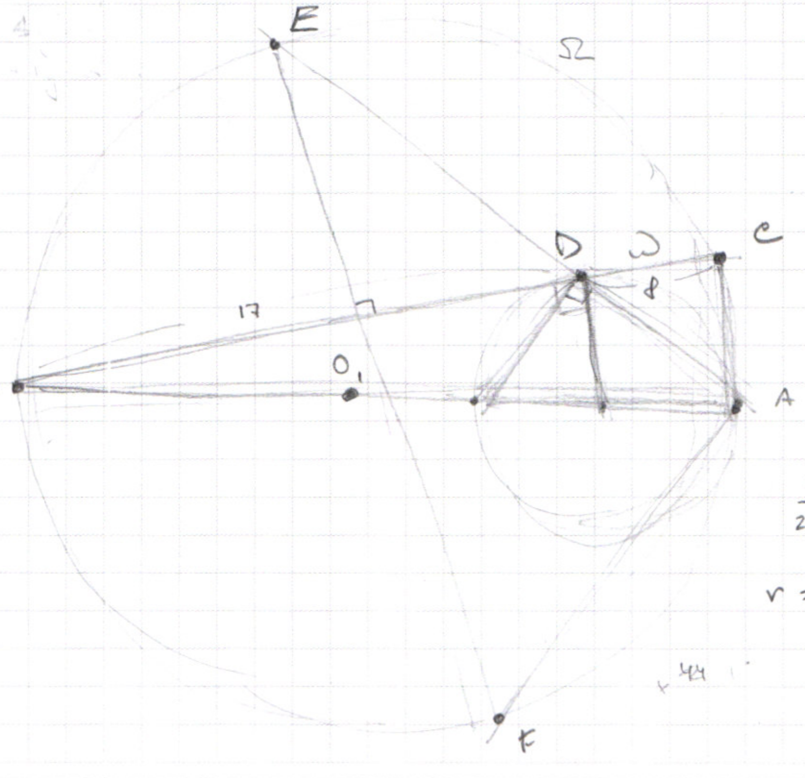
$\frac{12,5}{r}$ = $\frac{12,5}{8^5}$ 6;

$\frac{7^5}{}$

=

R, r, $\angle AFE$

$r^2 + 17^2 = (2R - r)^2$



$17^2 + r^2 = \left(\frac{66}{16}r\right)^2$

$17^2 = \frac{66^2-16^2}{16^2}r =$

$= \frac{33^2-8^2}{8^2}r^2$

$\frac{17^2 \cdot 8^2}{25 \cdot 41} = r^2$

$r = \frac{8 \cdot 17}{5\sqrt{41}}$

$\frac{5 \cdot 34}{4 \cdot 3} =$

$= \frac{5 \cdot 17}{2 \cdot 3}$

+44

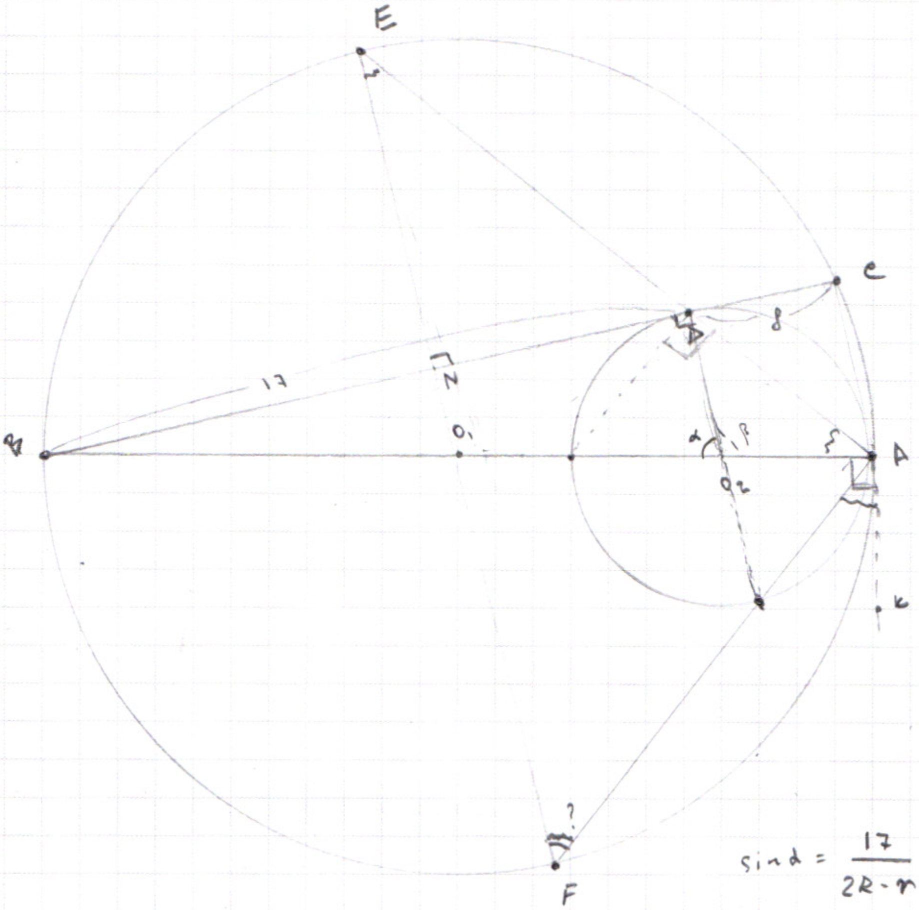
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{array}{r} {}^{2} \\ \times\, 85 \\ 15 \\ \hline 425 \\ 85 \\ \hline 1275 \\ -\ 408 \\ \hline 867 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 136 \\ 3 \\ \hline 408 \end{array}$$

$\sin\alpha = \dfrac{17}{2R-r}$ $\qquad \dfrac{17\cdot 45}{876}$

$\alpha = \arcsin k$

$$\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 45 \\ \hline 85 \\ 68 \\ \hline \end{array} \qquad 765$$

1. Из $\triangle ODB$ $\quad r^2 + 17^2 = (2R-r)^2$

$\cancel{r^2} + 17^2 = 4R^2 + 4Rr + \cancel{r^2}$

$4R^2 + 4Rr = 17^2$

$\cos 2\alpha = \sqrt{1-\sin^2 2\alpha} =$

$=$

$\dfrac{}{2R-r} = \dfrac{}{2\ 17} = \dfrac{}{17}$

$17R = 12{,}5\,(2R-r) \Rightarrow 17R = 25R - 12{,}5r \Rightarrow 12{,}5r = 8R$

$\dfrac{17^2-4R^2}{4R}\cdot 12{,}5 = 8R$

$(17^2 - 4R^2)\cdot 12{,}5 = 32R^2$

$25\cdot 17^2 - 4R^2\cdot 25 = 64R^2$

$25\ 17^2 = 164R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{25\ 17^2}{164}} = \dfrac{17\cdot 5}{2\cdot\sqrt{41}}$

$r = \dfrac{16}{25}\cdot \ldots = \dfrac{16\cdot 17}{10\sqrt{41}}$

$\sin 2\alpha$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{-\cos 2\alpha + 1}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

$\dfrac{170}{6} - \dfrac{136}{15} = \dfrac{170\cdot 15 - 136\cdot 6}{15\cdot 6}$ $\quad \dfrac{765}{876} =$

$= \dfrac{85}{3} - \dfrac{136}{15} = \dfrac{85\cdot 15 - 136\cdot 3}{3\cdot 15} =$

$=$ $\qquad = \dfrac{255}{292} = k$

$292^2 - 255^2 =$

$\sin\beta = k$ $\qquad = 547\cdot 37$

$\sin\frac{\beta}{2} = \cos\gamma$

$\beta = \arcsin k$

$\gamma = \frac{1}{2}\arcsin k$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{17}+1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{8+17}{34}} = \pm\sqrt{\frac{25}{34}} = \pm\frac{5}{\sqrt{34}}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{-\cos 2\alpha + 1}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{8}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{17-8}{34}} = \pm\frac{3}{\sqrt{34}}$

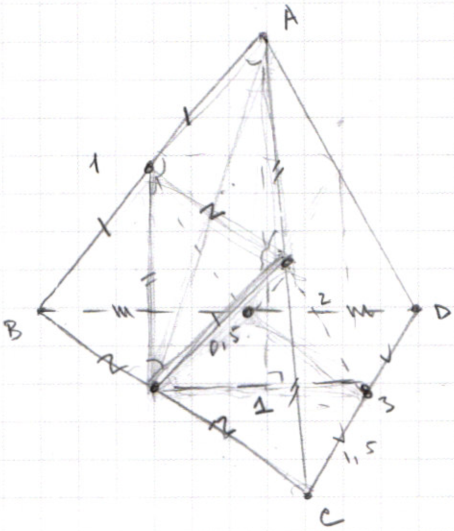
$\times\begin{array}{r} 85 \\ 85 \end{array}$
425
680
$\times$ 7225
5
36155

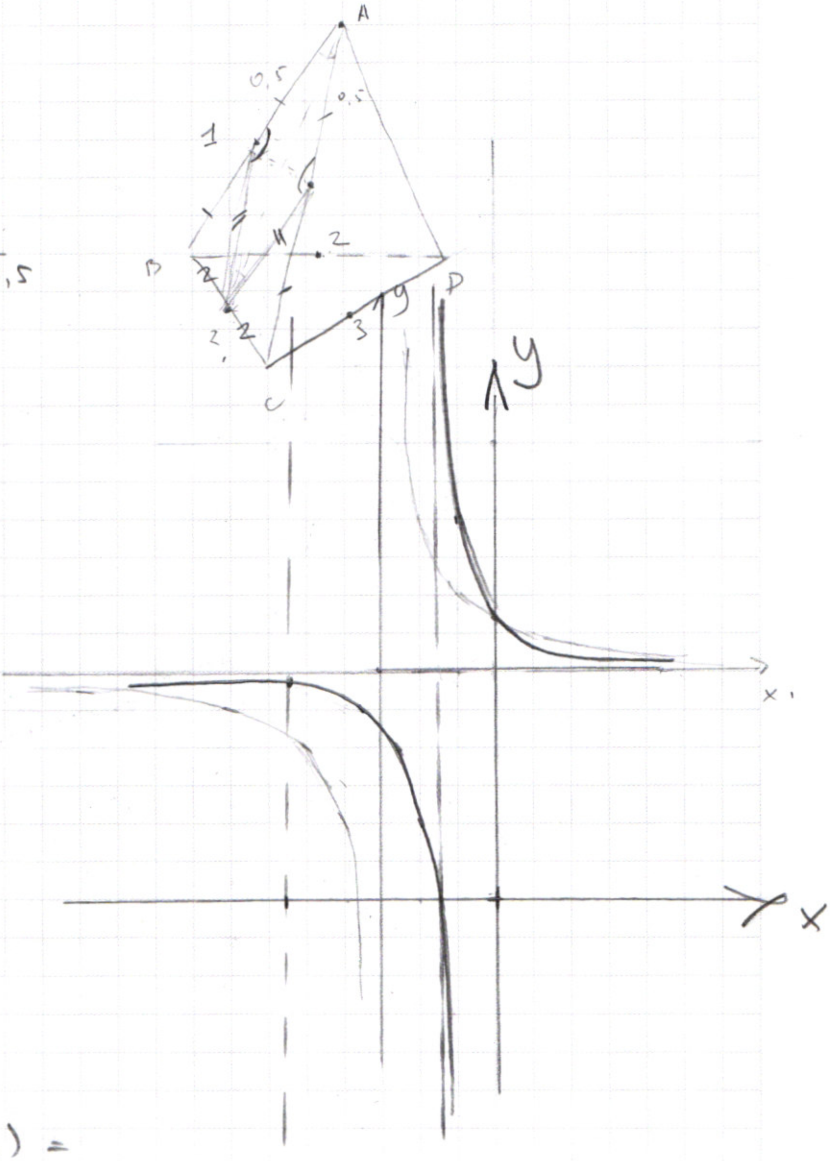
$\times\begin{array}{r} 34 \\ 6 \end{array}$
204

8 8

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax + b \le -8x^2 - 30x - 17$

$\frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3} = 3 + \frac{1}{2x+1,5}$





$\frac{-30+11}{-10+3} =$

$-50-$

$-(12x+11) = (8x^2+30x+17)(4x+3) =$

$= 32x^3 + 120x^2 + 68x + 24x^2 + 90x + 51 =$

$= 32x^3 + 144x^2 + 158x + 51$ $\quad -16 + 172 + 85 + 31 =$

$32x^2 + 144x^2 + 170x + 62 = 0$ $\quad = 101 - 103$

$16x^3 + 72x^2 + 85x + 31 = 0$

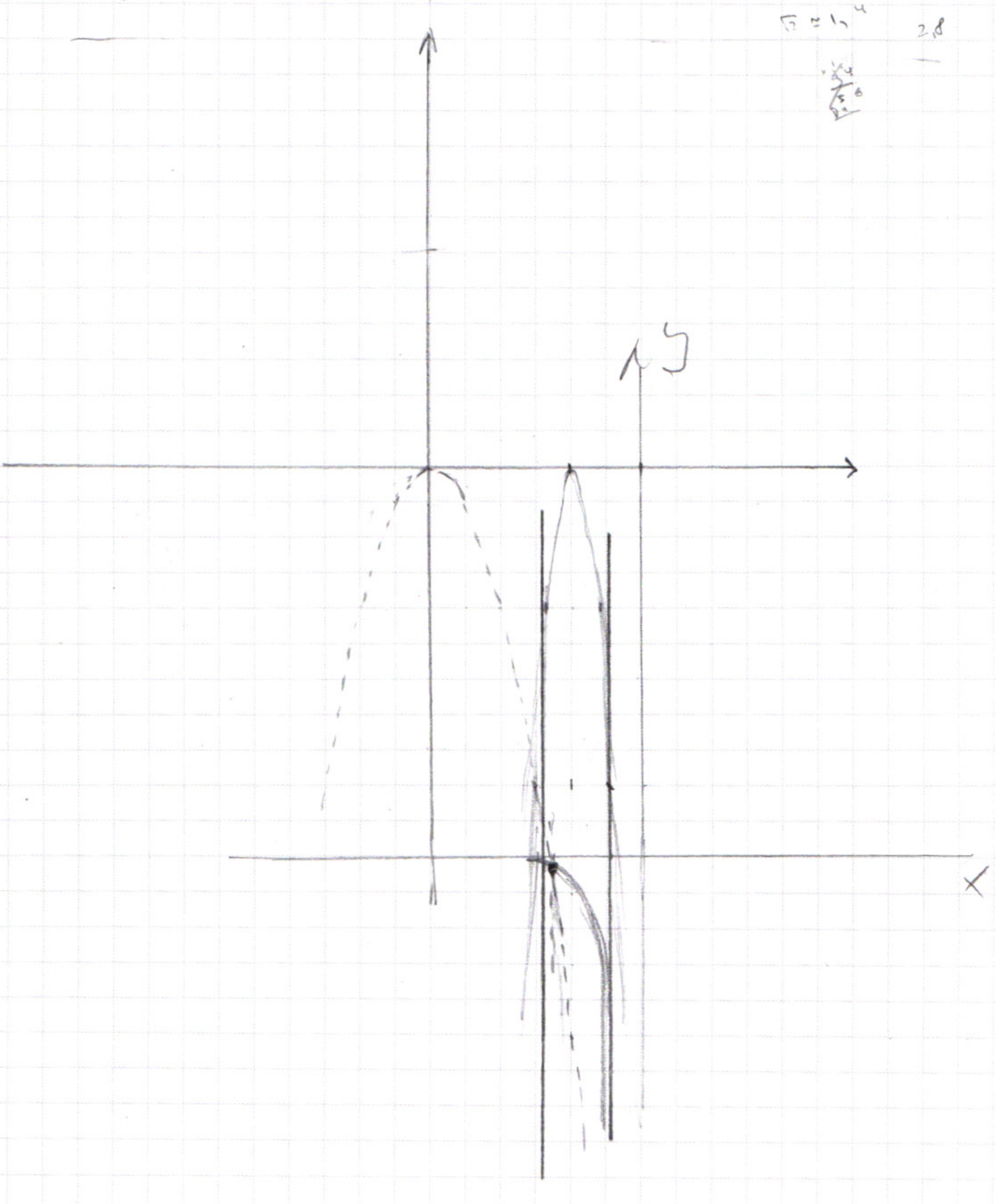
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-8x^2-30x-17=-\left(2\sqrt{2}x+\frac{15}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{225}{8}-17=-\left(2\sqrt{2}x+\frac{17}{2\sqrt{2}}\right)+\frac{89}{8}$$

$225-17\cdot 8=225-136=89$

$\sqrt{2}\approx 1,4$

$2,8$



$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \ldots$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = \ldots$

$a > 0,\ b > 0$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

f

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(2x) = f\cancel{(x)}\ \cancel{xo}\ f(x)$

$\frac{1}{f(p)} = \left\lceil \frac{4}{p} \right\rceil$

$f(3x) = f(x)$

$f\left(\frac{1}{k}\right) = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right) + f\left(\frac{1}{k}\right)$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = -f(p) = -\left\lceil \frac{p}{4} \right\rceil$

$f(1) = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right) = 0$